1. Hracia kocka je čiastočne opotrebovaná, takže padajú len hodnoty 1 (3 steny), 2 (1 stena), 3 (2 steny).

a) Napíšte tabuľku pravdepodobnostnej funkcie náhodnej veličiny X vyjadrujúcej hod takouto kockou a nakreslite jej stĺpcový diagram.

b) Napíšte tabuľku pravdepodobnostnej funkcie veličiny S_n vyjadrujúcej súčet z n-násobného hodu kockou (n=2, 3, 4, ...) a nakreslite stĺpcový diagram.

X	1	2	3
	3/6	1/6	2/6

S_2	2	3	4	5	6
	1/4	1/6	13/36	1/9	1/9

S_3	3	4	5	6	7	8	9
	1/8	1/8	7/24	37/216	7/36	1/18	1/27

S_4	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1/16	1/12	5/24	19/108	289/1296	19/162	5/54	2/81	1/81

S_{10} 10 ... 30

1/1024 5/1536 35/3072 55/2304 665/13824 169/2304 503/4750 1093/8747
183/1315 84/643 503/4348 56/643 244/3945 108/2917 637/30453 169/17496
316/74825 55/39366 35/78732 5/59049 1/59049

Na výpočet sa použila ML funkcia conv, príklad:

```
format rat
p=[3/6 1/6 2/6]; q=p;
q=conv(q,p)
    q =
        1/4      1/6     13/36      1/9      1/9
q=conv(q,p)
    q =
       1/8      1/8      7/24    37/216      7/36      1/18      1/27
```

atď.

Kreslenie samostatne...

2. Je daná náhodná veličina X ~ N(μ,σ^2) s neznámymi parametrami. V 12 pokusoch sme získali ako jej konkrétnu realizáciu vektor hodnôt x=[2 2 3 3 4 4 4 4 5 5 5 7].

a) Nájdite bodový odhad μ, σ^2 .

m=mean(x), s2=var(x)
m = 4, s2 = 2

Pri počítaní s2 aplikujeme korekciu 1/(n-1).

b) Nájdite intervalový odhad μ, σ^2 so spoľahlivosťou 0.9 a 0.95.

Odhad μ – použijem Studentovo rozdelenie t(11).

Spoľahlivosť 0.9:

0.95-kvantil v 11 riadku je u = 1.7959
d= sqrt(2)*1.7959/sqrt(12), teda d = 0.7332
Odhad je 4 ± 0.7332

Spoľahlivosť 0.95:

0.975-kvantil v 11 riadku je u = 2.201
d= sqrt(2)*2.201/sqrt(12), teda d = 0.8986
Odhad je 4 ± 0.8986

Odhad σ^2 – použijem χ^2 rozdelenie stupňa 11.

Spoľahlivosť 0.9:

0.05 a 0.95-kvantil v 11 riadku sú 4.57 a 19.68 .
Intervalový odhad je (11*2/19.68, 11*2/4.57) = (1.1179, 4.8140)

Spoľahlivosť 0.95:

. . .

c) Akú spoľahlivosť má intervalový odhad μ s dĺžkou intervalu 2.6 ?

d=1.3, teda u = 1.3*sqrt(12)/sqrt(2) = 3.1843
To v 11. riadku zhruba zodpovedá kvantilu 0.995, čiže spoľahlivosti 0.99.

d) Akú spoľahlivosť má intervalový odhad σ^2 , ak horná hranica intervalu je desaťnásobkom dolnej hranice?

V 11. riadku je zhruba takýto pomer medzi kvantilmi 0.005 a 0.995, ide teda o spoľahlivosť 0.99.

3. Je daná náhodná veličina X ~ N(μ,σ^2) s neznámymi parametrami. V 144 pokusoch sme získali ako jej konkrétnu realizáciu vektor hodnôt x s bodovým odhadom strednej hodnoty m=5 a variancie $s^2 = 9$

a) Nájdite intervalový odhad μ, σ^2 so spoľahlivosťou 0.9 , 0.95 a 0.99.

Odhad μ – použijem Gaussovo rozdelenie.

Spoľahlivosť 0.9:

0.95-kvantil je u = 1.645

(u = 1.656 zo Studentovho rozdelenia voľnosti 143)

d= 3*1.645/12, teda d = 0.41125

Odhad je 4 ± 0.41125

. . .

Odhad σ^2 – spoľahlivosť 0.9:

i. použijem χ^2 rozdelenie stupňa 143 (kalkulačka na webe).

0.05 a 0.95-kvantil sú 116.4 171.9.

Intervalový odhad je (143*9/171.9, 143*9/116.4) = (7.4869, 11.057)

ii. Aproximácia pomocou Gaussovho rozdelenia N(143,286):

Pri N(0,1) sú 0.05 a 0.95-kvantil rovné ±1.645.

Pri N(143,286) pôjde o hodnoty 143±1.645*sqrt(286) , teda 115.18 a 170.82.

Intervalový odhad je potom (143*9/115.18, 143*9/170.82) = (7.534,11.174) .
(Pri použití 144 miesto 143 sa výsledky takmer nelíšia).

b) Akú spoľahlivosť má intervalový odhad μ s dĺžkou intervalu 0.4?

d=0.2, u=12*d/3 = 0.8, podľa tabuliek tomu zodpovedá hodnota 0,7881,
tj. spoľahlivosť bude 2*0.7881-1 = 0.5762

d) Akú spoľahlivosť má intervalový odhad σ^2 , ak horná hranica intervalu je dvojnásobkom dolnej hranice?

Vychádzajme z aproximácie Gaussovým rozdelením. Má platiť (pre menovatele zo vzorca pre interval):

$$143+y*\sqrt{286} = 2*(143-y*\sqrt{286})$$

z čoho $3y*\sqrt{286} = 143$

$y= 2.8186 \sim 2.82.$

Tomu zodpovedá v tabuľkách 0.9976, spoľahlivosť bude teda zhruba 0.995.