

Okrajové úlohy pre obyčajné diferenciálne rovnice:

- (1) Riešte okrajovú úlohu $y'' + y = 0$,
a) $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$,
b) $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$,
c) $0 < x < \pi$, $y(0) = 1$, $y(\pi) = 2$ (nemá riešenie, prečo?)
d) $0 < x < \pi$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.
- (2) Riešte okrajovú úlohu $-y'' + y = f(x)$,
a) $0 < x < 2$, $f(x) = 1$, $y(0) = 0$, $y(2) = -1$,
b) $0 < x < 2$, $f(x) = 1$, $y'(0) = 0$, $y'(2) + y(2) = 0$,
c) $0 < x < 1$, $f(x) = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y(2) = 2$
d) $0 < x < 1$, $f(x) = e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(2) = 0$.
- (3) Riešte okrajovú úlohu $xy'' + y' = f(x)$,
a) $1 < x < 2$, $f(x) = x$, $y'(1) = 0$, $y(2) = 0$,
b) $1 < x < 2$, $f(x) = x$, $y'(1) - y(1) = 0$, $y'(2) = 0$,
c) $0 < x < 1$, $f(x) = 0$, $|y(x)| \leq M$, $y(1) = 2$
d) $1 < x < 3$, $f(x) = x$, $y'(1) = y'(3) = 0$ (nemá riešenie, prečo?)
e) $1 < x < 3$, $f(x) = 2 - x$, $y'(1) = y'(3) = 0$ (nekonečne veľa riešení, prečo?)
- (4) Riešte okrajovú úlohu $x^2y'' + 2xy' = f(x)$,
a) $1 < x < 2$, $f(x) = 1$, $y(1) = 0$, $y'(2) = -1$,
b) $1 < x < 2$, $f(x) = x$, $y'(1) - y(1) = 0$, $y'(2) = 0$,
c) $0 < x < 1$, $f(x) = 1$, $|y(x)| \leq M$, $y(1) = 0$
d) $0 < x < 1$, $f(x) = x$, $|y(x)| \leq M$, $y'(1) = 0$.
- (5) Riešte Sturmovu-Liovilleovu úlohu $u'' + \lambda u = 0$,
a) $0 < x < 4$, $u(0) = u(4) = 0$,
b) $0 < x < 4$, $u'(0) = u'(4) = 0$,
c) $0 < x < 4$, $u(0) = u'(4) = 0$,
d) $0 < x < 4$, $u'(0) = u(4) = 0$,
e) $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $u(0) = u(\frac{\pi}{2}) = 0$,
f) $0 < x < 1$, $u(0) + u'(0) = u(1) = 0$
- (6) Riešte Sturmovu-Liovilleovu úlohu
 $u'' + \lambda u = 0$, $0 < x < 1$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$
a rozložte funkciu $f(x) = x - x^2$ do Fourierovho radu podľa systému vlastných funkcií a určte druh konvergenzie radu.
- (7) Riešte Sturmovu-Liovilleovu úlohu $u'' + \lambda u = 0$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $u(0) = 0$, $u'(\frac{\pi}{2}) = 0$
a rozložte funkciu $f(x) = x^2 - \pi x$ do Fourierovho radu podľa systému vlastných funkcií a určte druh konvergenzie radu.