Kap. 3 Aproximácia funkcií – interpolácia

Interpolačný polynóm $P_n(x)$ stupňa n aproximuje funkciu f tak, že spĺňa n+1 interpolačných podmienok.

Taylorov polynóm

Taylorov polynóm stupňa *n* so stredom v *a* má tvar

$$T(x,a,n) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

teda interpolačné podmienky sú $T^{(k)}(a, a, n) = f^{(k)}(a)$ pre k = 0, 1, ..., n.

Vandermondova formulácia interpolačného polynómu.

Veľmi často sa vyskytuje prípad, keď interpolačné podmienky sú dané tzv. uzlami interpolácie, t.j. funkčnými hodnotami $f(x_k) = y_k$, k = 0, 1, ..., n funkcie f v n+1 rôznych bodoch $x_0, x_1, ..., x_n$. Vtedy koeficienty c_k interpolačného polynómu $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ sú riešením sústavy lineárnych rovníc

$$\sum_{k=0}^{n} c_k x_j^{\ k} = y_j \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

V maticovom vyjadrení: $V\,\overline{c} = \overline{y}$, kde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}, \quad \overline{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \overline{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Interpolačný polynóm v Newtonovom tvare.

Newtonov interpolačný polynóm má tvar

$$N_n(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

Koeficienty c_k vypočítame pomocou pomerných diferencií.

Definícia. Nech f je funkcia definovaná v navzájom rôznych bodoch x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Pomerná diferencia rádu 0 v bode x_i je $f(x_i)$ a označuje sa $f[x_i]$.

Pomerná diferencia rádu k v bode x_i je podiel

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Pre koeficienty c_k Newtonovho interpolačného polynómu $N_n(x)$ platí $c_k = f[x_0, x_1, ..., x_k]$ pre $k = 0, 1, ..., n$.

Veta (o chybe interpolácie). Nech I je interval obsahujúci body $x_0, x_1, ..., x_n$ a nech P_n je interpolačný polynóm stupňa n, určený podmienkami $P_n(x_i) = f(x_i)$ pre $i = 0, 1, ..., n$. Nech funkcia f je na intervale I $(n+1)$-krát spojite diferencovateľná a nech $M = \max \{|f^{(n)}(x)|: x \in I\}$. Potom pre ľubovoľné $t \in I$ platí

$$f(t) - P_n(t) \leq \frac{M}{(n+1)!} |(t - x_0)(t - x_1)...(t - x_n)|$$