(1) Riešte okrajovú úlohu

$\Delta u(x,y)=0,\ x^2+y^2<9,\ y>0;$
$u(x,0)=0,\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=2,$ ak $x^2+y^2=9.$

Riešenie:
$\Delta u(r,\varphi)=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi}=0,\ u(r,0)=u(r,\pi)=0,\ \frac{\partial u}{\partial r}(3,\varphi)=2.$
$r^2\Delta u(r,\varphi)=r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi}=0,\ 0\le r<3,\ 0<\varphi<\pi.$

Dosadiť $u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi):$
$r^2R''\Phi+rR'\Phi+R\Phi''=0/\frac{1}{R\Phi},$

$\frac{r^2R''+rR'}{R}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\lambda.$

$r^2R''+rR'-\lambda R(r)=0,\ 0\le r<3,$

$\Phi''+\lambda\Phi=0,\ \Phi(0)=\Phi(\pi)=0.$

Z prvej okrajovej podmienky: $\lambda>0,\ \Phi(\varphi)=\sin\sqrt{\lambda}\varphi.$
Z druhej okrajovej podmienky:
$\Phi(\pi)=\sin\sqrt{\lambda}\pi=0,\ \Rightarrow\ \sqrt{\lambda}\pi=n\pi,\ n=1,2,...$
$\lambda\equiv\lambda_n=n^2,\ \Phi\equiv\Phi_n(\varphi)=\sin n\varphi.$

$r^2R_n''+rR_n'-n^2R_n(r)=0,\ 0\le r<3,$
$R_n(r)=a_nr^n+b_nr^{-n},\ b_n=0$ - ohraničenosť riešenia v nule.
$u_n(r,\varphi)=R_n(r)\Phi_n(\varphi)=a_nr^n\sin n\varphi.$

$u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n\sin n\varphi.$

Nenulová okrajová podmienka:
$\frac{\partial u}{\partial r}(3,\varphi)=2=\sum_{n=1}^{\infty}a_nn3^{n-1}\sin n\varphi.$

Fourierove koeficienty:
$A_n=a_nn3^{n-1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2\sin n\varphi\,d\varphi=\frac{2[1-(-1)^n]}{n\pi}.$
$a_n=\frac{2[1-(-1)^n]}{3^{n-1}n^2\pi}.$

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6[1-(-1)^n]}{n^2}\left(\frac{r}{3}\right)^n\sin n\varphi.$$

(2) Riešte okrajovú úlohu

$\Delta u(x,y)=0,\ x^2+y^2<4,\ x>0,\ y>0;$
$u(x,0)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0,\ u=1,$ ak $x^2+y^2=4.$

Riešenie:
$\Delta u(r,\varphi)=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi}=0,\ u(r,0)=u(r,\pi)=0,\ \frac{\partial u}{\partial r}(3,\varphi)=2.$
$r^2\Delta u(r,\varphi)=r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi}=0,\ 0\le r<2,\ 0<\varphi<\frac{\pi}{2}.$

Dosadiť $u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi):$
$r^2R''\Phi+rR'\Phi+R\Phi''=0/\frac{1}{R\Phi},$

$\frac{r^2R''+rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda.$

$r^2R'' + rR' - \lambda R(r) = 0,\ 0 \le r < 2,$

$\Phi'' + \lambda\Phi = 0,\ \Phi(0) = \Phi'(\frac{\pi}{2}) = 0.$

Z prvej okrajovej podmienky: $\lambda > 0,\ \Phi(\varphi) = \sin\sqrt{\lambda}\varphi.$
Z druhej okrajovej podmienky:
$\Phi'(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} = 0,\ \Rightarrow\ \sqrt{\lambda}\frac{\pi}{2} = (2n-1)\frac{\pi}{2},\ n = 1, 2, ...$
$\lambda \equiv \lambda_n = (2n-1)^2,\ \Phi \equiv \Phi_n(\varphi) = \sin(2n-1)\varphi.$

$r^2R_n'' + rR_n' - (2n-1)^2R_n(r) = 0,\ 0 \le r < 2,$
$R_n(r) = a_n r^{2n-1} + b_n r^{-(2n-1)},\ b_n = 0$ - ohraničenosť riešenia v nule.
$u_n(r,\varphi) = R_n(r)\Phi_n(\varphi) = a_n r^{2n-1}\sin(2n-1)\varphi.$

$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{2n-1}\sin(2n-1)\varphi.$

Nenulová okrajová podmienka:
$u(2,\varphi) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{2n-1}\sin(2n-1)\varphi.$

Fourierove koeficienty:
$A_n = a_n 2^{2n-1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)\varphi\, d\varphi = \frac{4}{(2n-1)\pi}.$
$a_n = \frac{4}{2^{2n-1}(2n-1)\pi}.$

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi}\left(\frac{r}{2}\right)^{2n-1}\sin(2n-1)\varphi.$$

(3) Riešte úlohu na vlastné hodnoty a vlastné funkcie

$\Delta u + \lambda u(x,y) = 0,\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < 2,$
$u(0,y) = u(\pi,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = u(x,2) = 0.$

Riešenie:

$u(x,y) = X(x)Y(y),\ \lambda = \mu + \nu.$
Jednorozmerné úlohy na vlastné hodnoty a vlastné funkcie:

a) $X'' + \mu X(x) = 0,\ X(0) = X(\pi) = 0,$

b) $Y'' + \nu Y(y) = 0,\ Y'(0) = Y(2) = 0.$

a): Z prvej okrajovej podmienky: $\mu > 0,\ X(x) = \sin\sqrt{\mu}x,$

Z druhej okrajovej podmienky:
$X(\pi) = \sin(\sqrt{\mu}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\mu}\pi = m\pi.$

$$\mu \equiv \mu_m = m^2,\ X \equiv X_m(x) = \sin mx.$$

b): Z druhej okrajovej podmienky: $\nu > 0$,
Z prvej okrajovej podmienky $Y(y) = \cos\sqrt{\nu}y$,

Z druhej okrajovej podmienky:
$Y(2) = \cos\sqrt{\nu}2 = 0 \Rightarrow \sqrt{\nu}2 = (2n-1)\frac{\pi}{2}$.

$$\nu \equiv \nu_n = \left[\frac{(2n-1)\pi}{4}\right]^2, \ Y \equiv Y_n(y) = \cos\frac{(2n-1)\pi}{4}y.$$

Spolu:

$$\lambda \equiv \lambda_{m,n} = \mu_m + \nu_n = m^2 + \left[\frac{(2n-1)\pi}{4}\right]^2,$$

$$u \equiv u_{m,n}(x,y) = X_m(x)Y_n(y) = \sin mx \cos\frac{(2n-1)\pi}{4}y, \ m,n = 1,2,...$$

(4) Riešte úlohu na vlastné hodnoty a vlastné funkcie

$\Delta u + \lambda u(x,y) = 0, \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 2$,
$\frac{\partial u}{\partial x}u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = u(x,2) = 0$.

Riešenie:

$u(x,y) = X(x)Y(y), \ \lambda = \mu + \nu$.
Jednorozmerné úlohy na vlastné hodnoty a vlastné funkcie:

a) $X'' + \mu X(x) = 0, \ X'(0) = X(1) = 0$,

b) $Y'' + \nu Y(y) = 0, \ Y(0) = Y(2) = 0$.

a): Z druhej okrajovej podmienky: $\mu > 0$,
Z prvej okrajovej podmienky: $X(x) = \cos\sqrt{\mu}x$,
Z druhej okrajovej podmienky:
$X(1) = \cos(\sqrt{\mu}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\mu} = (2m-1)\frac{\pi}{2}$.

$$\mu \equiv \mu_m = \left[\frac{(2m-1)\pi}{2}\right]^2, \ X \equiv X_m(x) = \cos\frac{(2m-1)\pi}{2}x.$$

b): Z prvej okrajovej podmienky: $\nu > 0, \ Y(y) = \sin\sqrt{\nu}y$,

Z druhej okrajovej podmienky:
$Y(2) = \sin\sqrt{\nu}2 = 0 \Rightarrow \sqrt{\nu}2 = n\pi$.

$$\nu \equiv \nu_n = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2, \ Y \equiv Y_n(y) = \sin\frac{n\pi}{2}y.$$

Spolu:

$$\lambda \equiv \lambda_{m,n} = \mu_m + \nu_n = \left[\frac{(2m-1)\pi}{2}\right]^2 + \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2[(2m-1)^2 + n^2],$$

$$u \equiv u_{m,n}(x,y) = X_m(x)Y_n(y) = \cos\frac{(2m-1)\pi}{2}x \sin\frac{n\pi}{2}y, \ m,n = 1,2,...$$