§4. INTEGRÁLNE METÓDY RIEŠENIA ELIPTICKÝCH OKRAJOVÝCH ÚLOH

V 2. časti sme ukázali, že riešenie u eliptickej okrajovej úlohy

$$(Lu)(x) = f(x), \quad x \in \Omega$$

$$\alpha(s)\frac{\partial u}{\partial n_A}(s) + \beta(s)u(s) = 0, \quad s \in \partial\Omega$$

môže byť vyjadrené v tvare ortogonálneho radu

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\left(\int_{\Omega} f(y)w_n(y)dy\right) w_n(x), \quad x \in \Omega$$

podľa úplného ortonormálneho v priestore $L_2(\Omega)$ systému vlastných funkcií $\{w_n\}$ úlohy na vlastné hodnoty

$$(Lw)(x) - \lambda w(x) = 0, \quad x \in \Omega$$

$$\alpha(s)\frac{\partial w}{\partial n_A}(s) + \beta(s)w(s) = 0, \quad s \in \Omega$$

Po ďalšej úprave môžeme riešenie u pôvodnej okrajovej úlohy vyjadriť v integrálnom tvare

$$u(x) = \int_{\Omega} f(y)G(x,y)dy, \quad x \in \Omega$$

kde

$$G(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} w_n(x)w_n(y)$$

pričom predpokladáme, že uvedený rad konverguje v priestore $L_2(\Omega)$ pre každé pevné $x \in \Omega$.

Integrálne metódy spočívajú práve v hľadaní funkcie G premenných x, y závislej len od oblasti Ω, operátora L a typu okrajových podmienok, pomocou ktorej môžeme vyjadriť riešenie príslušnej okrajovej úlohy v tvare integrálov cez oblasť Ω a jej hranicu $\partial\Omega$.

4.1 Riešenie okrajových úloh s Diracovou[24] funkciou

Doteraz sme sa zaoberali len rovnicami, ktorých riešenia sú spojité funkcie. Parciálnymi diferenciálnymi rovnicami možno však modelovať aj deje, ktoré majú nespojitý charakter.

Uvažujme prípad priehybu membrány zaťaženej kolmou silou f a na okraji upevnenej. Ako vieme, veľkosť priehybu je vyjadrená funkciou $u:\Omega \to R$, $\Omega \subset R^2$, ktorá je riešením okrajovej úlohy

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad u(s) = 0, \quad s \in \partial\Omega$$

Hodnota $f(x)$ vyjadruje hustotu zaťaženia v bode $x = (x_1, x_2)$. Predpokladajme, že hustota $f \equiv f_r$ je rôzna od nuly len na kruhu o polomere r so stredom v bode y, pričom celý kruh K_r leží v oblasti Ω. Nech na kruh K_r pôsobí rovnomerné zaťaženie q_r také, aby celková výslednica síl bola rovná 1, t.j.

$$\iint_{K_r} f_r(x)\,dx = \iint_{K_r} q_r\,dx = q_r \pi r^2 = 1$$

Teda

$$f_r(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi r^2}, & \text{ak } x \in K_r \\ 0, & \text{ak } x \notin K_r \end{cases}$$

Zmenšovaním kruhu K_r sa hodnota funkcie v bode y zväčšuje a v ostatných bodoch sa postupne stáva nulovou, presnejšie

$$\lim_{r \to 0+} f_r(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{ak } x = y \\ 0, & \text{ak } x \neq y \end{cases}$$

Dostávame sa k úlohe nájsť priehyb membrány pod vplyvom sily, ktorá pôsobí len v jednom bode y membrány a má výslednicu $\iint_{\Omega} f(x)dx = 1$. Z predchádzajúcich úvah vidieť, že hustotu tejto sily nemôžeme vyjadriť pomocou "klasickej" funkcie. <u>Formálne</u> ju môžeme vyjadriť týmito vlastnosťami:

a) $\lim\limits_{r \to 0+} f_r(x) = \delta_y(x), \quad x \in \Omega$

b) $\delta_y(x) = 0, \quad \text{ak } x \neq y$

c) $\delta_y(y) = +\infty$ (4.1)

d) $\iint_{\Omega} \delta_y(x)\,dx = 1$.

24) Dirac Paul Adrien (1902-1984), anglický teoretický fyzik. Významne prispel k rozvoju teoretickej fyziky vytvorením novej teórie o elektronoch metódami kvantovej mechaniky. Matematickou metódou predpovedal existenciu antičastíc. V roku 1933 dostal Nobelovu cenu spolu s E. S. Schrödingerom.

Aby sme dostali matematickú charakterizáciu "funkcie" δ_y, uvažujme spojitú funkciu $\varphi \in C(\Omega)$ a nasledujúce limitné vzťahy

$$\lim_{r \to 0+} \iint_{\Omega} f_r(x)\varphi(x)\,dx = \lim_{r \to 0+} \iint_{K_r} \frac{1}{\pi r^2}\varphi(x)\,dx =$$

$$\lim_{r \to 0+} \frac{1}{\pi r^2}\pi r^2 \varphi(\xi_r) = \lim_{r \to 0+} \varphi(\xi_r) = \varphi(y) \tag{4.2}$$

kde $\xi_r \in K_r$ je bod určený podľa vety o strednej hodnoty pre integrály. Na základe limitných vzťahov (4.2) zavedieme nasledujúcu definíciu platnú v priestore R^m.

<u>Definícia 4.1.</u> Nech $\Omega \subset R^m$ je ľubovoľný oblasť, $y \in \Omega$ ľubovoľný pevný bod. Zobrazenie $\delta_y : C(\Omega) \to R$ definované vzťahom

$$\delta_y(\varphi) = \langle \delta_y, \varphi \rangle = \varphi(y), \quad \varphi \in C(\Omega) \tag{4.3}$$

sa nazýva <u>Diracova funkcia.</u>

Teda Diracovu funkciu sme definovali ako funkciu definovanú nie na množine bodov, ale na množine funkcií. Takéto funkcie (zobrazenia) sa nazývajú <u>funkcionály.</u>

$$\int_{\Omega} \delta_y(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(y), \quad y \in \Omega \subset R^m \tag{4.4}$$

Vo všeobecnosti platí vzťah

$$\lim_{r \to 0+} \int_{\Omega} \delta_y^{(r)}(x)\varphi(x)dx = \int_{\Omega} \delta_y(x)\varphi(x)dx = \varphi(y) \tag{4.5}$$

pre každé $y \in \Omega$, $\varphi \in C(\Omega)$

kde $\delta_y^{(r)} : \Omega \to R$, $\Omega \subset R^m$ sú ľubovoľné funkcie spĺňajúce vzťahy

a) $\delta_y^{(r)} \in C_0^{\infty}(\Omega)$

b) $\delta_y^{(r)} \geq 0$ na Ω

c) $\delta_y^{(r)}(x) = 0$ pre všetky $x \notin K_r$

d) $\lim_{r \to 0+} \delta_y^{(r)}(y) = +\infty$

e) $\int_{\Omega} \delta_y^{(r)}(x)dx = 1$

Uvedené vlastnosti spĺňajú napríklad funkcie $\delta_y^{(r)} : \Omega \to R$ dané vzťahom

$$\delta_y^{(r)}(x) = \begin{cases} C_r^{-1} \exp\left(\dfrac{1}{|x-y|^2 - r^2}\right), & \text{ak } |x-y| < r \\ 0, & \text{ak } |x-y| \geq r \end{cases}$$

kde $C_r = \displaystyle\int_{K_r} \exp\left(\frac{1}{|x-y|^2 - r^2}\right) dx, \quad r > 0$.

Ďalej sa budeme zaoberať riešením okrajovej úlohy

$$Lu = \delta_y \text{ v } \Omega \tag{4.6}$$

$$\alpha(s)\frac{\partial u}{\partial n_A}(s) + \beta(s)u(s) = 0, \quad s \in \partial\Omega \tag{4.7}$$

kde L je eliptický operátor z definície 2.1:

$$(Lu)(x) = -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + q(x)u(x)$$

pričom predpokladáme, že jeho koeficienty, ako aj funkcie α, β spĺňajú predpoklady z definície 2.3 a vety 2.1. Keďže pravá strana rovnice (4.6) nie je reálna funkcia, ale funkcionál, definujeme riešenie úlohy (4.6), (4.7) pomocou integrálnej identity. Vyjdeme pritom z integrálnej identity, ktorú spĺňa klasické riešenie okrajovej úlohy

$$Lw = f, \quad f \in C(\Omega) \cap L_2(\Omega) \tag{4.8}$$

$$\alpha(s)\frac{\partial w}{\partial n_A}(s) + \beta(s)w(s) = 0, \quad s \in \partial\Omega \tag{4.9}$$

Pripomeňme si, že riešenie w je z množiny D_L tých funkcií $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, pre ktoré $Lw \in L_2(\Omega)$ a platí podmienka (4.9).

Nech v je ľubovoľná funkcia z množiny D_L. Podľa formuly (2.22) (symetria operátora $L : D_L \to L_2(\Omega)$) platí vzťah

$$\int_{\Omega} w(x)(Lv)(x)dx = \int_{\Omega} (Lw)(x)v(x)dx$$

a použitím rovnice (4.8) dostávame integrálnu identitu

$$\int_{\Omega} w(x)(Lv)(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \qquad (4.10)$$

pre všetky funkcie $v \in D_L$

Táto identita nám poslúži na základe (formálnych vlastností) $(4.1)_b$, (4.4) k definícii riešenia okrajovej úlohy (4.6), (4.7).

Definícia 4.2. Nech $y \in \Omega$. Funkcia $u \in C^2(\Omega - \{y\}) \cap C^1(\bar{\Omega} - \{y\}) \cap L_2(\Omega)$, ktorá spĺňa podmienky

$$\int_{\Omega} u(x)(Lv)(x)dx = v(y) \quad \text{pre všetky} \quad v \in D_L \qquad (4.11)$$

$$(Lu)(x) = 0 \quad \text{pre všetky} \quad x \in \Omega - \{y\} \qquad (4.12)$$

$$\alpha(s)\frac{\partial u}{\partial n_A}(s) + \beta(s)u(s) = g(s), \quad s \in \partial\Omega \qquad (4.13)$$

sa nazýva riešením okrajovej úlohy (4.6), (4.7).

Poznámka 4.1. Na základe hustoty množiny $C_0^{\infty}(\Omega')$ v priestore $L_2(\Omega')$ pre ľubovoľnú podoblasť $\Omega' \subset \Omega$, vyplýva podmienka (4.12) priamo z podmienky (4.11). Skutočne, ak $x \in \Omega$, $x \neq y$, potom existuje oblasť $\Omega' \subset \Omega$ taká, že $x \in \Omega'$, $y \notin \Omega'$. Z identity (4.11) potom dostaneme identity

$$\int_{\Omega'} (Lu)(x)\varphi(x)dx = \int_{\Omega'} u(x)(L\varphi)(x)dx = 0$$

$$\text{pre všetky} \quad \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega')$$

pričom sme využili to, že každá funkcia $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega')$ môže byť predĺžená nulou na celú oblasť Ω. Rovnica (4.12) potom platí v Ω' na základe spomínanej hustoty množiny $C_0^{\infty}(\Omega')$ v priestore $L_2(\Omega')$.

4.2 Greenova funkcia a jej použitie

Ak uvažujeme bod $y \in \Omega$ ako ľubovoľný, potom riešenie okrajovej úlohy (4.6), (4.7) je vlastne funkciou dvoch premenných $x, y \in \Omega$. Pomocou tejto funkcie možno riešenie nehomogénnej okrajovej úlohy

$$(Lu)(x) = f(x), \quad x \in \Omega \qquad (4.14)$$

$$\alpha(s)\frac{\partial u}{\partial n_A}(s) + \beta(s)u(s) = g(s), \quad s \in \partial\Omega \qquad (4.15)$$

vyjadriť v tvare integrálov cez oblasť Ω a jej hranicu $\partial\Omega$.

Definícia 4.3. Funkcia $G : \Omega \times \Omega \to R$, ktorá je riešením úlohy

$$L\,G(.,y) = \delta_y, \quad (x,y) \in \Omega \times \Omega \qquad (4.16)$$

$$\alpha(s)\frac{\partial G(.,y)}{\partial n_A}\Big|_{x=s} + \beta(s)G(s,y) = 0, \quad s \in \partial\Omega \qquad (4.17)$$

sa nazýva Greenova funkcia okrajovej úlohy (4.14), (4.15).

Otázka existencie jednoznačnosti Greenovej funkcie je matematicky značne náročná. V knihe ([15], §4.4) je dokázaná existencia a jednoznačnosť ako tzv. veľmi slabého riešenia okrajovej úlohy (4.16), (4.17). Ak hranica $\partial\Omega$ oblasti Ω, koeficienty operátora L a funkcie α, β sú dostatočne hladké, potom uvedené veľmi slabé riešenie je (podľa [15]) jednoznačne určenou Greenovou funkciou ako riešenie úlohy (4.16), (4.17) podľa definície 4.2. Teda Greenova funkcia spĺňa rovnosti

$$[L\,G(.,y)](x) = 0 \quad \text{pre všetky} \quad x \in \Omega, \ x \neq y \qquad (4.18)$$

$$\int_{\Omega} G(x,y)(Lv)(x)dx = v(y) \quad \text{pre všetky} \quad y \in \Omega, \ v \in D_L \qquad (4.19)$$

Nech $\{w_n\} \subset D_L$ je úplný ortogonálny systém vlastných funkcií a $\lambda_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$; príslušné vlastné hodnoty spĺňajúce vzťahy

$$(Lw_n)(x) = \lambda_n w_n(x), \quad x \in \Omega, \ n = 1, 2, \ldots \qquad (4.20)$$

Greenova funkcia G je podľa definícií 4.2, 4.3 pri každom pevnom $y \in \Omega$ ako funkcia premennej x prvkom priestoru $L_2(\Omega)$, t.j. $G(.,y) \in L_2(\Omega)$ pre každé $y \in \Omega$. Vyjadríme ju v tvare Fourierovho radu podľa ortonormálneho systému $\{w_n\}$ v priestore $L_2(\Omega)$:

$$G(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y)\, w_n(x), \quad x, y \in \Omega \qquad (4.21)$$

$$c_n(y) = \int_{\Omega} G(x,y)w_n(x)dx, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (4.22)$$

Využitím vzťahov (4.20), (4.19) dostaneme vyjadrenie koeficientov $c_n(y)$ v tvare

$$c_n(y) = \int_{\Omega} G(x,y)\frac{1}{\lambda_n}(Lw_n)(x)dx = \frac{1}{\lambda_n} w_n(y), \quad n = 1,2, \ldots$$

a dosadením do (4.21) máme rozklad Greenovej funkcie v tvare

$$G(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} w_n(x)w_n(y), \quad x, y \in \Omega \tag{4.23}$$

pričom uvedený rad konverguje pri každom pevnom $y \in \Omega$ v priestore $L_2(\Omega)$. Ako dôsledok vyjadrenia (4.23) dostaneme symetriu Greenovej funkcie vzhľadom na premenné x, y:

$$G(x,y) = G(y,x) \quad \text{pre všetky} \quad x, y \in \Omega \tag{4.24}$$

Ako sme už spomenuli v úvode tejto časti, môžeme pomocou Greenovej funkcie vyjadriť riešenie $u \in D_L$ okrajovej úlohy

$$(Lu)(x) = f(x), \quad x \in \Omega \tag{4.25}$$

$$\alpha(s)\frac{\partial u}{\partial n_A} + \beta(s)u(s) = 0, \quad s \in \partial\Omega \tag{4.26}$$

v integrálnom tvare:

$$u(x) = \int_{\Omega} f(y)G(x,y)dy, \quad x \in \Omega \tag{4.27}$$

keď sme využili konvergenciu radu (4.23).

Uvažujme teraz nehomogénnu okrajovú úlohu

$$(Lw)(x) = f(x), \quad x \in \Omega \tag{4.28}$$

$$\alpha(s)\frac{\partial w}{\partial n_A} + \beta(s)w(s) = g(s), \quad s \in \partial\Omega \tag{4.29}$$

V tomto prípade budeme postupovať čiastočne formálne, pretože budeme používať Greenovu formulu (2.20) pre širšiu triedu funkcií ako sme predpokladali v časti 2.4. Podrobnejšie odvodenie možno nájsť v ([15], §4.5.3). Teda použitím spomenutej Greenovej formuly dostaneme pre ľubovoľný pevný bod $x \in \Omega$ integrálny vzťah

$$\int_{\Omega}(LG)(x,y)w(y)\,dy = \int_{\Omega} G(x,y)(Lw)(y)dy + \int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial w}{\partial n_A}(s)G(x,s) - w(s)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_A}\bigg|_{y=s}\right]ds$$

Použitím vzťahov (4.25), (4.16), (4.4) môžeme riešenie w úlohy (4.28), (4.29) vyjadriť v tvare

$$w(x) = \int_{\Omega} G(x,y)f(y)dy + \int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial w}{\partial n_A}(s)G(x,s) - w(s)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_A}\bigg|_{y=s}\right]ds$$

V prípade Dirichletových okrajových podmienok

$$w(s) = g(s), \quad G(x,s) = 0, \quad s \in \partial\Omega, \ s \in \Omega$$

dostaneme vyjadrenie

$$w(x) = \int_{\Omega} G(x,y)f(y)dy - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_A}\bigg|_{y=s} g(s)ds, \quad x \in \Omega \tag{4.30}$$

a v prípade Neumannových podmienok

$$\frac{\partial w}{\partial n_A}(s) = g(s), \quad \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_A}\bigg|_{y=s} = 0, \quad s \in \partial\Omega, \quad x \in \Omega$$

alebo Newtonových podmienok

$$\frac{\partial w}{\partial n_A}(s) + \beta(s)w(s) = g(s), \quad \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_A}\bigg|_{y=s} + \beta(s)G(x,s) = 0$$

$s \in \partial\Omega, \quad x \in \Omega$

máme vyjadrenie

$$w(x) = \int_{\Omega} G(x,y)f(y)dy + \int_{\partial\Omega} G(x,s)g(s)ds, \quad x \in \Omega \tag{4.31}$$

Teda pomocou Greenovej funkcie môžeme riešenie okrajovej úlohy (4.28), (4.29) vyjadriť v tvare integrálov cez oblasť Ω a jej hranicu $\partial\Omega$.

4.3 Greenova funkcia Laplaceovho operátora

Nevýhodou riešenia okrajových úloh pomocou Greenovej funkcie je to, že Greenovu funkciu nemožno vo všeobecnosti vyjadriť v analytickom tvare. Možné je to v prípade Laplaceovho operátora, aj to pre špeciálne oblasti. Uvažujme teda eliptický operátor

$$L = -\Delta, \quad \text{v priestore } R^3$$

Greenova funkcia je v tomto prípade riešením úlohy

$$-\Delta_x G(x,y) = \delta_y, \quad x,\ y \in \Omega \subset R^3 \tag{4.32}$$

$$\alpha(s)\,\frac{\partial G(.,y)}{\partial n}\bigg|_{x=s} + \beta(s)G(s,y) = 0, \quad s \in \partial\Omega \tag{4.33}$$

kde $\bar{n}$ je jednotkový vektor vonkajšej normály k hranici oblasti $\partial\Omega$. Vzhľadom na charakter pravej strany rovnice (4.32) spĺňa funkcia $G(.,y)$ pri pevnom $y \in \Omega$ rovnicu

$$\Delta_x G(x,y) = 0 \quad \text{pre všetky} \quad x \neq y, \quad x \in \Omega \tag{4.34}$$

a má singularitu, t.j. je neohraničená v okolí bodu $x = y$. Takúto vlastnosť má funkcia

$$\omega(.,y) : R^3 - \{y\} \to R, \quad \omega(x,y) = \frac{1}{4\pi r}$$

$$r = |x - y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$$

Funkcia ω sa nazýva aj fundamentálne riešenie Laplaceovej rovnice a vyjadruje napr. potenciál elektrostatického poľa vytvoreného bodovým nábojom veľkosti $\frac{1}{4\pi}$ umiestneným do bodu y.

Greenovu funkciu hľadáme v tvare

$$G(x,y) = g(x,y) + \frac{1}{4\pi r}, \quad x,\ y \in \Omega, \quad x \neq y \tag{4.35}$$

Vzhľadom na vlastnosti funkcie $\frac{1}{4\pi r}$ a požadované vlastnosti funkcie G musí byť funkcia $g(.,y)$ harmonická v Ω a zvolená tak, aby funkcia $G(.,y)$ spĺňala okrajovú podmienku (4.33). Teda musí platiť

$$-\Delta_x g(x,y) = 0, \quad x \in \Omega \tag{4.36}$$

$$\alpha(s)\,\frac{\partial g(.,y)}{\partial n}\bigg|_{x=s} + \beta(s)g(s,y) =$$

$$= -\alpha(s)\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{4\pi r}\bigg|_{x=s} - \beta(s)\,\frac{1}{4\pi r}\bigg|_{x=s}, \quad s \in \partial\Omega \tag{4.37}$$

Vidíme, že funkcia $g(.,y)$ je riešením okrajovej úlohy pre Laplaceovu rovnicu v celej oblasti Ω.

Ukážeme, že funkcia G daná vzťahom (4.35) je naozaj Greenova funkcia. K tomu nám stačí ešte dokázať integrálnu identitu

$$-\int_\Omega G(x,y)\,\Delta v(x)dx = v(y), \quad y \in \Omega \tag{4.38}$$

pre všetky funkcie $v \in D_\Delta$, t.j. také funkcie $v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, pre ktoré $\Delta v \in L_2(\Omega)$ a je splnená okrajová podmienka

$$\alpha(s)\,\frac{\partial v}{\partial n}(s) + \beta(s)v(s) = 0, \quad s \in \partial\Omega \tag{4.39}$$

Nech $y \in \Omega$ a číslo $\varepsilon > 0$ je také malé, že $K_\varepsilon \subset \Omega$, kde $K_\varepsilon = \{x \in \Omega : |x-y| < \varepsilon\}$ je guľa v R^3 o strede y a polomere ε. Použitím Greenovej formuly (2.20), podmienok (4.36), (4.37), (4.39) a harmonickosti funkcie $\frac{1}{r}$ na množine $\Omega - \{y\}$ dostaneme vzťahy

$$-\int_\Omega G(x,y)\,\Delta v(x)dx = -\int_\Omega g(x,y)\,\Delta v(x)dx - \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{1}{r}\,\Delta v(x)dx =$$

$$= -\int_\Omega g(x,y)\,\Delta v(x)dx - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega - K_\varepsilon} \frac{1}{r}\,\Delta v(x)dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left[-g(s,y)\,\frac{\partial v}{\partial n}(s) + \frac{\partial g}{\partial n}(s,y)v(s)\right] ds +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left[-\frac{1}{r}\bigg|_{x=s} \frac{\partial v}{\partial n}(s) + \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\bigg|_{x=s} v(s)\right] ds +$$

$$\int_{|x-y|=\varepsilon} \left[\frac{1}{r}\bigg|_{x=s} \frac{\partial v}{\partial r}(s) - \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\bigg|_{x=s} v(s)\right] ds =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial r}(s) + \frac{1}{\varepsilon^2} v(s) \right] ds =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon \frac{\partial v}{\partial r}(\xi_1(\varepsilon)) + v(\xi_2(\varepsilon)) \right] = v(y)$$

kde $\xi_1(\varepsilon)$, $\xi_2(\varepsilon)$ sú body spĺňajúce vzťahy $|\xi_1(\varepsilon)-y| = |\xi_2(\varepsilon) - y| = \varepsilon$ určené na základe vety o strednej hodnote pre plošný integrál cez sféru o strede y a polomere ε. Výsledok poslednej limity vyplýva zo spojitej diferencovateľnosti funkcie v.

Teda funkcia G určená vzťahom (4.35) je naozaj Greenova funkcia pre Laplaceov operátor.

Nájdeme Greenove funkcie pre špeciálne typy oblastí $\Omega \subset R^2$, pričom čiastočne použijeme geometrické metódy.

<u>Príklad 4.1.</u> Hľadajme Greenovu fznkciu vnútornej Dirichletovej úlohy pre guľu K_ϱ polomeru ϱ so stredom v bode O.

Nech $y \in K_\varrho$, t.j. $|y| < \varrho$. Podľa (4.35) hľadáme funkciu $g(.,y)$, ktorá je riešením Dirichletovej úlohy pre Laplaceovu rovnicu:

$$\Delta_x g(x,y) = 0, \quad x \in K_\varrho \tag{4.40}$$

$$g(s,y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|s-y|}, \quad |s| = \varrho \tag{4.41}$$

Ak $y = 0$, potom je riešením úlohy (4.40), (4.41) funkcia

$$g(x,0) = \frac{1}{4\pi\varrho} \tag{4.42}$$

Ak $y \neq 0$, označme y' bod, ktorý je inverzný k bodu y vzhľadom na sféru $S_\varrho = \left\{ s \in R^3 : |s| = \varrho \right\}$, t.j. bod, ležiaci na polpriamke Oy, pre ktorý platí vzťah

$$|y||y'| = \varrho^2 \tag{4.43}$$

Z kosínusovej vety pre trojuholníky yOs, sOy′ máme vzťahy

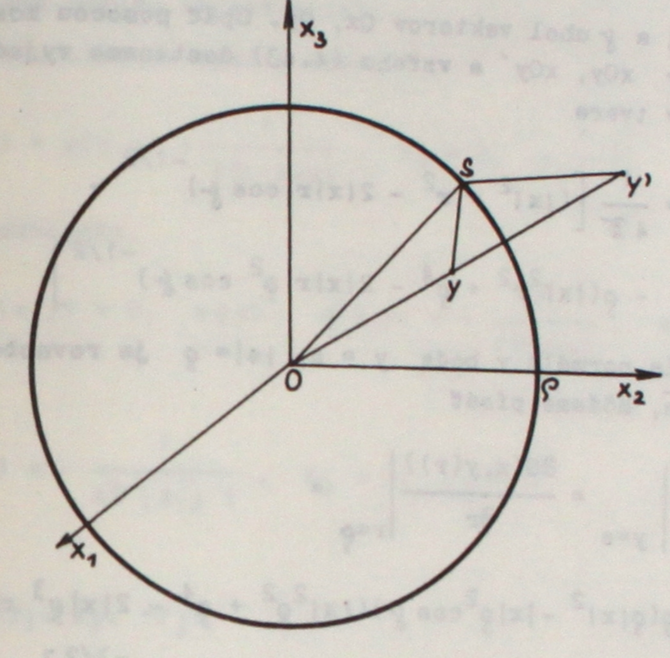
$$|s-y|^2 = \varrho^2 + |y|^2 - 2\varrho|y|\cos\varphi$$

$$|s-y'|^2 = \varrho^2 + |y'|^2 - 2\varrho|y'|\cos\varphi \quad \text{(pozri obr. 12)}$$

a použitím (4.43) dostaneme vyjadrenie

$$|s-y| = \frac{|y|\,|s-y'|}{\varrho}$$

pre každý bod $s \in S_\varrho$.



Obr. 12
Hľadanie Greenovej funkcie pre vnútro gule pomocou inverzného bodu

Potom funkcia $g(.,y)$ daná predpisom

$$g(x,y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\varrho}{|y|\,|x-y'|}$$

je riešením okrajovej úlohy (4.40), (4.41) a hľadaná Greenova funkcia má tvar:

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{|x-y|} - \frac{\varrho}{|y|\,|x-y'|}\right] \tag{4.44}$$

$$x \neq y, \quad |x| < \varrho, \quad |y| < \varrho$$

Uvažujme teraz Dirichletovu okrajovú úlohu pre Laplaceovu rovnicu v guli K_ϱ:

$$\Delta u(x) = 0, \quad |x| < \varrho \tag{4.45}$$

$$u(s) = g(s), \quad |s| = \varrho \tag{4.46}$$

Riešenie u môžeme podľa (4.30) vyjadriť v tvare

$$u(x) = -\int_{|s|=\varrho} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n}\Bigg|_{y=s} g(s)ds, \quad |x|<\varrho \qquad (4.47)$$

Označme $r = |y|$ a γ uhol vektorov Ox, Oy. Opäť pomocou kosínusovej vety pre trojuholníky xOy, xOy′ a vzťahu (4.43) dostaneme vyjadrenie Greenovej funkcie (4.44) v tvare

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi}\Big[(|x|^2 + r^2 - 2|x|r\cos\gamma)^{-1/2} - \varrho(|x|^2r^2 + \varrho^4 - 2|x|r\,\varrho^2\cos\gamma)^{-1/2}\Big]$$

Pretože vonkajšia normála v bode $y = s$, $|s| = \varrho$ je rovnobežná s rádiusovým vektorom $\bar{r} = \overline{Os}$, môžeme písať

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial n}\Bigg|_{y=s} = \frac{\partial G(x,y(r))}{\partial r}\Bigg|_{r=\varrho} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\Big[\varrho(\varrho|x|^2 - |x|\varrho^2\cos\gamma)(|x|^2\varrho^2 + \varrho^4 - 2|x|\varrho^3\cos\gamma)^{-3/2} - (\varrho - |x|\cos\gamma)(|x|^2 + \varrho^2 - 2|x|\varrho\cos\gamma)^{-3/2}\Big] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varrho}(|x|^2 - \varrho^2)(|x|^2 + \varrho^2 - 2|x|\varrho\cos\gamma)^{-3/2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varrho}\,\frac{|x|^2 - \varrho^2}{|x-s|^3}$$

a riešenie okrajovej úlohy (4.45), (4.46) pre guľu polomeru ϱ môžeme vyjadriť v tvare Poissonovej integrálnej formuly

$$u(x) = \frac{\varrho^2 - |x|^2}{4\pi\varrho}\int_{|s|=\varrho}\frac{g(s)}{|x-s|^3}\,ds \qquad (4.48)$$

Špeciálne pre stred gule dostávame vzťah

$$u(0) = \frac{1}{4\pi\varrho^2}\int_{|s|=\varrho} g(s)ds \qquad (4.49)$$

čo vyjadruje ten fakt, že potenciálová funkcia u nadobúda v strede ľubovoľnej gule priemernú hodnotu z hodnôt na jej povrchu.

Príklad 4.2. Na hľadanie Greenovej funkcie pre Dirichletovu úlohu na polpriestore

$$\Omega = \left\{x \in R^3 : x_3 > 0\right\}$$

použijeme metódu odrazu (zrkadlenia).

Greenovu funkciu hľadáme opäť v tvare

$$G(x,y) = g(x,y) + \frac{1}{4\pi|x-y|}, \quad x_3 > 0, \quad y_3 > 0$$

Aby platili podmienky

$$\Delta_x\, g(x,y) = 0, \quad x \in \Omega\,; \quad g(x,y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|}, \quad \text{ak} \quad y_3 = 0$$

položíme

$$g(x,y) = -\frac{1}{4\pi|x-y'|}, \quad x_3 > 0, \quad y_3 > 0$$

kde

$$y' = (y_1, y_2, -y_3)$$

je bod symetrický k bodu $y = (y_1, y_2, y_3)$ podľa roviny $y_3 = 0$.

Greenova funkcia má potom tvar

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y'|}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3+y_3)^2}}\right]$$

Riešenie Dirichletovej okrajovej úlohy

$$u(x) = 0, \quad x \in R^3, \quad x_3 > 0 \qquad (4.50)$$

$$u(x_1, x_2, 0) = h(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in R^2 \qquad (4.51)$$

vyjadríme v tvare

$$u(x) = \iint_{R^2}\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_3}\Bigg|_{y_3=0} h(y_1,y_2)dy_1dy_2, \quad x_3 > 0$$

Integrál je s kladným znamienkom, pretože vonkajšia normála k hranici oblasti Ω má smer opačný ako os O_{y_3}.

Po zderivovaní Greenovej funkcie v poslednom integrále dostaneme riešenie v tvare

$$u(x) = \frac{x_3}{2\pi} \iint_{R^2} \frac{h(y_1,y_2)}{\left[\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + x_3^2}\,\right]^3}\, dy_1 dy_2, \quad x_3 > 0 \qquad (4.52)$$

Nevlastný integrál (4.52) konverguje napríklad pre všetky funkcie h ohraničené na množine R^2.

V prípade priestoru R^2 postupujeme podobným spôsobom. Greenova funkcia pre Laplaceov operátor má tvar

$$G(x,y) = g(x,y) + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}\,; \quad x, y \in \Omega, \quad x \neq y \qquad (4.53)$$

kde funkcia g je riešením úlohy

$$\Delta_x\, g(x,y) = 0, \quad x \in \Omega \qquad (4.54)$$

$$\alpha(s) \left.\frac{\partial g(.,y)}{\partial n}\right|_{x=s} + \beta(s) g(s,y) = \qquad (4.55)$$

$$= -\alpha(s) \frac{\partial}{\partial n} \left.\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}\right|_{x=s} + \beta(s) \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|s-y|}, \quad s \in \partial\Omega$$

<u>Príklad 4.3.</u> Máme zostrojiť Greenovu funkciu Dirichletovej okrajovej úlohy pre prvý kvadrant roviny R^2, t.j. pre oblasť

$$\Omega = \left\{ x \in R^2 : x_1 > 0, \quad x_2 > 0 \right\}$$

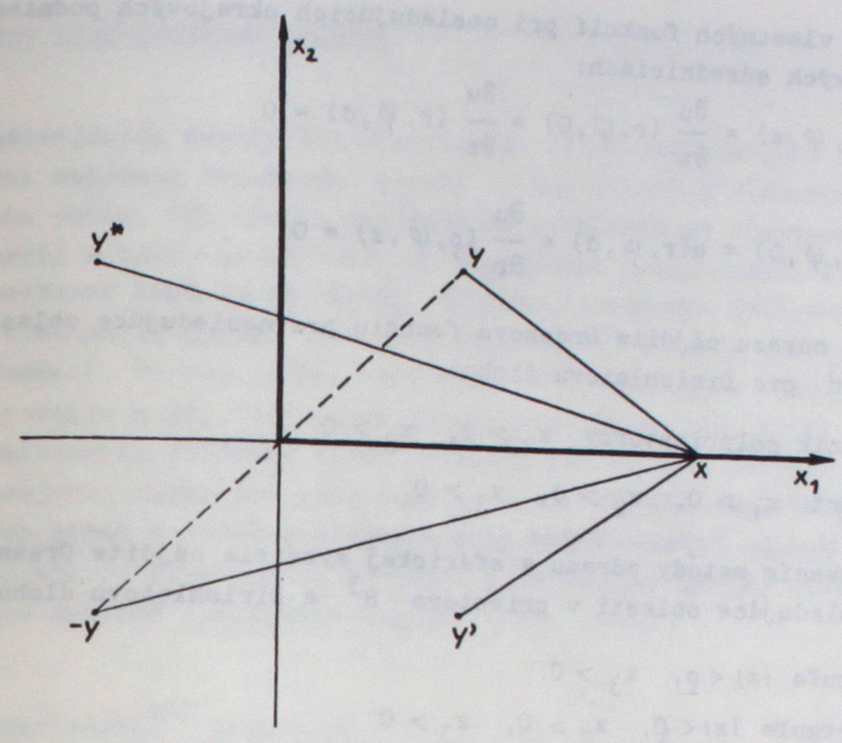
Postupujeme metódou odrazu, porobne ako v príklade 4.2. Využitím symetrie (pozri obr. 13) dostaneme Greenovu funkciu tvaru

$$G(x,y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{|x-y|} - \ln \frac{1}{|x-y'|} - \ln \frac{1}{|x-y^*|} + \ln \frac{1}{|x+y|} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|x-y'|\,|x-y^*|}{|x-y|\;|x+y|}$$

kde $y = (y_1, y_2)$, $y' = (y_1, -y_2)$, $y^* = (-y_1, y_2)$, $y_1 > 0$, $y_2 > 0$.



Obr. 13
Hľadanie Greenovej funkcie pre prvý kvadrant metódou odrazu

4.4 Úlohy

1. Vyjadrite Greenovu funkciu pre Laplaceov operátor na obdĺžniku $(0,a) \times (0,b)$ v tvare Fourierovho radu podľa ortonormálneho systému vlastných funkcií pri nasledujúcich okrajových podmienkach:

   a) $u(x,0) = u(x,b) = u(0,y) = u(a,y) = 0$

   b) $u(0,y) = u(a,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,b) = 0$

   c) $u(x,b) = u(a,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0$

2. Vyjadrite Greenovu funkciu pre Laplaceov operátor s homogénnou Dirichletovou okrajovou podmienkou na hranici $\partial\Omega$ oblasti Ω v tvare Fourierovho radu podľa ortonormálneho systému vlastných funkcií, ak

   a) Ω je kruh s polomerom ϱ v rovine R^2

   b) Ω je guľa s polomerom ϱ v priestore R^3

3. Vyjadrite Greenovu funkciu pre Laplaceov operátor na valci polomeru základne ϱ a výšky d v tvare Fourierovho radu podľa ortonormálneho

systému vlastných funkcií pri nasledujúcich okrajových podmienkach v cylindrických súradniciach:

a) $u(\rho,\varphi,z) = \dfrac{\partial u}{\partial z}(r,\varphi,0) = \dfrac{\partial u}{\partial z}(r,\varphi,d) = 0$

b) $u(r,\varphi,0) = u(r,\varphi,d) = \dfrac{\partial u}{\partial r}(\rho,\varphi,z) = 0$

4. Metódou odrazu nájdite Greenovu funkciu pre nasledujúce oblasti v priestore R^3 pre Dirichletovu úlohu:

a) Prienik polpriestorov $x_2 > 0,\ x_3 > 0$

b) Oktant $x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0$

5. Kombinovaním metódy odrazu a sférickej symetrie nájdite Greenovu funkciu pre nasledujúce oblasti v priestore R^3 a Dirichletovu úlohu:

a) Polguľa $|x| < \rho,\ x_3 > 0$

b) Štvrťguľa $|x| < \rho,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0$

c) Osmina gule $|x| < \rho,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0$

6. Odvoďte formulu

$$u(x) = u(x_1,x_2) = \frac{x_2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(y_1)}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+x_2^2}}\,dy_1,\quad x_2 > 0 \tag{4.56}$$

pre riešenie Dirichletovej okrajovej úlohu

$$u(x) = 0,\quad u(x_1,0) = h(x_1),\ x_1 \in R,\quad x_2 > 0 \tag{4.57}$$

za predpokladu konvergencie integrálu (4.56).

7. Riešte okrajovú úlohu (4.57), ak

a) $h(x_1) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x_1 \in (a,b) \\ 0, & \text{ak } x_1 \notin (a,b) \end{cases}$

b) $h(x_1) = \dfrac{1}{x_1^2 + 1}$

c) $h(x_1) = \dfrac{1}{x_1^4 + 1}$

8. Riešte okrajovú úlohu (4.54), (4.55), ak

a) $h(x_1,x_2) = (1 + x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}$

b) $h(x_1,x_2) = x_1\, x_2\, (1 + x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}$

§5. METÓDY FUNKCIONÁLNEJ ANALÝZY

V predchádzajúcich kapitolách sme riešili eliptické okrajové úlohy tzv. klasickými metódami založenými hlavne na poznatkoch z diferenciálneho a integrálneho počtu. Pri týchto metódach sa prihliada na vlastnosti jednotlivých funkcií z istej triedy určenej okrajovými podmienkami. V tejto časti budeme uvažovať funkcie ako prvky určitého lineárneho priestoru a ich jednotlivé vlastnosti budeme brať do úvahy len vo vzťahu k celej triede uvažovaných funkcií. To nám umožní abstrahovať od niektorých vlastností diferenciálnej rovnice a jej riešenia a zamerať sa len na tie, ktoré sú rozhodujúce pre existenciu riešenia úlohy. Hlavným cieľom bude zaviesť taký typ riešenia okrajovej úlohy pre eliptickú rovnicu, aby pre dostatočne širokú triedu pravých strán a oblastí riešenia bolo možné dokázať nielen jeho jednoznačnosť, ale aj existenciu. Odvodíme aj približné metódy riešenia vedúce k riešeniu systému lineárnych algebraických rovníc.

5.1 Hilbertovské[25] priestory

V časti 1.2 sme zaviedli pojem skalárneho súčinu funkcií v priestore $L_2(\Omega)$. Skalárny súčin možno zaviesť aj pre iné triedy funkcií. Zavedieme ho abstraktným spôsobom.

Definícia 5.1. Lineárny priestor H sa nazýva priestor so skalárnym súčinom, ak existuje funkcia dvoch premenných $(.,.) : H \times H \to R$ s vlastnosťami:

(i) $(u,v) = (v,u)$

(ii) $(u+v,w) = (u,w) + (v,w)$

(iii) $(\alpha u,v) = \alpha(u,v)$

(iv) $(u,u) \geq 0$; $(u,u) = 0$ práve vtedy, ak $u = \overline{0}$

pre všetky prvky $u,\ v,\ w \in H$ a čísla $\alpha \in R$.

Funkcia $(.,.)$ sa nazýva skalárny súčin a číslo (u,v) skalárny súčin prvkov $u,\ v \in H$.

---

25) HILBERT David (1862-1943), nemecký matematik. V svojom diele dovŕšil axiomatizáciu euklidovskej geometrie. Zovšeobecnil euklidovský priestor na nekonečnorozmerný prípad. Riešil aj problémy matematickej analýzy a v súvislosti s Dirichletovou úlohou rozvíjal metódy variačného počtu. Vytvoril významné matematické centrum v Göttingene.