Kap. 3 Model náhodného pokusu – pojem náhodnej premennej

Príklady náhodných experimentov, udalostí a definícií pravdepodobnosti.

1. Hod kockou.
2. Náhodný (opakovaný) ťah guľôčky z urny.
3. Opakovaný pokus o nadviazanie spojenia.
4. Doba čakania na autobus.

Experiment. Súhrn podmienok popisujúcich situáciu, v ktorej dochádza k náhodnej udalosti.

Model experimentu. Ľubovoľná neprázdna množina Ω. Pre konkrétny experiment reprezentuje množinu jeho možných (elementárnych) výsledkov.

Náhodná udalosť. Podmnožina množiny Ω. Systém náhodných udalostí je systém $\mathcal{F}$ podmnožín množiny Ω.

Množinové operácie na tomto systéme zodpovedajú logickým operáciám na systéme udalostí:

$\cup$ ... $\vee$ $\quad$ Ω ... 1 – istá udalosť

$\cap$ ... $\wedge$ $\quad$ $\emptyset$ ... 0 – nemožná udalosť

$(\ )^c$ ... $\neg$

Pravdepodobnosť. Funkcia $P: \mathcal{F} \to <0, 1>$, pre ktorú

1. $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots, A_i \in \mathcal{F}, A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $\forall i \neq j \in J \Rightarrow$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_i)$$

2. $P(\Omega) = 1$

Pravdepodobnostný priestor: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Vlastnosti pravdepodobnosti:

(P3) $P(\emptyset) = 0$
(P4) $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
(P5) $\forall A \in \mathcal{F}, P(A^c) = 1 - P(A)$
(P6) $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \subseteq B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$
(P7) $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
(P8) $\forall A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

(P9) $\forall i, j = 1, 2, ..., n, i \neq j, A_i \cap B_j = \emptyset, A_i, A_j \in \mathcal{F} \Rightarrow$
$P(\cup\{A_i: i = 1, 2, ..., n\}) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$

Podmienená pravdepodobnosť

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech $A, B \in \mathcal{F}$, pričom $P(B) \neq 0$. *Podmienenou pravdepodobnosťou* udalosti A za podmienky B budeme nazývať číslo
$P_B(A) = P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$.

Nezávislosť udalostí

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech $A, B \in \mathcal{F}$. Hovoríme, že udalosti A, B sú *nezávislé*, ak
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Veta 4 (charakterizácia nezávislosti)
Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor, nech $A, B \in \mathcal{F}$ a nech $P(A) \neq 0 \neq P(B)$. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) A, B sú nezávislé
(ii) $P(A|B) = P(A)$
(iii) $P(B|A) = P(B)$

Nezávislosť n udalostí $A_1, A_2, \dots, A_n$

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech pre $i = 1, 2, \dots, n$, $A_i \in \mathcal{F}$. Hovoríme, že udalosti $A_1, A_2, \dots, A_n$ sú *nezávislé*, ak pre ľubovoľnú podmnožinu $i(1), i(2), \dots, i(k)$ n-tice $1, 2, \dots, n$ platí $P(A_{i(1)} \cap A_{i(2)} \cap \dots \cap A_{i(k)}) = P(A_{i(1)})P(A_{i(2)}) \dots P(A_{i(k)})$.

Náhodná premenná

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor. Funkciu $X: \Omega \to \mathbb{R}$ takú, že pre $\forall c \in \mathbb{R}$, $A_c = \{\omega \in \Omega: X(\omega) < c\} \in \mathcal{F}$, budeme nazývať *náhodnou premennou* (náhodnou veličinou).

Distribučná funkcia náhodnej premennej

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech X je náhodná premenná. Funkciu $F: \mathbb{R} \to [0, 1]$ definovanú vzťahom $F(x) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) < x\})$ budeme nazývať *distribučnou funkciou* náhodnej premennej X.

Veta 5 (vlastnosti distribučnej funkcie)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech X je náhodná premenná s distribučnou funkciou F. Potom

(D1) $\forall a, b \in \mathbb{R}, P(\{\omega \in \Omega: a \leq X(\omega) < b\}) = F(b) - F(a)$

(D2) F je neklesajúca funkcia

(D3) F je spojitá zľava

(D4) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$