

Príklady z parciálnych diferenciálnych rovníc.

1. Riešte úlohy na vlastné hodnoty a vlastné funkcie:

- a) $y''(x) + \lambda y(x) = 0$, $0 < x < 4$, $y(0) = y(4) = 0$
- b) $y''(x) + \lambda y(x) = 0$, $0 < x < 4$, $y'(0) = y'(4) = 0$
- c) $y''(x) + \lambda y(x) = 0$, $0 < x < 4$, $y(0) = y'(4) = 0$
- d) $y''(x) + \lambda y(x) = 0$, $0 < x < 4$, $y'(0) = y(4) = 0$
- e) $y''(x) + \lambda y(x) = 0$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$
- f) $y''(x) + \lambda y(x) = 0$, $0 < x < 1$, $y(0) + y'(0) = 0$, $y(1) = 0$

2. Riešte úlohy na vlastné hodnoty a vlastné funkcie

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad y'(0) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

a rozložte funkciu $f(x) = x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ do Fourierovho radu podľa systému vlastných funkcií (a napíšte o aký typ konvergenzie sa jedná).

3. Riešte úlohy na vlastné hodnoty a vlastné funkcie

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

a rozložte funkciu $f(x) = x - x^2$, $0 < x < 1$ do Fourierovho radu podľa systému vlastných funkcií (a napíšte o aký typ konvergenzie sa jedná).

4. Riešte úlohy na vlastné hodnoty a vlastné funkcie

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad y(0) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

a rozložte funkciu $f(x) = x^2 - \pi x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ do Fourierovho radu podľa systému vlastných funkcií (a napíšte o aký typ konvergenzie sa jedná).

Eliptické okrajové úlohy:

1. Riešte okrajovú úlohu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(0, y) = \frac{\partial u(1, y)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = x.$$

2. Riešte okrajovú úlohu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(0, y) = \frac{\partial u(2, y)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = x.$$

3. Riešte okrajovú úlohu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(0, y) = \frac{\partial u(1, y)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 1)}{\partial y} = x.$$

4. Riešte okrajovú úlohu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(0, y) = u(1, y) = 0, \quad u(x, 0) = x^2 - x, \quad u(x, 1) = 0.$$

5. Riešte okrajovú úlohu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(0, y) = u(1, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = \sin \pi x.$$

6. Riešte okrajovú úlohu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(0, y) = \cos^2 \frac{\pi y}{2} - \cos \frac{\pi y}{2}, \quad u(1, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 0.$$

7. Riešte okrajovú úlohu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = \sin \pi x \cos \pi y, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 0.$$

8. Riešte okrajové úlohy:

$$-\Delta u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

pre prieťah štvorcovej membrány $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, ak

a) $f(x, y) = 0, 1x(1-x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$

b) $f(x, y) = 0, 1x(1-x), \quad u(0, y) = u(1, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0,$

c) $f(x, y) = 0, 1 \cos \pi x \cos \pi y, \quad u(x, 1) = u(1, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0.$

9. Riešte Dirichletovu okrajovú úlohu:

$$-\Delta u = f(r, \varphi), \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

pre prieťah kruhovej membrány Ω s polomerom ρ , ak

a) $f(r, \varphi) = A \cos \frac{\varphi}{2},$

b) $f(r, \varphi) = Ar^2.$