Vlnová rovnica na konečnom intervale.

Kmitajúca struna dĺžky l - interval pre x: $x \in I = \langle 0, l \rangle$

čas $t \geq 0$

Výchylka $u(x,t)$

Rovnica zostáva nezmenená

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

Začiatočné podmienky zostávajú nezmenené.

Na rozdiel od neohraničenej struny pribudnú okrajové podmienky.

Tieto sú dané v krajných bodoch intervalu I, pri tomto označení

v bode $x_0 = 0$ a v bode $x_1 = l$.

Okrajové podmienky môžu byť rôzneho typu

Dirichletove podmienky.

Predpokladáme, že struna je na oboch koncoch intervalu I upevnená

Vtedy má úloha podobu

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$u(0,t) = 0 \qquad u(l,t) = 0$ Okrajové podmienky

$u(x,0) = \varphi(x) \qquad u_t(x,0) = \psi(x)$ Začiatočné podmienky

Metóda separácie.

Hľadáme riešenie v tvare súčinu dvoch funkcií jednej premennej

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

Derivácie sú $\quad u_{tt} = X \cdot T''$

$\qquad u_{xx} = X'' \cdot T$

Rovnica
$$XT'' = c^2 X'' T$$
$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}$$

Aby sa mohli rovnať dve funkcie v rôznych premenných definované na rôznych intervaloch, a to $\forall x \in \langle 0, \ell \rangle$ a $\forall t \in \langle 0, \infty)$, jedinou možnosťou je, že obe sú konštantné. Konštantu nazvime λ. Z technických dôvodov použijeme $-\lambda$

$$\frac{X''}{X} = -\lambda \qquad \text{aj} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = -\lambda$$

Dostávame teraz dve obyčajné diferenciálne rovnice

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad \text{a} \qquad T'' + \lambda c^2 T = 0$$

Riešme 1. (Vlastné čísla rovnice označme ako μ)

$\mu^2 + \lambda = 0$ Charakteristická rovnica

$\mu_{12} = \pm\sqrt{-\lambda}$

Tri možnosti

c, ak $\lambda < 0$ μ_1, μ_2 sú reálne

$$X(x) = A \cdot e^{\mu_1 x} + B \cdot e^{\mu_2 x}$$

b, ak $\lambda = 0$ $\mu_{12} = 0$

$$X(x) = A + Bx$$

a, ak $\lambda > 0$ μ_1, μ_2 sú komplexne združené $\pm i\sqrt{\lambda}$

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

Priberme okrajové podmienky

$$0 = u(0,t) = X(0) \cdot T(t) \qquad 0 = u(\ell,t) = X(\ell)\, T(t)$$

Ak by bol nulový činiteľ $T(t)$ $(\forall t \in \langle 0, \infty))$ tak by sme dostali len nulové riešenia

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) = 0$$

Predpokladajme, že $T(t) \not\equiv 0$. Potom ale

$$X(0) = 0 \qquad \text{aj} \qquad X(\ell) = 0$$

Ak tieto dve podmienky pridáme k rovnici pre $X(x)$, tak v prípade c, aj b, dostaneme len nulové riešenie $X(x) \equiv 0$.
(A sme tam, kde sme boli: $u(x,t) \equiv 0$)
Riešenie, ktoré nie je identicky nulové dostaneme len pre prípad a, keď $\lambda > 0$

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x$$
$$X(0) = A = 0$$
$$X(l) = B\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$$

Aby sme nedostali opäť identickú 0 musí byť $B \neq 0$.

$$\sqrt{\lambda}\,l = k\pi$$
$$\lambda = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$$

Dostávame riešenia typu

$$X_k(x) = B_k \sin\frac{k\pi}{l}x \qquad k \in N$$

Riešme teraz druhú rovnicu

$$T'' + \lambda c^2 T = 0 \qquad \lambda > 0$$

a už uvažujeme len

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$$

$$T_k'' + \left(\frac{k\pi c}{l}\right)^2 T = 0$$

$\mu^2 + \left(\frac{k\pi c}{l}\right)^2 = 0$ je charakteristická rovnica a $\mu_{1k,2k} = \pm i\,\frac{k\pi c}{l}$

$$T_k(t) = C_k \sin\frac{k\pi c}{l}t + D_k \cos\frac{k\pi c}{l}t$$

Pre každé $k \in N$ máme riešenie vlnovej rovnice, ktoré spĺňa okrajové podmienky

$$u_k(x,t) = \Big(\underbrace{B_k C_k}_{b_k} \sin\frac{k\pi c}{l}t + \underbrace{B_k D_k}_{a_k} \cos\frac{k\pi c}{l}t\Big)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

Všeobecné riešenie je

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi c}{\ell} t + b_k \sin\frac{k\pi c}{\ell} t \right) \sin\frac{k\pi}{\ell} x$$

Potrebujeme ešte nastaviť koeficienty a_k, b_k, tak aby riešenie spĺňalo aj dvojicu začiatočných podmienok

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad u_t(x,0) = \psi(x)$$

Dosadíme

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{\ell} x = \varphi(x)$$

Čísla a_k sú teda koeficienty (Fourierovho) radu sínusového funkcie $\varphi(x)$ na intervale $\langle 0, \ell \rangle$.

Pripomeňme stručne techniku ich počítania.

Po nepárnom predĺžení funkcie $\varphi(x)$ na interval $\langle -\ell, \ell \rangle$ dostaneme

$$\int_{-\ell}^{\ell} \varphi_{nep}(x) \sin\frac{k\pi}{\ell} x \, dx = \int_{-\ell}^{\ell} a_k \sin\frac{k\pi}{\ell} x \cdot \sin\frac{k\pi}{\ell} x \, dx$$

$$a_k = \frac{2 \cdot 2}{2\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \cdot \sin\frac{k\pi}{\ell} x \, dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin\frac{k\pi}{\ell} x \, dx$$

Analogicky pre druhú podmienku, ak $u_t(x,t)$ spočítame pre $t=0$, tak

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-a_k \frac{k\pi c}{\ell} \sin\frac{k\pi c}{\ell} t + b_k \frac{k\pi c}{\ell} \cos\frac{k\pi c}{\ell} t \right) \sin\frac{k\pi}{\ell} x$$

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{k\pi c}{\ell} \sin\frac{k\pi}{\ell} x = \psi(x)$$

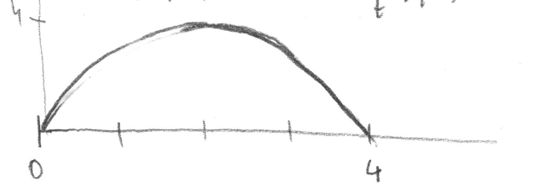
$$\frac{k\pi c}{\ell} b_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi}{\ell} x \, dx \qquad b_k = \frac{2}{k\pi c} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin\frac{k\pi}{\ell} x \, dx$$

Príklad 1. Riešme začiatočno - okrajovú úlohu

$$u_{tt} = 4u_{xx}$$

$$u(0,t)=0 \qquad u(4,t)=0$$

$$u(x,0)=4x-x^2 \qquad u_t(x,0)=0$$



$$c^2=4 \quad c=2 \qquad l=4$$

$$\varphi(x)=4x-x^2 \qquad \psi(x)=0$$

Zo všeobecného postupu vieme, že

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2k\pi}{4}t+b_k\sin\frac{2k\pi}{4}t\right)\sin\frac{k\pi}{4}x$$

a koeficienty a_k b_k sú

$$a_k=\frac{2}{4}\int_0^4(4x-x^2)\cdot\sin\frac{k\pi}{4}x\,dx \qquad b_k=0$$

$$a_k=\frac{1}{2}\left(\left[\frac{-\cos\frac{k\pi}{4}x}{\frac{k\pi}{4}}\cdot(4x-x^2)\right]_0^4+\int_0^4\frac{\cos\frac{k\pi}{4}x}{\frac{k\pi}{4}}\cdot(4-2x)\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left[\frac{\sin\frac{k\pi}{4}x}{\frac{k^2\pi^2}{16}}\cdot(4-2x)\right]_0^4+\int_0^4\frac{\sin\frac{k\pi}{4}x}{\frac{k^2\pi^2}{16}}\cdot 2\,dx\right)$$

$$=\frac{4^3}{k^3\pi^3}\left[-\cos\frac{k\pi}{4}x\right]_0^4=\frac{4^3}{k^3\pi^3}(1-\cos k\pi)=\frac{4^3}{k^3\pi^3}(1-(-1)^k)$$

Riešenie

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^3}{k^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right]\cos\frac{k\pi}{2}t\cdot\sin\frac{k\pi}{4}x$$

Pri označení $k=2m+1$

$$u(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^7}{(2m+1)^3\pi^3}\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi t\cdot\sin\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{4}\right)\pi x$$

Príklad 2. $u_{tt} = u_{xx}$

$u(0,t) = 0 \qquad u(\pi,t) = 0$

$u(x,0) = 0 \qquad u_t(x,0) = 1 \qquad\qquad c^2 = 1 \quad c = 1 \quad l = \pi$

Zo všeobecného postupu je

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right) \sin kx$$

$$a_k = 0 \qquad\qquad b_k = \frac{2}{k\pi c} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin kx \, dx = \frac{2}{k\pi} \left[-\frac{\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{k^2\pi} \left(1 - (-1)^k\right)$$

Riešenie

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi} \left(1 - (-1)^k\right) \sin kt \sin kx$$

alebo
$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2 \pi} \sin(2n+1)t \sin(2n+1)x$$

Príklad 3. $u_{tt} = u_{xx}$

$u(0,t) = 0 \qquad u(\pi,t) = 0$

$u(x,0) = \sin x \qquad u_t(x,0) = 0$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin kx \, dx \qquad\qquad b_k = 0$$

pre $k \neq 1$
$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \left(\cos(x - kx) - \cos(x + kx) \right) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(1+k)x}{(1+k)} - \frac{\sin(1-k)x}{1-k} \right]_0^{\pi} = 0$$

pre
$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} [x]_0^{\pi} - \left[\frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi} \right) = 1$$

$$u(x,t) = \cos t \cdot \sin x$$