Kap. 5 Výberové rozdelenia a ich aplikácie

Definícia 1.

Náhodným výberom o rozsahu n zo základného súboru s rozdelením pravdepodobnosti náhodnej premennej X budeme nazývať náhodný vektor $(X_1, X_2, ..., X_n)$ s vlastnosťami

1. $X_1, X_2, ..., X_n$ sú nezávislé náhodné premenné,
2. pre všetky $i = 1, 2, ..., n$ X_i má rovnaké rozdelenie ako X.

Definícia 2.

Ľubovoľnú náhodnú premennú, ktorá je funkciou náhodného výberu nazývame *štatistikou*.

Podľa účelu požitia (v teórii odhadu resp. v testovaní hypotéz) hovoríme o *odhadovej štatistike*, resp. o *testovacej štatistike*.

5.1. Rozdelenie pravdepodobnosti výberového priemeru

Veta 1. Nech $(X_1, X_2, ..., X_n)$ je náhodný výber z rozdelenia náhodnej premennej X, ktorej stredná hodnota $E(X) = \mu$ a variancia $var(X) = \sigma^2$. Potom pre aritmetický priemer $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ platí

$$E(\overline{X}) = \mu, \; var(\overline{X}) = \sigma^2/n$$

Veta 2. Nech $(X_1, X_2, ..., X_n)$ je náhodný výber z rozdelenia náhodnej premennej $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Potom $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

5.2. Centrálna limitná veta

Centrálna limitná veta. Nech $\{X_n | n = 1, 2, ...\}$ je postupnosť nezávislých náhodných premenných s tým istým rozdelením, ktorého stredná hodnota je μ a variancia σ^2, nech $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ a nech F_N je distribučná funkcia normálneho normovaného rozdelenia N(0,1). Potom

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - nm}{b\sqrt{n}} < x\right) = F_N(x)$$

5.3 Bodový a intervalový odhad strednej hodnoty

Bodový odhad strednej hodnoty: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Nevychýlenosť: $E(\overline{X}) = \mu$ (= E(X))

Intervalový odhad strednej hodnoty rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$

pri známej variancii σ^2

$$\left(\overline{X} - \frac{\sigma\, u(1-\alpha/2)}{\sqrt{n}},\quad \overline{X} + \frac{\sigma\, u(1-\alpha/2)}{\sqrt{n}}\right)$$

Intervalový odhad strednej hodnoty rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$

pri neznámej variancii σ^2

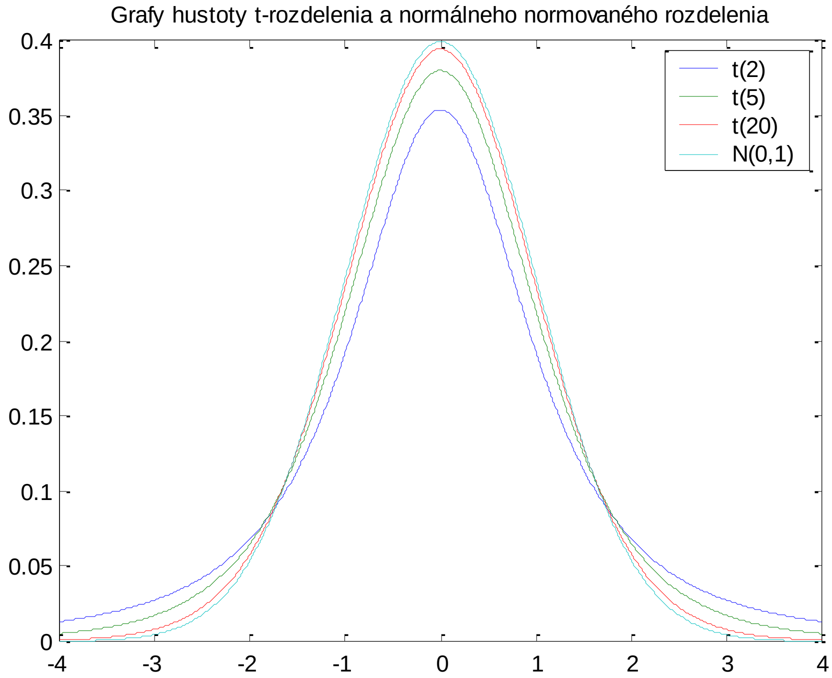
Opravený výberový rozptyl

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

je nevychýleným odhadom variancie σ^2.

Definícia. Náhodná premenná T má Studentovo (t-) rozdelenie pravdepodobnosti s k stupňami voľnosti ($T \sim t(k)$), pre funkciu hustoty platí

$$f(x;k) = c_k \left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$



Veta. Ak $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je náhodný výber z rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$, potom

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

Intervalový odhad strednej hodnoty rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$ pri neznámej variancii σ^2

$$\left(\overline{X} - \frac{S\, t(1-\alpha/2; n-1)}{\sqrt{n}}, \quad \overline{X} + \frac{S\, u(1-\alpha/2; n-1)}{\sqrt{n}}\right)$$

5.4 Intervalový odhad variancie a smerodajnej odchýlky rozdelenia N(μ, σ²)

Bodový odhad variancie normálneho rozdelenia:

Výberový rozptyl **pri známej strednej hodnote μ**

$$S^2(\mu) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

je nevychýleným odhadom variancie σ^2.

Pri neznámej strednej hodnote μ

$$M^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

je vľavo vychýleným a asymptoticky nevychýleným odhadom variancie σ^2.

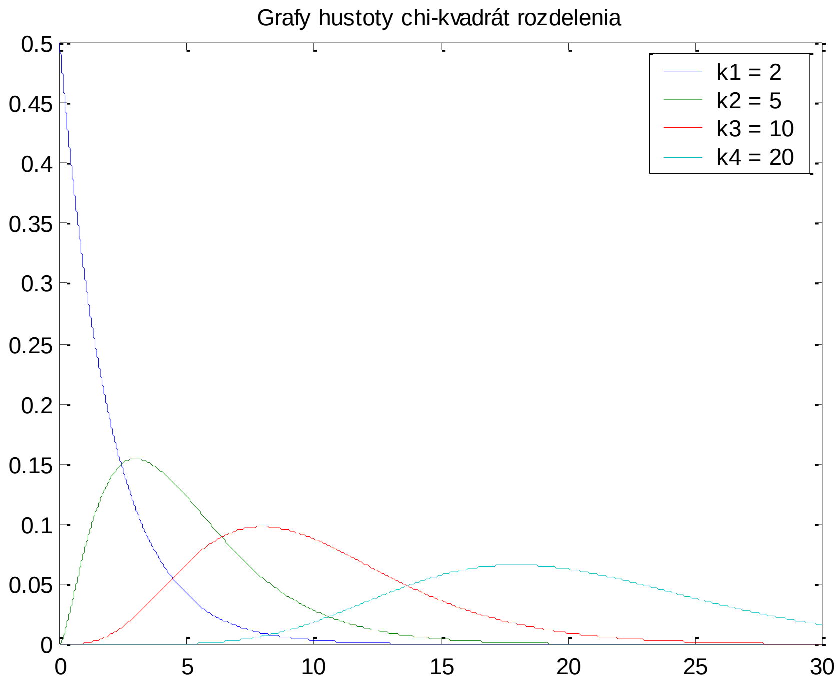
Opravený výberový rozptyl

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

je nevychýleným odhadom variancie σ^2.

Definícia. Náhodná premenná Y má Chi-kvadrát rozdelenie pravdepodobnosti s *k* stupňami voľnosti (Y ~ $\chi^2(k)$), pre funkciu hustoty platí

$$f(x;k) = c_k x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad pre\ x > 0$$



Veta. Ak $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je náhodný výber z rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$, potom

$$\frac{n}{\sigma^2} S^2(\mu) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$$

$$\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

Intervalový odhad variancie rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$ pri neznámej strednej hodnote

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2(1-\alpha/2; n-1)}, \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2(\alpha/2; n-1)} \right)$$

Intervalový odhad variancie rozdelenia N(μ, σ²) pri známej strednej hodnote

$$\left(\frac{nS^2(\mu)}{\chi^2(1-\alpha/2;n)}, \quad \frac{nS^2(\mu)}{\chi^2(\alpha/2;n)} \right)$$

Intervalové odhady pre smerodajnú odchýlku v predchádzajúcich dvoch prípadoch dostaneme odmocnením koncových hodnôt intervalov.