

T=70 N=100

Maliny dozrievajú v časovom období $[0, T]$ dní a ich zrelosť vydrží presne 10 dní. V čase 0 včely hlásili presne N úspešne opelených kvetov. Moment začiatku zrelosti konkrétnej maliny je náhodná veličina určená funkciou hustoty:

$$f = a \cdot (1 - b \cdot (x - T/2)^2) \text{ na } [0, T], \text{ inde } 0.$$

a) Určte konštanty a, b tak, aby f bola spojitá a v súlade s požiadavkami na funkciu hustoty.

Spojitosť musíme zariadiť v bodoch 0 a 70, tam by f mala mať hodnotu 0.

Musí platiť:

$$\begin{aligned} a \cdot (1 - b \cdot 35^2) &= 0 && // \text{delím číslom } a, \text{ lebo } a \text{ nemôže byť nulové} \\ 1 - b \cdot 35^2 &= 0 \\ b &= 1/35^2 = 1/1225 \end{aligned}$$

Teraz zistíme a :

```
>> f=inline('1-(x-35).^2/1225')
>> format rat
>> cm=quad(f,0,70)

cm =    140/3
```

Hodnota a musí byť $3/140$:

```
>> f=inline('3/140*(1-(x-35).^2/1225)')
```

////////////////////////////////////
b) Aká je pravdepodobnosť, že vybraná malina bude v čase $t=T/2$ zrelá?

```
>> p=quad(f,25,35)

p =    0.2085
```

////////////////////////////////////
c) Aká je pravdepodobnosť, že v čase $t= T/2$ bude zrelých viac ako štvrtina malín?

Viac ako štvrtina, to je 26 až 100. Vyrátame najprv pravdepodobnosť toho, že bude zrelých 0 až 25, a získanú hodnotu potom odrátame od 1:

```
>> su=0; fa=factorial(100);
for k=0:25, q=fa/factorial(100-k)/factorial(k)*p^k*(1-p)^(100-k); su=su+q; end, su

su =    0.8729
```

```
>> P=1-su
```

```
P =    0.1271
```

d) V ktorý deň sa dá očakávať najviac zreých malín?

Ak je deň celočíselný interval a my celý deň striehneme na zrelé maliny, zachytíme všetky tie, čo dozreli 10 dní pred začiatkom hľadaného dňa a aj tie, ktoré dozreli počas hľadaného dňa.

```
>> zm=[]; for k=11:80, d=quad(f,k-11,k);zm=[zm,d];end
>> [v,w]=max(zm)
```

$$\begin{aligned} v &= 0.2337 \\ w &= 30 \end{aligned}$$

Najviac zreých malín sa dá očakávať na 40ty deň (30ta položka vo vektore zm je 40ty deň). Pohľad na hodnoty zm v array editore navyše prezradí, že na 41. deň to bude rovnako.

.....

T=70 **N=100**

Maliny dozrievajú v časovom období $[0, T]$ dní a ich zrelosť vydrží presne 10 dní. V čase 0 včely hlásili presne N úspešne opelených kvetov. Moment začiatku zrelosti konkrétnej maliny je náhodná veličina určená funkciou hustoty:

$$f = a \cdot b \cdot (x - T/2)^2 \text{ na } [0, T], \text{ inde } 0.$$

a) Určte konštanty a, b tak, aby f bola spojitá a v súlade s požiadavkami na funkciu hustoty.

Spojitosť musíme zariadiť v bodoch 0 a 70, tam by f mala mať hodnotu 0. Označme $c=b/a$. Musí platiť:

$$\begin{aligned} a \cdot (1 - c \cdot 35^2) &= 0 && // \text{delím číslom } a, \text{ lebo } a \text{ nemôže byť nulové} \\ 1 - c \cdot 35^2 &= 0 \\ c &= 1/35^2 = 1/1225 \end{aligned}$$

Teraz zistíme a :

```
>> f=inline('1-(x-35).^2/1225')
>> format rat
>> cm=quad(f,0,70)
```

```
cm = 140/3
```

Hodnota a musí byť $3/140$. Hodnota b je $c \cdot a = 3/140/1225 = 3/171500$

```
>> f=inline('3/140-3/171500*(x-35).^2')
```

////////////////////////////////////
b) Aká je pravdepodobnosť, že vybraná malina v čase $t=T/2$ ešte nebude zrelá?

```
>> p=1-quad(f,25,35)
```

```
p = 0.7915
```

////////////////////////////////////
c) Aká je pravdepodobnosť, že v čase $t= T/2$ bude zreých menej ako štvrtina malín?

Menej ako štvrtina, to je 0 až 24 zreých.

```
>> p=quad(f,25,35)
```

```
p = 0.2085
```

```
>> su=0; fa=factorial(100);
for k=0:24, q=fa/factorial(100-k)/factorial(k)*p^k*(1-p)^(100-k); su=su+q; end, su
```

```
su = 0.8172
```

d) Určte týždeň, v ktorom sa dá očakávať najviac zreých malín.

```
>> zm=[]; for k=10:73, q=quad(f,k,k+7); zm=[zm,q]; end
```

	20	21	22	23	24	25
3	0.1487	0.1492	0.1495	0.1495	0.1492	0.1487

Ide teda o týždne okolo stredu intervalu (35), čo je očakávateľný výsledok.

T=12

Vzácný horský kvet rozkvitá v časovom období $[0, T]$ dní. Moment otvorenia konkrétneho kvetu je náhodná veličina určená funkciou hustoty:

$$f = c \cdot (Tx - x^2)^{1/2} / \pi \quad \text{na } [0, T], \text{ inde } 0.$$

Kvet je otvorený aj v noci a presne 5 dní po rozkvitnutí kvet okamžite zvädne. V čase 0 bolo na lúke presne 90 pukov.

a) Určte konštantu c tak, aby f vyhovovala základným požiadavkám na funkciu hustoty.

```
>> f=inline('(12*x-x.^2).^(1/2)/pi');  
>> a=quad(f,0,12)  
a = 18.0000
```

```
>> f=inline('(12*x-x.^2).^(1/2)/pi/18');
```

////////////////////////////////////
b) Koľko kvetov by mohlo byť v čase **T** ešte otvorených? (najpravdepodobnejší scenár)

Pravdepodobnosť, že kvet bude v čase 12 otvorený, je to isté ako pravdepodobnosť, že rozkvitol niekedy v rozmedzí 7-12:

```
>> p=quad(f,7,12)  
  
p = 0.3944
```

Dá sa preto očakávať, že v čase 12 nájdeme

```
>> p*110  
  
ans = 43.3824
```

s najväčšou pravdepodobnosťou 43 rozkvitnutých kvetov.

////////////////////////////////////

c) V priebehu ktorého dňa (celočíselný interval dĺžky 1) možno očakávať najviac odkvitnutí?

Kvet odkvitá presne 5 dní po rozkvitnutí, takže deň, v ktorom odkvitne najviac kvetov, nasleduje 5 dní po tom dni, keď rozkvitlo najviac kvetov. Budeme hľadať ten; vzhľadom na priebeh funkcie f vieme, že by mal byť kdesi v strede intervalu:

```
>> quad(f,4,5), quad(f,5,6), quad(f,6,7), quad(f,7,8)  
  
ans = 0.1026  
ans = 0.1056  
ans = 0.1056  
ans = 0.1026
```

Takže najrozkvitnutejšie dni sú [5,6], [6,7], tj. šiesty a siedmy deň. Najviac odkvitnutí zaregistrujeme preto v 11ty a 12ty deň.

////////////////////////////////////
d) Včely zbierajú nektár na 6ty a 12ty deň. Aká je pravdepodobnosť, že takto „vybavia“ spolu aspoň 80 kvetov?

Pravdepodobnosť, že v 6ty alebo 12ty deň bude kvet kvitnúť, je

```
>> p=quad(f,1,6)+quad(f,7,12)
```

```
p = 0.8546
```

Pravdepodobnosť, že zo 110 bude „obslužených“ aspoň 80 (tj. 80 až 90), zistíme z binomického rozdelenia – členov je málo, preto nebudeme vo vzorci šetriť:

```
>> su=0; fa=factorial(90);  
    for k=80:90, q=fa/factorial(90-k)/factorial(k)*p^k*(1-p)^(90-k); su=su+q; end, su
```

```
su = 0.2238
```

Pravdepodobnosť je cca. 22,4 percenta.

.....

T=12

Vzácný horský kvet rozkvitá v časovom období $[0, T]$ dní, avšak nikdy nie v noci. Moment otvorenia konkrétneho kvetu je náhodná veličina určená funkciou hustoty:

$$f = c \cdot (Tx - x^2)^{1/2} / \pi \quad \text{na } [k, k+0.5], \text{ kde } k=0, \dots, T-1; (\text{inde } 0).$$

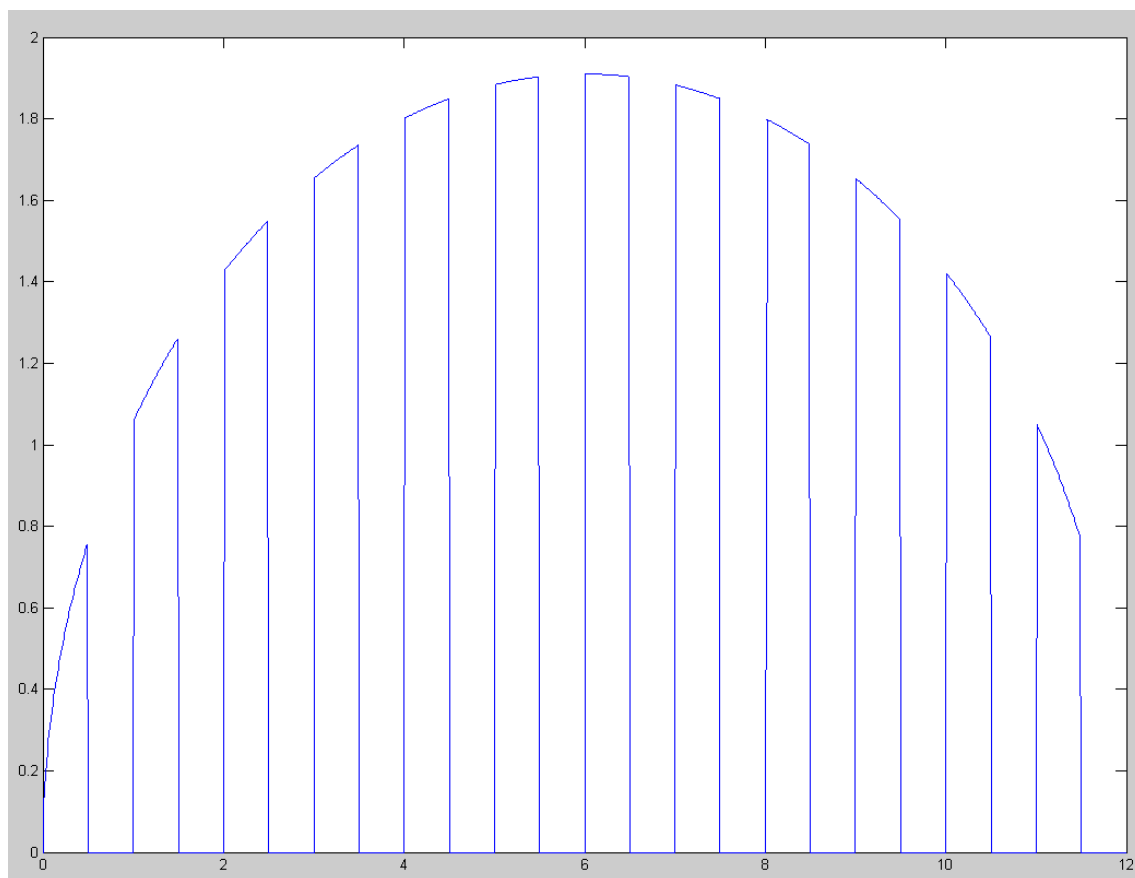
Po rozkvitnutí je kvet otvorený stále a presne 5 dní, potom okamžite zvädne. V čase 0 (=svitanie prvého dňa) bolo na lúke presne 110 pukov (každý rozkvitne).

a) Určte konštantu c tak, aby f vyhovovala základným požiadavkám na funkciu hustoty.

Funkciu f definujeme ako inline objekt. Ak má x za desatinnou bodkou hodnotu viac ako 0.5, ceil-round dáva požadovanú nulu, inak je to 1.

```
>> f=inline('sqrt(12*x-x.^2).*(ceil(x)-round(x))/pi');
```

Bude veľmi užitočné nakresliť si jej graf. Zvislé čiary by po správnosti v grafe nemali byť, ale hodia sa nám kvôli orientácii v rovine.



Všimnime si zvláštnu „symetriu“ okolo osi $y=6$. Stĺpcu vľavo zodpovedá vždy rovnako široká medzera vpravo a naopak. Je zrejmé, že integrál funkcie f na danom intervale je polovicou integrálu funkcie

```
f0=inline('sqrt(12*x-x.^2)/pi');
```

Overme si to:

```
>> quad(f0,0,12)
ans = 18.0000

>> quad(f,0,12)
ans = 9.0000
```

Opravme teraz parametre funkcie:

```
>> f=inline('sqrt(12*x-x.^2).*(ceil(x)-round(x))/pi/9');
```

```
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
```

b) V ktorom momente sa dá očakávať najviac rozkvitnutých kvetov?

Kvety kvitnú presne 5 dní. Odpustíme si náročné výpočty – pozorný pohľad do obrázku ukazuje, že 5 dňový interval zahŕňa v sebe 5 „líšt“ z plota, alebo 4 celé lišty a dve časti. Najvyššie lišty sú tie najbližšie k stredu, evidentne najväčším ziskom je vziať dve lišty zľava a tri sprava od stredu $y=6$. Najviac kvetov na lúke teda bude pochádzať z intervalov 4-4.5, 5-5.5, 6-6.5, 7-7.5, 8-8.5. Ich počet je:

```
>> quad(f,4,8.5)
ans = 0.5147
```

Najviac kvetov na lúke možno očakávať od momentu 8.5 a tento stav pretrvá až do bodu 9.

```
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
```

c) Aká je pravdepodobnosť, že (večer) v čase **T/2+1.5** bude aspoň 80 kvetov rozkvitnutých?

Pravdepodobnosť kvitnutia jedného kvetu v danom momente je

```
>> p=quad(f,2.5,7.5)
p = 0.5107
```

Aspoň 80 znamená 80 až 110. Použijeme binomické rozdelenie a keďže čísel nie je veľa, budeme leniví a rozpíšeme to priamo bez rekurentného šetrenia:

```
>> su=0; fa=factorial(110);
    for k=80:110, q=fa/factorial(110-k)/factorial(k)*p^k*(1-p)^(110-k); su=su+q; end, su
su = 2.9274e-006
```

Pravdepodobnosť je v skutku mizerná...

d) Včely chodia zbierať nektár na dotýčnú líuku dvakrát (ale z každého kvetu sa dá vziať len raz za jeho život). V aké dva dni by mali ísť, aby nazbierali toho čo najviac?

(5.5,6) a (10.5,11)

[illegible]