

Okrajové úlohy pre eliptické rovnice:

- (1) Riešte okrajové úlohy

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

a) $u(0, y) = A \sin \frac{\pi y}{b}, \quad u(a, y) = u(x, 0) = u(x, b) = 0$

Návod: Dosadíte do rovnice funkciu $u(x, y) = X(x) \sin \frac{\pi y}{b}$ ktorá spĺňa okrajové podmienky pre $y = 0, y = b$ a riešte vhodnú okrajovú úlohu pre obyčajnú dif. rovnicu 2. rádu s neznámou funkciou $X(x)$. Použite hyperbolické funkcie.

b) $u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad u(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{a}, \quad u(x, b) = 0$

c) $u(0, y) = A \sin \frac{\pi y}{b}, \quad u(a, y) = 0, \quad u(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{a}, \quad u(x, b) = 0$

Návod: Sčítajte riešenia a), b).

- (2) Fourierovou metódou riešte okrajové úlohy

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

a) $u(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = x$

b) $u(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = x$

c) $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = u(1, y) = 0, \quad u(0, y) = y^2$

d) $u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \quad u(0, y) = \sin \pi y, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 1.$

- (3) Fourierovou metódou riešte okrajové úlohy

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < \pi,$$

a) $u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, \pi) = u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = y$

b) $\frac{\partial u}{\partial y}u(x, 0) = u(x, \pi) = u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(2, y) = y$

c) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(2, y) = u(x, \pi) = 0, \quad u(x, 0) = \sin x$

Návod: Pri integrovaní použite vzorec $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin \frac{\alpha+\beta}{2} + \sin \frac{\alpha-\beta}{2})$.

d) $u(0, y) = u(2, y) = 0, \quad u(x, 0) = u(x, \pi) = x^2 - 2x.$

- (4) Riešte okrajové úlohy pomocou polárnych súradníc

$$\Delta u = 0, \quad r^2 = x^2 + y^2 < 4.$$

a) $u(2, \phi) = 1$

Návod: Riešte okrajovú úlohu $(ru'(r))' = 0, \quad 0 < r < 2,$

$|u(r)| < \infty, \quad u(2) = 1.$

b) $u(2, \phi) = \phi^2 - 2\pi\phi$

Návod: Použite Fourierovu metódu a integráciu per partes.

c) $u(2, \phi) = |\sin \phi|$

- (5) Riešte okrajové úlohy

$$\Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 < 1, \quad y > 0.$$

a) $u(x, 0) = 0, \quad u(x, \sqrt{1-x^2}) = 1 - x^2$

b) $u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}u(x, \sqrt{1-x^2}) = 1,$

kde $\vec{n} = \vec{r}$ je jednotkový vektor vonkajšej normály.

(6) Riešte okrajové úlohy

$$\Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 < 4, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

a) $u(x, 0) = u(0, y) = 0, \quad u(x, \sqrt{4 - x^2}) = x (= 2 \cos \phi)$

b) $u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad u(x, \sqrt{4 - x^2}) = 1$

(7) Riešte okrajové úlohy

$$\Delta u = 0, \quad 1 < x^2 + y^2 < 4, \quad y > 0.$$

a) $u(x, 0) = 0, \quad u(x, \sqrt{1 - x^2}) = 1, \quad u(x, \sqrt{4 - x^2}) = 2$

b) $u(x, 0) = 0, \quad u(x, \sqrt{1 - x^2}) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x, \sqrt{4 - x^2}) = 1$

(8) Riešte Dirichletove okrajové úlohy

$$\Delta u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

pre priehyb kruhovej membrány Ω s polomerom $a > 0$, ak

a) $f(x, y) = A(x^2 + y^2)$

b) $f(x, y) = Axy$.

Návod: Vyjadrite rovnicu v polárnych súradniciach.

Hľadajte radiálne symetrické riešenie (nezávislé na uhlovej premennej)

v Príklade a).

Nájdite riešenie $w = br^4 \sin 2\phi$ danej rovnice v Príklade b) a vyjadrite hľadané riešenie v tvare $u = v + w$, kde v je riešenie Dirichletovej okrajovej úlohy $\Delta v = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = -w|_{\partial\Omega}$.

(9) Riešte úlohy na vlastné hodnoty a vlastné funkcie

$$\Delta u(x, y) + \lambda u(x, y) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 2,$$

s okrajovými podmienkami

a) $u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = u(x, 2) = 0,$

b) $u(0, y) = u(\pi, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 2) = 0,$

c) $u(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = u(x, 2) = 0,$

(10) Riešte okrajové úlohy

$$-\Delta u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$

pre priehyb štvorcovej membrány $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, ak

a) $f(x, y) = 1, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$

b) $f(x, y) = 1, \quad u(0, y) = u(1, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0,$

c) $f(x, y) = xy, \quad u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0.$

Návod: Vyjadrite riešenie v tvare dvojného Fourierovho radu podľa úplného ortogonálneho systému vlastných funkcií úlohy $\Delta u + \lambda u = 0$ s príslušnými homogénnymi okrajovými podmienkami.

(11) Riešte okrajové úlohy $-\Delta u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$

pre priehyb obdĺžnikovej membrány $\Omega = (0, \pi) \times (0, 1)$, ak

a) $f(x, y) = x, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$

b) $f(x, y) = y, \quad u(0, y) = u(\pi, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0,$

c) $f(x, y) = y \sin x, \quad u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = 0.$