II. Numerické výpočty

Kap. 1 Numerické riešenie rovníc

Numericky riešiť rovnicu $f(x) = 0$ znamená aproximovať jej koreň α s vopred danou toleranciou. Metódy jej riešení z hľadiska podmienok a rýchlosti konvergencie charakterizujeme ako

a) štartovacie (nenáročné podmienky konvergencie, ale pomalá konvergencia)

b) spresňujúce (zložitejšie podmienky konvergencie, ale rýchla konvergencia)

Numerický výpočet potom môže prebiehať tak, že niekoľko krokov sa vykoná štartovacou metódou a potom sa pokračuje spresňujúcou metódou. Typickou štartovacou metódou je metóda bisekcie.

Podmienky úlohy.

- $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je uzavretý interval,

- rovnica je v tvare $f(x) = 0$, kde f je spojitá funkcia na intervale $[a, b]$,

– f má na intervale $[a, b]$ práve jeden koreň α, t.j. existuje práve jedno číslo $\alpha \in \mathbb{R}$, pre ktoré $f(\alpha) = 0$,

– funkčné hodnoty majú v koncových bodoch intervalu opačné znamienka, t.j. $f(a)f(b) < 0$,

– "tol" je prípustná tolerancia chyby numerického riešenia t.

Algoritmus metódy bisekcie:

Vstup: f, $[a, b]$, tol,

1. $s = (a + b)/2$
2. ak $f(s) = 0$, $t := s$, koniec
3. ak $s - a <$ tol, $t := s$, koniec
4. ak $f(s)f(a) < 0$, $b := s$, choď na 1.
5. inak $a := s$, choď na 1.

Výstup t

Typickou spresňujúcou metódou je metóda dotyčníc (Newtonova metóda).

Podmienky úlohy.

– $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je uzavretý interval,

– rovnica je v tvare $f(x) = 0$, kde f je spojitá a diferencovateľná funkcia na intervale $[a, b]$,

– f má na intervale $[a, b]$ koreň α, t.j. existuje číslo $\alpha \in \mathbb{R}$, pre ktoré $f(\alpha) = 0$,

Iteračný vzťah metódy dotyčníc je založený na výpočte $(n+1)$-ej iterácie ako priesečníku x-ovej osi a dotyčnice vedenej bodom grafu funkcie f v n-tej iterácii:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

Dá sa dokázať, že ak súčin $f'(x)f''(x)$ nemení znamienko na $[a, b]$, tak aspoň pri jednej z volieb $x_0 = a$, $x_0 = b$, iteračný proces konverguje ku koreňu α rovnice. V prípade jednoduchého koreňa sa chyba

– v každom kroku zmenšuje rádovo 2-násobne,

– dá odhadnúť vzťahom

$$|\alpha - x_n| \leq |f(x_n)|/\min_{x\in(a,b)}|f'(x)|$$