

## Okruhy teoretických otázok k skúške

### *Parciálne diferenciálne rovnice*

1. Priestory  $L_2(\Omega)$  kvadraticky integrovateľných funkcií definovaných na ohraničenej oblasti  $\Omega$  v  $\mathbb{R}^n$ , skalárny súčin, norma, ortogonálny systém, Fourierove koeficienty, Fourierov rad.  
Špeciálne  $\Omega = (a,b)$ , ak  $n = 1$ .
2. Priestory spojitých funkcií, ich norma v prípade uzáveru ohraničenej oblasti. Priestory diferencovateľných funkcií.
3. Sturmova-Liouvilleova úloha na vlastné hodnoty a vlastné funkcie. Definície a vlastnosti vlastných hodnôt a vlastných funkcií obyčajného diferenciálneho operátora  $L$  druhého rádu v samoadjungovanom tvare. Aký je jeho definičný obor  $D_L$ ? Fourierov rad funkcií z  $L_2(\Omega)$  podľa ortogonálneho systému vlastných funkcií.
4. Odvodenie rovnice pre stacionárne rozloženie teploty v telese.
5. Eliptický operátor 2. rádu v oblasti  $\Omega$ , eliptická rovnica. Niektoré špeciálne prípady, Laplaceova, Poissonova rovnica. Eliptické okrajové úlohy, rôzne typy. Podmienky jednoznačnosti riešenia.
6. Úloha na vlastné hodnoty a vlastné funkcie eliptického operátora  $L: D_L \rightarrow L_2(\Omega)$ . Vlastnosti vlastných hodnôt a vlastných funkcií. Riešenie nehomogénnej eliptickej okrajovej úlohy pomocou vlastných hodnôt a vlastných funkcií.
7. Odvodenie rovnice pre nestacionárne rozloženie teploty v telese.
8. Parabolická parciálna diferenciálna rovnica. Začiatočno-okrajová úloha pre parabolickú rovnicu. Odvodenie jednoznačnosti jej riešenia v prípade tyče. Vyjadrenie riešenia pomocou vlastných hodnôt a vlastných funkcií. Prípád nulovej (separácia premenných) a nenulovej pravej strany.
9. Začiatočná úloha pre vedenie tepla v nekonečnej tyči. Vyjadrenie riešenia v integrálnom tvare pomocou Fourierovej transformácie. Paradox šírenia tepla nekonečnou rýchlosťou.
10. Hyperbolická parciálna diferenciálna rovnica. Začiatočno-okrajová úloha pre hyperbolickú rovnicu. Vyjadrenie riešenia pomocou vlastných hodnôt a vlastných funkcií. Prípád nulovej (separácia premenných) a nenulovej pravej strany.

11. Začiatková úloha pre kmitanie nekonečnej struny. D'Alembertova formula, jej interpretácia v prípade nulovej pravej strany. Postupné vlnenie. Kmitanie polonekonečnej (na jednom konci upevnenej) struny. Použitie nepárneho predĺženia začiatkových podmienok.
12. Začiatková úloha pre nestacionárnu rovnicu 1. rádu. Jej riešenie pomocou charakteristiky.