Riešte začiatočno-okrajovú úlohu

$\frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t,\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = u(t,1) = u(0,x) = 0.$

Vlastné hodnoty a vlastné funkcie:

$$u'' + \lambda u(x) = 0,\ 0 < x < 1;\ u'(0) = u(1) = 0,$$

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2,\ u_n(x) = \cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x.$$

Riešenie v tvare

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x$$

Fourierov rad funkcie f podľa $\{u_n\}$:

$$f(t) = t = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x,$$

$$f_n(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 t\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x\,dx = t\frac{t(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}.$$

Dosadiť $u(t,x)$ do rovnice:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[c_n'(t)\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x + 3\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 c_n(t)\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} t\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x.$$

Porovnaním Fourierových koeficientov a z nulovej začiatočnej podmienky:

$$c_n'(t) + 3\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 c_n(t) = t\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi},\ c_n(0) = 0.$$

Riešenie v tvare konvolučného integrála

$$\begin{aligned} c_n(t) &= \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}\int_0^t e^{-\frac{3(2n-1)^2\pi^2}{4}(t-s)}s\,ds \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}e^{-\frac{3(2n-1)^2\pi^2}{4}t}\int_0^t e^{\frac{3(2n-1)^2\pi^2}{4}s}s\,ds \\ &= \frac{4(-1)^{n-1}}{3(2n-1)^3\pi^3}\left[\frac{4}{3(2n-1)^2\pi^2}(e^{-t}-1)+t\right] \end{aligned}$$

Výsledné riešenie

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n-1}}{3(2n-1)^3\pi^3}\left[\frac{4}{3(2n-1)^2\pi^2}(e^{-t}-1)+t\right]\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x.$$