

kde  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  sú koeficienty Fourierovho radu funkcie  $f$  podľa ortogonálneho systému  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Teda riešenie úlohy (2.44), (2.45) má vyjadrenie Fourierovým radom

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n} u_n(x), \quad x \in \Omega; \quad (2.46)$$

kde

$$f_n = \frac{\int_{\Omega} f(x) u_n(x) dx}{\int_{\Omega} u_n^2(x) dx}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.47)$$

Podmienka  $\lambda_n \neq 0$  je splnená podľa vety 2.3-b), ak pre funkciu  $q: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  v eliptickom operátore  $L$  platí  $q(x) \geq q_0 > 0$  pre všetky  $x \in \bar{\Omega}$ . V tom prípade máme

$$0 < q_0 \leq \lambda_n \quad \text{pre všetky } n = 1, 2, \dots$$

Podľa vety 2.1 o jednoznačnosti riešenia okrajových úloh je uvedená podmienka splnená aj za predpokladu  $q(x) \equiv 0$  pre všetky  $x$ , ak ide o Dirichletovu a Newtonovu úlohu. V týchto prípadoch dostaneme

$$\lambda_n > 0 \quad \text{pre všetky } n = 1, 2, \dots$$

V prípade Neumannovej úlohy, ak  $q(x) = 0$  pre všetky  $x \in \Omega$ , je prvá vlastná hodnota

$$\lambda_1 = 0$$

a zodpovedá jej jednorozmerný priestor vlastných funkcií, ktorý tvorí množinu  $\mathbb{R}$  všetkých reálnych čísel. Ak existuje riešenie úlohy

$$-\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_A}(s) = 0, \quad s \in \partial\Omega \quad (2.49)$$

potom možno nájsť také riešenie  $w$ , pre ktoré platí

$$\int_{\Omega} w(x) dx = 0$$

Pretože  $u_1(x) \equiv 1$  je prvá vlastná funkcia, dostaneme rovnakým spôsobom ako predtým vyjadrenie

$$w(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n} u_n(x), \quad x \in \Omega$$

a každé riešenie Neumannovej úlohy (2.48), (2.49) má tvar

$$u(x) = C + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n} u_n(x), \quad x \in \Omega \quad (2.50)$$

kde  $C$  je ľubovoľné reálne číslo a  $\{f_n\}_{n=2}^{\infty}$  sú Fourierove koeficienty funkcie  $f$  určené vzorcom (2.47). Podotýkame, že  $d_1 = 0$  na základe nutnej podmienky existencie riešenia:

$$\int_{\Omega} f(x) dx = 0$$

**Poznámka 2.4.** Podľa vety 2.3 d) rady (2.46), resp. (2.50) konvergujú v strede na oblasti  $\Omega$ . Ak existuje klasické riešenie a oblasť  $\Omega$  má hladkú hranicu, potom je uvedená konvergencia podľa posledného tvrdenia vety 2.3 aj rovnomerná.

## 2.6 Úlohy

1. Zistite, za akých predpokladov je rovnica vedenia tepla v anizotropnom prostredí

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( k_1(x,y,z) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_2(x,y,z) \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( k_3(x,y,z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + q(x) = f(x), \quad x \in \Omega$$

aliptická.

2. Riešte okrajovú úlohu

$$-\Delta u = \frac{A}{k}, \quad x^2 + y^2 \leq \rho^2; \quad \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = 0, \quad x^2 + y^2 = \rho^2;$$

$$A > 0, \quad k > 0, \quad \rho > 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta > 0$$

pre vedenie tepla v nekonečnom valci polomeru  $\rho$ .

Návod: Použite polárne súradnice a nezávislosť riešenia od uhlovej súradnice  $\varphi$ .

3. Riešte okrajovú úlohu

$$-\Delta u = \frac{A}{k}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq \rho^2; \quad \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$



$$\lambda > 0, \quad k > 0, \quad \rho > 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta > 0$$

pre vedenie tepla v guli polomeru  $\rho$ .

4. Riešte okrajovú úlohu pre potenciál nekonečného valcového kondenzátora, ktorého vnútorná elektróda má daný konštantný potenciál a vonkajšia elektróda je uzemnená:

$$-\Delta u = 0, \quad 0 < s^2 < x^2 + y^2 < b^2$$

$$u(x, y) = u_0, \quad x^2 + y^2 = s^2; \quad u(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 = b^2$$

5. Riešte okrajovú úlohu pre vedenie tepla v nekonečnom valci s výmenou tepla s okolitým prostredím nulovej teploty:

$$-\Delta u(x, y) + q_0 u(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 < \rho^2, \quad q_0 > 0, \quad \rho > 0$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = \lambda, \quad x^2 + y^2 = \rho^2, \quad \lambda > 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta > 0$$

Návod: Použite polárne súradnice a modifikovanú Besselovu funkciu.

6. Riešte okrajovú úlohu pre vedenie tepla v guli s výmenou tepla s okolitým prostredím, alebo pre tok neutrónov v guľovom reaktore:

$$-\Delta u(x, y, z) + q_0 u(x, y, z) = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 < \rho^2, \quad q_0 > 0, \quad \rho > 0$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = \lambda, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad \lambda > 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta > 0$$

Návod: Využitím sférických súradníc a nezávislosti riešenia na uhlových súradniciach nahraďte pôvodnú úlohu úlohou

$$-r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial r} + q_0 r u(r) = 0, \quad \alpha u'(r) + \beta u(r) = \lambda$$

V ďalšom riešení použite substitúciu  $v = r u$  a predpoklad

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} u(r) = u(0) \in (-\infty, \infty)$$

### §3. METÓDA SEPARÁCIE PREMENNÝCH

V tejto časti sa budeme zaoberať hlavne rovnicami s Laplaceovým operátorom, pretože využijeme jeho špeciálny tvar v karteziánskych, polárnych, cylindrických a sférických súradniciach. Metóda separácie premenných spočíva v nahradení pôvodnej okrajovej úlohy postupnosťami okrajových úloh na vlastné hodnoty pre obyčajné diferenciálne rovnice. Výhodou metódy je vyjadrenie riešenia v tvare funkcionálneho radu, nevýhodou je obmedzenie metódy na špeciálne tvary oblasti ako obdĺžnik, kruh, valec, guľa.

V jednotlivých prípadoch budeme predpokladať, že existuje klasické riešenie príslušných okrajových úloh a úloh na vlastné funkcie.

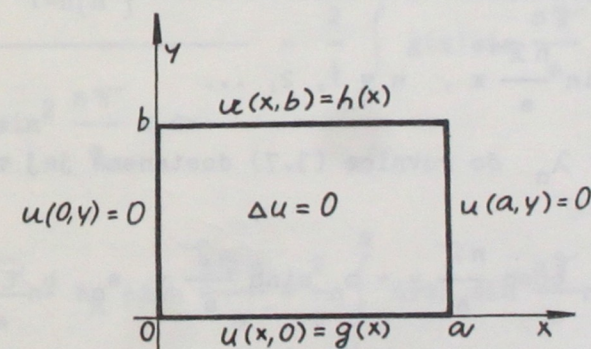
#### 3.1 Riešenie okrajových úloh a úloh na vlastné hodnoty na obdĺžniku

a) Uvažujme Dirichletovu okrajovú úlohu

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \quad (3.1)$$

$$u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad 0 < y < b \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad u(x, b) = h(x), \quad 0 < x < a \quad (3.3)$$



Obr. 7  
Oblasť riešenia úlohy (3.1), (3.2), 3.3)

Kvôli spojitosti riešenia predpokladáme

$$g(0) = g(a) = h(0) = h(a) = 0 \quad (3.4)$$

Hľadáme najprv riešenie rovnice (3.1) spĺňajúce nulové podmienky (3.2). Riešenie  $u$  vyjadríme v tvare

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

Dosadením do rovnice (3.1) dostaneme vzťah



$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

Za predpokladu  $u(x,y) \neq 0$ ,  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ ; dostaneme rovnosť

$$\frac{X(x)}{X''(x)} = \frac{Y(y)}{Y''(y)}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

Pretože funkcie na ľavej a pravej strane poslednej rovnosti majú rôzne premenné a rovnosť platí na celom obdĺžniku  $\Omega = (0,a) \times (0,b)$ , musia sa obe strany rovnosti rovnávať konštante, ktorú označíme  $-\lambda$ . Ďalšou úpravou dostaneme dve separované obyčajné diferenciálne rovnice s nulovými okrajovými podmienkami:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < a \quad (3.5)$$

$$Y(0) = X(a) = 0 \quad (3.6)$$

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, \quad 0 < y < b \quad (3.7)$$

Vzhľadom na to, že hľadáme nenulovú funkciu  $u$  v tvare  $u(x,y) = X(x)Y(y)$ , je úloha (3.5), (3.6) Sturmova-Liouvilleova úloha na vlastné hodnoty a vlastné funkcie. Túto úlohu sme riešili v I. kapitole, kde sme našli postupnosť vlastných hodnôt

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{a^2}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

ktorej zodpovedá postupnosť vlastných funkcií  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dosadením hodnoty  $\lambda_n$  do rovnice (3.7) dostaneme jej všeobecné riešenie v tvare

$$Y_n(y) = a_n \cosh \frac{n\pi}{a} y + b_n \sinh \frac{n\pi}{a} y, \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}, \quad 0 < y < b$$

Zvolili sme hyperbolické funkcie namiesto exponenciálnych kvôli jednoduchšiemu tvaru výsledného riešenia pri splnení nenulových okrajových podmienok (3.3).

Funkcie  $u_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  tvaru

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

sú riešeniami rovnice (3.1) a spĺňajú okrajové podmienky (3.2). Aby sme splnili aj nenulové podmienky (3.3), hľadáme riešenie úlohy (3.1), (3.2), (3.3) v tvare funkcionálneho radu

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cosh \frac{n\pi}{a} y + b_n \sinh \frac{n\pi}{a} y) \sin \frac{n\pi}{a} x \end{aligned} \quad (3.8)$$

Neznáme koeficienty  $a_n, b_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , určíme pomocou nenulových okrajových podmienok (3.3). Dosadením do radu (3.8) dostaneme vyjadrenia funkcií  $g, h$  v tvare Fourierovho radu

$$g(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{a} x$$

$$h(x) = u(x,b) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cosh \frac{n\pi}{a} b + b_n \sinh \frac{n\pi}{a} b) \sin \frac{n\pi}{a} x,$$

$$x \in (0,a)$$

Na základe výpočtu koeficientov Fourierovho radu dostaneme vzťahy

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\int_0^a g(x) \sin \frac{n\pi}{a} x \, dx}{\int_0^a \sin^2 \frac{n\pi}{a} x \, dx} = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin \frac{n\pi}{a} x \, dx = A_n \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$a_n \cosh \frac{n\pi b}{a} + b_n \sinh \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a h(x) \sin \frac{n\pi}{a} x \, dx = B_n$$

a teda

$$b_n = \frac{B_n - A_n \cosh \frac{n\pi b}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Opäť dosadením do (3.8) máme vyjadrenie riešenia v tvare

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \left[ A_n \left( \sinh \frac{n\pi b}{a} \cosh \frac{n\pi}{a} y - \right. \right.$$



$$- \cosh \frac{n\pi b}{a} \sinh \frac{n\pi}{a} y + B_n \sinh \frac{n\pi}{a} y \left] \sin \frac{n\pi}{a} x \right.$$

Použitím súčtového vzorca pre hyberbolické funkcie dostaneme riešenie okrajovej úlohy (3.1), (3.2), (3.3) v tvare

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \sinh \frac{n\pi}{a} (b-y) + B_n \sinh \frac{n\pi}{a} y}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x \quad (3.10)$$

Rovnakým spôsobom riešime aj úlohu s nulovými okrajovými podmienkami pri  $y = 0$ ,  $y = b$  a nenulovými podmienkami pri  $x = 0$ ,  $x = a$ .

V prípade okrajovej úlohy

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \quad (3.11)$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad u(x,b) = h_1(x), \quad 0 < x < a$$

$$u(0,y) = g_2(y), \quad u(a,y) = h_2(y), \quad 0 < y < b \quad (3.12)$$

$$g_1(0) = g_1(a) = h_1(0) = h_1(a) = g_2(0) = g_2(b) = h_2(0) = h_2(b) = 0 \quad (3.13)$$

dostaneme riešenie v tvare súčtu riešení dvoch okrajových úloh s nulovými podmienkami pre  $x = 0$ ,  $x = a$  resp.  $y = 0$ ,  $y = b$ :

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \sinh \frac{n\pi}{a} (b-y) + B_n \sinh \frac{n\pi}{a} y}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \sinh \frac{n\pi}{a} (a-x) + D_n \sinh \frac{n\pi}{a} x}{\sinh \frac{n\pi a}{a}} \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (3.14)$$

kde

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a g_1(x) \sin \frac{n\pi}{a} x \, dx, \quad B_n = \frac{2}{a} \int_0^a h_1(x) \sin \frac{n\pi}{a} x \, dx \\ C_n = \frac{2}{b} \int_0^b g_2(y) \sin \frac{n\pi}{b} y \, dy, \quad D_n = \frac{2}{b} \int_0^b h_2(y) \sin \frac{n\pi}{b} y \, dy, \quad (3.15) \\ n = 1, 2, \dots$$

Požiadavka rovnosti nule funkcií  $g_1, h_1$  v bodoch 0, a resp.  $g_2, h_2$  v bodoch 0, b je kvôli rovnomernej konvergencii radu (3.14), pretože uvedené funkcie rozvíjame do sínusových radov na intervaloch (0,a), resp. (0,b). Ak sú splnené len podmienky

$$g_1(0) = g_2(0), \quad g_1(a) = h_2(0), \\ h_1(a) = h_2(b), \quad h_1(0) = g_2(b), \quad (3.16)$$

potom riešenie u vyjadríme v tvare

$$u(x,y) = A + Bx + Cy + Dxy + v(x,y) \quad (3.17)$$

pričom koeficienty A, B, C, D zvolíme tak, aby polynóm  $A + Bx + Cy + Dxy$  nadobýval v bodoch [0,0], [a,0], [a,b], [0,b] hodnoty  $g_1(0), g_1(a), h_1(a), h_1(0)$ . Funkcie v je pritom riešením okrajovej úlohy

$$\Delta v = 0, \quad (x,y) \in (0,a) \times (0,b)$$

$$v(x,0) = \bar{g}_1(x), \quad v(x,b) = \bar{h}_1(x), \quad 0 < x < a$$

$$v(0,y) = \bar{g}_2(y), \quad v(a,y) = \bar{h}_2(y), \quad 0 < y < b$$

$$\text{kde } \bar{g}_1(x) = g_1(x) - A - Bx, \quad \bar{g}_2(y) = g_2(y) - A - Cy$$

$$\bar{h}_1(x) = h_1(x) - A - Bx - Cb - Dbx$$

$$\bar{h}_2(y) = h_2(y) - A - Ba - Cy - Day,$$

pričom

$$\bar{g}_1(0) = \bar{g}_1(a) = \bar{h}_1(0) = \bar{h}_1(a) =$$

$$\bar{g}_2(0) = \bar{g}_2(b) = \bar{h}_2(0) = \bar{h}_2(b) = 0$$

Pri odvodzovaní riešení predchádzajúcich okrajových úloh sme postupovali formálne, keď sme vychádzali už z predpokladu existencie klasického riešenia. Ab funkcionálny rad (3.14) naozaj reprezentoval funkciu  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , ktorá je klasickým riešením okrajovej úlohy (3.11), (3.12), musíme ukázať, že rad rovnomerne konverguje na uzavretom obdĺžniku  $\bar{\Omega} = [0,a] \times [0,b]$  a rady, ktoré vzniknú dvojnásobným derivovaním, rovnomerne konvergujú na každom uzavretom obdĺžniku  $\Omega_\varepsilon = [\varepsilon, a-\varepsilon] \times [\varepsilon, b-\varepsilon]$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , nachádzajúcim sa vnútri obdĺžnika  $\Omega = (0,a) \times (0,b)$ .

Pretože funkcia  $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je rastúca, môžeme rad (3.14) majorizovať na celom obdĺžniku  $\Omega$  číselným radom

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| + |B_n| + |C_n| + |D_n| \quad (3.18)$$

Rad (3.18) konverguje, ak funkcie  $g_1, h_1$  resp.  $g_2, h_2$  sú spojité diferencovateľné na uzavretých intervaloch  $[0,a]$  resp.  $[0,b]$  a platia vzťahy (3.13).



Skutočne, v tomto prípade dostaneme napríklad pre koeficienty  $A_n$  vzťahy:

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a g_1(x) \sin \frac{n\pi}{a} x dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^a g_1'(x) \cos \frac{n\pi}{a} x dx$$

Nech  $a_n$  je  $n$ -tý Fourierov koeficient Fourierovho radu funkcie  $g_1'$  podľa ortogonálneho systému  $\left\{ \cos \frac{n\pi}{a} x \right\}_{n=1}^{\infty}$  t.j.  $\frac{1}{a} A_n$ , alebo  $\frac{\pi n}{a} A_n$ ,  $n=1,2,\dots$

Na základe teórie konvergencie Fourierových radov (kap. I, poznámka 1.1) je

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

a teda aj

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2 < \infty.$$

k-ty čiastočný súčet radu  $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$  spĺňa vzťahy

$$s_k = \sum_{n=1}^k |A_n| = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} n |A_n| \leq \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^k (n A_n)^2 \leq$$

$$C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2.$$

Teda rad  $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$  konverguje a rovnakým spôsobom možno ukázať aj konvergenciu radov  $\sum_{n=1}^{\infty} |B_n|$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} |D_n|$ .

Pretože rad (3.18) je majorantný k radu (3.14), konverguje rad (3.14) rovnomerne na uzavretom obdĺžniku  $\Omega = \langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle$  k funkcii  $u \in C(\bar{\Omega})$ .

Dvojnásobným derivovaním radu (3.14) podľa  $x$  dostaneme rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left[ \frac{-A_n \sinh \frac{n\pi}{a} (b-y) - B_n \sinh \frac{n\pi}{a} y}{a^2 \sinh \frac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x + \right. \quad (3.19)$$

$$\left. + \frac{-C_n \sinh \frac{n\pi}{b} (a-x) + D_n \sinh \frac{n\pi}{b} x}{b^2 \sinh \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi}{b} y \right]$$

Použitím vzorca  $\sinh(\alpha + \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta + \sinh \beta \cosh \alpha$  v menovateľoch radu (3.19), ohraničenosti Fourierových koeficientov  $A_n, B_n, C_n, D_n$  a funkcií  $\sin \frac{n\pi}{a} x$ ,  $\sin \frac{n\pi}{b} y$  dostaneme na obdĺžniku  $\bar{\Omega}_\varepsilon = \langle \varepsilon, a-\varepsilon \rangle \times \langle \varepsilon, b-\varepsilon \rangle$  majorantný číselný rad k radu (3.19):

$$\sum_{n=1}^{\infty} M n^2 \left( \frac{1}{\exp \frac{n\pi \varepsilon}{a}} + \frac{1}{\exp \frac{n\pi \varepsilon}{b}} \right) \quad (3.20)$$

$$\text{kde } M = 2 \max \left\{ \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2} \right\} \sup \{ A_n, B_n, C_n, D_n \}_{n=1}^{\infty}$$

Rad (3.20) konverguje na základe D'Alembertovho kritéria a teda rad (3.19) rovnomerne konverguje na každom obdĺžniku  $\Omega_\varepsilon$  nachádzajúcom sa vnútri obdĺžnika  $\Omega = \langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle$ . Rovneko by sme ukázali, že konverguje aj rad, ktorý by sme dostali derivovaním podľa premennej  $y$ , ako aj podľa oboch premenných  $x, y$ . Pretože jednotlivé členy radu (3.14) sú riešenia Laplaceovej rovnice (3.11), je aj funkcia  $u$  ako jeho súčet riešením rovnice (3.11), ktoré je z triedy  $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  a spĺňa okrajové podmienky (3.12).

Teda sme dokázali, že ak okrajové funkcie sú spojitely diferencovateľné a spĺňajú podmienku (3.13), je súčet radu (3.14) (klasickým) riešením okrajovej úlohy (3.11), (3.12). Ako vidno, pre existenciu klasického riešenia okrajových úloh musia byť splnené ďalšie predpoklady o hladkosti okrajových funkcií. Z priebehu dôkazu vyplýva dokonca vzťah  $u \in C^\infty(\Omega)$ . Dôkazy existencie klasického riešenia sú dosť náročné a ďalej od nich upustíme. Súčty funkcionálnych radov odvodených pomocou separácie premenných budeme považovať za zovšeobecnené, alebo slabé riešenie (podrobnejšie v §5).

Metóda separácie premenných môže byť podobným spôsobom použitá aj pre iné okrajové podmienky na hranici obdĺžnika  $\Omega$ .

b) Riešme úlohu na vlastné hodnoty:

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \quad (3.21)$$

$$u(x, 0) = u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0 \quad (3.22)$$

Na základe vety 2.1 o jednoznačnosti riešenia Dirichletovej okrajovej úlohy vieme, že všetky vlastné hodnoty úlohy (3.21), (3.22) sú kladné. Ďalej budeme opäť postupovať metódou separácie premenných.



Hľadáme vlastné funkcie v tvare

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Dosadením tohto výrazu do (3.21) máme

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + \lambda X(x)Y(y) = 0$$

Ze predpokladu  $u(x,y) \neq 0$  na  $\Omega$  dostaneme po predelení výrazom  $X(x)Y(y)$  rovnice

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\mu$$

kde  $\lambda$  je hľadaná vlastná hodnota a  $\mu$  je reálno číslo. Dostávame tak dve úlohy na vlastné hodnoty pre obyčajné diferenciálne rovnice:

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad 0 < x < a \quad (3.23)$$

$$X(0) = X(a) = 0$$

$$Y''(y) + (\lambda - \mu)Y(y) = 0, \quad 0 < y < b \quad (3.24)$$

$$Y(0) = Y(b) = 0$$

Vieme, že vlastné hodnoty a vlastné funkcie úlohy (3.23) majú tvar

$$\mu_m = \frac{m^2 \pi^2}{a^2}, \quad X_m(x) = \sin \frac{m\pi}{a} x, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.25)$$

Dosadením  $\mu = \mu_m$  do (3.24) dostaneme úlohu

$$Y''(y) + \left(\lambda - \frac{m^2 \pi^2}{a^2}\right) Y(y) = 0, \quad 0 < y < b \quad (3.26)$$

$$Y(0) = Y(b) = 0$$

Pre každé pevné číslo  $m$  sú čísla

$$\lambda - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} = \frac{n^2 \pi^2}{b^2}$$

vlastné hodnoty úlohy (3.26), ktorým zodpovedajú vlastné funkcie

$$Y_n(y) = \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dostávame tak dvojné postupnosti vlastných hodnôt a vlastných funkcií úlohy (3.21), (3.22):

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \pi^2 \quad (3.27)$$

$$u_{mn}(x,y) = \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (3.28)$$

c) Pomocou vlastných hodnôt a vlastných funkcií okrajovej úlohy (3.21), (3.22) budeme riešiť Dirichletovu okrajovú úlohu pre Poissonovu rovnicu vyjadrujúcu napríklad priehyb obdĺžnikovej membrány pevne upevnenej na okraji:

$$-\Delta u = f(x,y) \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \quad (3.29)$$

$$u(x,0) = u(y,b) = u(0,y) = u(a,y) = 0 \quad (3.30)$$

Podľa vyjadrenia (2.46), (2.47) má riešenie úlohy (3.29), (3.30) tvar

$$u(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{f_{mn}}{\lambda_{mn}} u_{mn}(x,y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \quad (3.31)$$

kde  $f_{mn}$  sú Fourierove koeficienty funkcie  $f$  podľa ortogonálneho systému vlastných funkcií  $\{u_{mn}\}_{m,n=1}^{\infty}$ . Teda

$$u(x,y) = \frac{4ab}{\pi^2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\left(\int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \, dx dy\right) \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y}{a^2 n^2 + b^2 m^2} \quad (3.32)$$

**Poznámka 3.1.** Dvojný rad  $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$  môžeme vyjadriť v tvare radu  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , kde

$$b_n = a_{1n} + a_{2,n-1} + \dots + a_{n-1,1} + a_{n1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

**Poznámka 3.2.** Riešenie nehomogénnej úlohy

$$-\Delta u = f(x,y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad u(x,b) = h_1(x)$$

$$u(0,y) = g_2(y), \quad u(a,y) = h_2(y)$$

hľadáme v tvare  $u = v + w$ , kde  $v$  je riešenie úlohy (3.29), (3.30) a  $w$  je riešenie úlohy (3.11), (3.12).



### 3.2 Riešenie okrajových úloh s úloh na vlastné hodnoty pre kruh

Predpokladajme, že oblasť  $\Omega$  je vnútro kruhu o polomere so stredom v začiatku súradnej sústavy:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < \rho^2\} \quad (3.33)$$

a) Riešme najprv okrajovú úlohu

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.34)$$

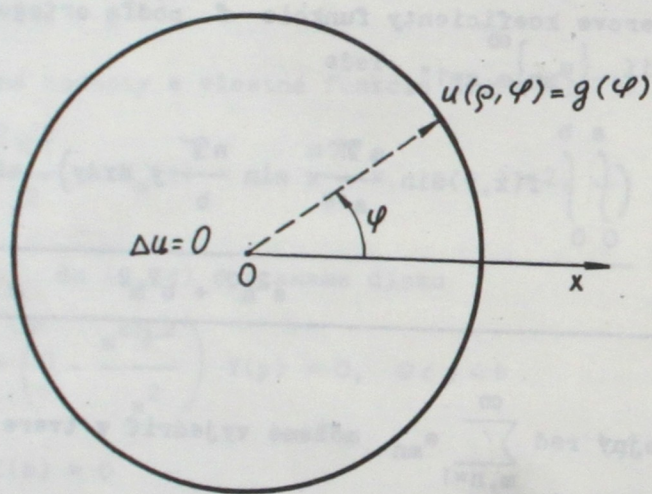
$$u(s) = g(s), \quad s \in \partial\Omega \quad (3.35)$$

V polárnych súradniciach má úloha tvar

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 < r < \rho, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (3.36)$$

$$u(\rho, \varphi) = g(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (3.37)$$

$$u(r, 0) = u(r, 2\pi), \quad 0 < r < \rho \quad (3.38)$$



Obr. 8  
Oblasť riešenia úlohy (3.36), (3.37), (3.38)

Podmienka (3.38) vyjadruje periodickosť riešenia vzhľadom na uhlovú premeru  $\varphi$ , o funkcii  $g: \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  predpokladáme:

$$g(0) = g(2\pi)$$

Riešenie rovnice (3.36) vyjadríme v tvare

$$u(r, \varphi) = R(r) \phi(\varphi)$$

Dosadením do (3.36) s separáciou premenných  $r, \varphi$  dostaneme:

$$\frac{r^2 R'' + r R'}{R(r)} = - \frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)} = \lambda$$

a ďalšou úpravou:

$$r^2 R'' + r R' - \lambda R = 0, \quad 0 < r < \rho \quad (3.39)$$

$$\phi'' + \lambda \phi(\varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (3.40)$$

$$\phi(0) = \phi(2\pi) \quad (3.41)$$

Riešme najprv úlohu (3.40), (3.41). Aby existovalo jej nenulové riešenie, musí byť  $\lambda \geq 0$ . Všeobecné riešenie rovnice (3.40) má potom tvar

$$\phi_\lambda(\varphi) = A \cos \sqrt{\lambda} \varphi + B \sin \sqrt{\lambda} \varphi \quad (3.42)$$

Vzhľadom na podmienku periodickosti (3.41) musí byť

$$\sqrt{\lambda} = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dostali sme tak postupnosť vlastných hodnôt

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

so zodpovedajúcou postupnosťou vlastných funkcií

$$\{1, \cos n \varphi, \sin n \varphi\}_{n=1}^{\infty}$$

okrajovej úlohy (3.40), (3.41). Vidíme, že každej vlastnej hodnote okrem  $\lambda_0 = 0$  zodpovedajú dve lineárne nezávislé vlastné funkcie. Dosadením do (3.42) dostaneme všeobecné riešenie úlohy (3.40), (3.41) (pri  $\lambda = n^2$ ) v tvare

$$\phi_n(\varphi) = A_n \cos n \varphi + B_n \sin n \varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.43)$$

Dosadením vlastných hodnôt do (3.39) riešime rovnicu

$$r^2 R_n'' + r R_n' - n^2 R_n = 0, \quad 0 < r < \rho \quad (3.44)$$

Ľahko sa presvedčíme, že všeobecné riešenie rovnice (3.44) má tvar

$$R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r \quad (3.45)$$

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.46)$$

Aby riešenie pôvodnej rovnice (3.36) bolo ohraničené v kruhu  $\Omega$ , musí byť riešenie rovnice (3.44) ohraničené na intervale  $\langle 0, \rho \rangle$  a teda kladieme  $D_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$



Ohraničené riešenia rovnice (3.36) s podmienkou (3.38) majú potom tvar

$$u_n(r, \varphi) = r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

a riešenie okrajovej úlohy (3.36), (3.37), (3.38) vyjadríme v tvare

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad (3.47)$$

$$0 \leq r < \rho, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Využitím okrajovej podmienky (3.37) dostaneme:

$$g(\varphi) = u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

Na základe jednoznačnosti rozvoja funkcie  $g$  do Fourierovho radu podľa systému  $\{1, \cos n\varphi, \sin n\varphi\}_{n=1}^{\infty}$  dostávame vyjadrenia koeficientov v rade (3.47):

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi, \quad A_n = \frac{1}{\rho^n \pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos n\varphi d\varphi \quad (3.48)$$

$$B_n = \frac{1}{\rho^n \pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin n\varphi d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots$$

a riešenie okrajovej úlohy (3.36), (3.37), (3.38) má tvar:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \left[ \left( \int_0^{2\pi} g(s) \cos ns ds \right) \cos n\varphi + \left( \int_0^{2\pi} g(s) \sin ns ds \right) \sin n\varphi \right] \quad (3.49)$$

Z vyjadrenia (3.49) dostaneme pre hodnotu funkcie  $u$  v strede kruhu  $\Omega$ :

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi$$

čo vyjadruje známu vlastnosť harmonických funkcií o nadobúdaní v strede strednej hodnoty z hodnôt na kružnici.

b) V prípade vonkajšej Dirichletovej okrajovej úlohy pre kruh hľadáme riešenie úlohy (3.34), (3.35) na množine

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 > \rho^2\}$$

Kvôli jednoznačnosti riešenia úlohy žiadame, aby riešenie  $u$  bolo na oblasti  $\Omega$  ohraničené (poznámka 2.3). Preto kladíme po separácii premenných v (3.45), (3.46):

$$R_n(r) = r^{-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

a výsledné riešenie má tvar funkcionálneho radu

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \left[ \left( \int_0^{2\pi} g(s) \cos ns ds \right) \cos n\varphi + \left( \int_0^{2\pi} g(s) \sin ns ds \right) \sin n\varphi \right] \quad (3.50)$$

c) Budeme sa ďalej zaoberať úlohou na vlastné hodnoty na kruhu:

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad x^2 + y^2 < \rho^2 \quad (3.51)$$

$$u(x,y) = 0, \quad x^2 + y^2 = \rho^2 \quad (3.52)$$

Rozpisom do polárnych súradníc dostaneme

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \lambda r^2 u = 0, \quad 0 < r < \rho, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (3.53)$$

$$u(\rho, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (3.54)$$

$$u(r, 0) = u(r, 2\pi) \quad (3.55)$$

Opäť hľadáme vlastné funkcie v tvare

$$u(r, \varphi) = R(r) \phi(\varphi)$$

Dosaďením do rovnice (3.53) a separáciou premenných dostaneme rovnakým spôsobom ako v predchádzajúcej časti rovnice:

$$r^2 R'' + r R' + (\lambda r^2 - \mu) R = 0, \quad 0 < r < \rho \quad (3.56)$$



$$\phi''(\varphi) + \mu \phi(\varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (3.57)$$

$$\phi(0) = \phi(2\pi) \quad (3.58)$$

Rovnako ako v prípade úlohy (3.40), (3.41) dostaneme vlastné hodnoty a vlastné funkcie úlohy (3.57), (3.58):

$$\mu_n = n^2, \quad \phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Na určenie vlastných hodnôt  $\lambda$  máme teraz úlohu

$$r^2 R'' + r R' + (\lambda r^2 - n^2) R(r) = 0, \quad 0 < r < \varrho \quad (3.59)$$

$$R(\varrho) = 0 \quad (3.60)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Teraz použijeme teóriu Besselových funkcií z kap. I. §2. Podľa vety I.2.2 existuje postupnosť vlastných hodnôt  $\{\lambda_{mn}\}_{m=1}^{\infty}$  a vlastných funkcií  $\{R_m^{(n)}\}_{m=1}^{\infty}$  úlohy (3.59), (3.60) tvaru

$$\lambda_{mn} = \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{\varrho} \right)^2 \quad (3.61)$$

$$R_m^{(n)} = J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{\varrho} r \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

kde  $\mu_m^{(n)}$  je  $m$ -tý koreň Besselovej funkcie  $J_n$ :

$$J_n(\mu_m^{(n)}) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.62)$$

Teda vzťahmi (3.61), (3.62) je určená dvojná postupnosť vlastných hodnôt úlohy (3.53), (3.54), (3.55), ktorej zodpovedajú vlastné funkcie

$$\begin{aligned} u_{m0}(r, \varphi) &= J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{\varrho} r \right) \\ u_{mn}^c(r, \varphi) &= J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{\varrho} r \right) \cos n\varphi \\ u_{mn}^s(r, \varphi) &= J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{\varrho} r \right) \sin n\varphi, \quad m, n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.63)$$

d) Budeme ďalej riešiť Dirichletovu okrajovú úlohu pre Poissonovu rovnicu na kruhu:

$$-\Delta u = f(r, \varphi), \quad 0 \leq r < \varrho, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (3.64)$$

$$u(\varrho, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (3.65)$$

Rovnako ako v prípade obdĺžnika použijeme vyjadrenie (2.46) riešenia  $u$  v tvare ortogonálneho radu podľa vlastných funkcií úlohy (3.53), (3.54), (3.55):

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{m0}}{\lambda_{m0}} u_{m0}(r, \varphi) + \\ &+ \sum_{m,n=1}^{\infty} \left[ \frac{f_{mn}^c}{\lambda_{mn}} u_{mn}^c(r, \varphi) + \frac{f_{mn}^s}{\lambda_{mn}} u_{mn}^s(r, \varphi) \right] \end{aligned}$$

alebo podľa (3.63)

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{m0}}{\lambda_{m0}} J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{\varrho} r \right) + \\ &+ \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{mn}} J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{\varrho} r \right) [f_{mn}^c \cos n\varphi + f_{mn}^s \sin n\varphi] \end{aligned} \quad (3.66)$$

kde  $\lambda_{mn} = \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{\varrho} \right)^2$  sú vlastné hodnoty úlohy (3.53), (3.54), (3.55) a  $f_{m0}$ ,  $f_{mn}^c$ ,  $f_{mn}^s$  sú Fourierove koeficienty funkcie  $f$  podľa systému vlastných funkcií  $\{u_{m0}, u_{mn}^c, u_{mn}^s\}_{m,n=1}^{\infty}$  ortogonálneho na množine  $(0, \varrho) \times (0, 2\pi)$  s váhou  $r$ :

$$\begin{aligned} f_{m0} &= \frac{\int_0^{\varrho} \int_0^{2\pi} r f(r, \varphi) J_0 \left( \frac{\mu_m^{(0)}}{\varrho} r \right) dr d\varphi}{\pi \varrho^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})} \\ f_{mn}^c &= \frac{2 \int_0^{\varrho} \int_0^{2\pi} r f(r, \varphi) J_n \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{\varrho} r \right) \cos n\varphi d\varphi}{\pi \varrho^2 J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)})} \end{aligned} \quad (3.67)$$