Príklad:

Integrál $\int_0^2 \sin x$

a) vypočítajte použitím lichobežníkového vzorca pri n = 8 a porovnajte s presným výsledkom (získaným použitím Newton-Lebnitzovho vzorca).

b) Overte platnosť odhadu chyby pri výpočte v a).

c) Vypočítajte daný integrál použitím Simpsonovho vzorca pri 2n = 8 a porovnajte s presným výsledkom.

d) Overte platnosť odhadu chyby pri výpočte v c).

e) Použite metódu dvojnásobného kroku na spresnenie výsledku z c) a porovnajte s presným výsledkom.

Riešenie:

a)

$$I_{L,8} = ((b-a)/n)((f(a)+f(b))/2+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)) =$$

$$= ((2-0)/8)((\sin 2+\sin 0)/2+\sum_{i=1}^{n-1}\sin\frac{2i}{8}) = 1{,}408769377$$

$$I = \int_0^2 \sin x = \cos 0 - \cos 2 = 1{,}416146837$$

b) Odhad chyby

$$E_{L,8} = \frac{b-a}{12}M_2h^2 = \frac{2}{12}1(\frac{2}{8})^2 = 0{,}010417$$

1,416146837 - 1,408769377 = 0,00737746 < 0.010417 c)

$$I_{S,8} = ((b-a)/(6n))(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1})) =$$

$$= ((2-0)/12)(\sin 2 + \sin 0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sin\frac{2i}{4} + 4\sum_{i=1}^{n} \sin\frac{2i-1}{4}) =$$

$= 1,416177799$

d) Odhad chyby

$$E_{S,8} = \frac{b-a}{180} M_4 h^4 = \frac{2}{180} 1(\frac{2}{8})^4 = 0{,}0000434$$

1,416146837 – 1,416177799 = 0,00003096 < 0,0000434

e) Metóda dvojnásobného kroku, 2n = 4,

Rád Simpsonovho vzorca p = 4

$I_{S,4} =$

$$= ((2-0)/6)(\sin 2 + \sin 0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sin\frac{2i}{2} + 4\sum_{i=1}^{n} \sin\frac{2i-1}{2}) =$$

= 1,416653583

Korekcia

$$I_k = \frac{2^p I_{S,8} - I_{S,4}}{2^p - 1} = 1{,}41641608$$

1,416146837 – 1,41641608 = 0,000000757