

Obyčajné diferenciálne rovnice.

Začnime jednoduchým príkladom

Príklad (Malthusov populačný model)

Predpoklad: Prírastok populácie je úmerný aktuálnemu stavu s konštantou úmernosti k

Označenie: $x(t)$ - stav populácie v čase t

Prírastok modelujeme ako deriváciu stavovej funkcie.

Diferenciálna rovnica modelujúca stav je

$$x'(t) = k \cdot x(t)$$

(V ďalšom budeme používať aj skrátený zápis

$$x' = kx,$$

v ktorom x chápeme ako funkciu premennej t)

Okrem rovnice popisujúcej dynamiku rastu, potrebujeme poznať aj začiatkový stav populácie. Začiatkový čas sledovania označme ako t_0 , začiatkový stav x_0 .

$$x(t_0) = x_0$$

Dvojicu $x' = k \cdot x$

$$x(t_0) = x_0$$

Voláme začiatočná úloha.

Skúsme vypočítať riešenie. Jedna z metód vyzerá nasledovne.

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = k \quad (\text{Ticho predpokladáme, že } x(t) > 0)$$

Integrujme

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int_{t_0}^t k dt \quad (\text{alebo radšej prepíšme integračnú premennú})$$

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{x(s)} ds = \int_{t_0}^t k ds$$

$$[\ln(x(s))]_{t_0}^t = k[s]_{t_0}^t$$

$$\ln x(t) - \ln x(t_0) = k(t - t_0)$$

$$\ln \frac{x(t)}{x(t_0)} = k(t - t_0)$$

$$\frac{x(t)}{x(t_0)} = e^{k(t-t_0)} \quad (x(t_0) = x_0)$$

$$x(t) = x_0 \cdot e^{k(t-t_0)}$$

V tomto modeli populácia rastie exponenciálne.

Definičný obor riešenia x je $\mathbb{R}$.

Prepis riešenia

$$x(t) = x_0 e^{-kt_0} \cdot e^{kt} = c e^{kt} \quad \text{pri označení konštanty}$$

$$c = x_0 e^{-kt_0}$$

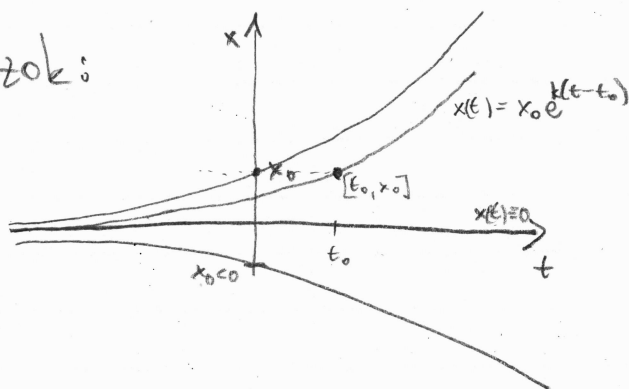
3

Ak $x(t_0) = x_0 = 0$, tak nulová funkcia $x(t) \equiv 0$ je riešením diferenciálnej rovnice $0' = k \cdot 0$

Rovnako dobre vyhovuje rovnici aj riešenie $x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)}$

pre $x_0 < 0$, len už nemá rozumnú populačnú interpretáciu.

Obrázok:



V riešení, a aj na obrázku môžeme demonštrovať dve dôležité vlastnosti tejto začiatkovej úlohy

1. Pre každé $[t_0, x_0]$ existuje riešenie.
2. Toto riešenie je jediné.

Pojem diferenciálnej rovnice.

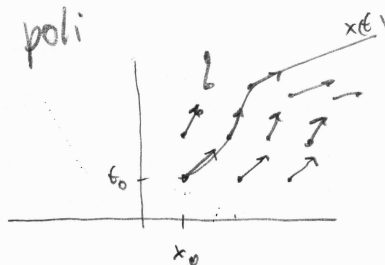
Z analytického pohľadu hovoríme rovnici

$$x' = f(t, x)$$

v ktorej x' je nypadrená ako funkcia nezávislej premennej t
a stavovej premennej x

Z geometrického pohľadu je rovnica určená smernica
dotyčnice ku krivke $x(t)$ v každom bode roviny

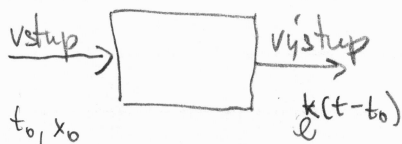
Hovoríme o smerovom poli



$$f(t, x)$$

Riešenie je krivka $x(t)$, ktorá má v každom bode grafu
dotyčnicu "v smere šípky".

Z technického pohľadu môžeme hovoriť o dynamickom
systéme so vstupom a výstupom



Niektoré typy diferenciálnych rovníc

1. rádu

5

I Lineárna diferenciálna rovnica 1 rádu s konštantným koeficientom

$$x' = ax$$

$$x(0) = x_0$$

(Berieme $t_0 = 0$, ale nemusí to tak byť.)

Riešenie $x(t) = x_0 e^{at}$

Funkciu e^{at} (pre $x_0 = 1$) voláme prenosová funkcia.

Príklad 1 Polčas rozpadu uhlíka C_{14} je 5730 rokov.
Zostavme LDR pre datovanie a riešme ju.

Riešenie

$$x' = ax$$

$$x(0) = x_0$$

$$(t_0 = 0)$$

ma' riešenie

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

Pretože

$$x(5730) = \frac{x_0}{2}$$

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{a \cdot 5730}$$

a z toho dostaneme hodnotu parametra a

$$a = -\frac{\ln 2}{5730}$$

Teda rovnica je $x' = -\frac{\ln 2}{5730} x$

a jej riešenie je

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{5730} t} = x_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

II LDR s nekonaštantným koeficientom

6

$$x' = a(t) \cdot x$$

(Def obor)

$$x(t_0) = x_0$$

Riešme začiatočnú úlohu

$$\int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{x(s)} ds = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

$$\ln(x(t)) - \ln x_0 = A(t)$$

(A - primitívna funkcia k a)

Riešenie

$$x(t) = x_0 \cdot e^{A(t)}$$

$e^{A(t)}$ - Prenosová funkcia

Príklad 1.

$$x' = t x$$

$$x(0) = 2$$

$$A(t) = \int_0^t s ds = \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^t = \frac{t^2}{2}$$

$$x(t) = 2 e^{\frac{t^2}{2}}$$

