Náhodný vektor

Definícia 12.

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor. Vektorovú funkciu $T: \Omega \to \mathbb{R}^2$ so zložkami $T = (X, Y)$, ktoré sú náhodnými premennými, budeme nazývať *náhodným vektorom* .

Definícia 13.

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech $T = (X, Y)$ je náhodný vektor.
Funkciu $F: \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ definovanú vzťahom
$F(x,y) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) < x, Y(\omega) < y\})$ budeme nazývať *distribučnou funkciou* náhodného vektora (X,Y).

Veta 11 (vlastnosti distribučnej funkcie náhodného vektora)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech $T = (X, Y)$ je náhodný vektor s distribučnou funkciou F.
Nech F_1, F_2 sú distribučné funkcie zložiek X, Y. Potom

(D1) $P(\{\omega \in \Omega: T(\omega) \in [a, b)\times[c, d)\}) = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F([a,c)$

(D2) F je v každej zložke neklesajúca funkcia,

(D3) F je v každej zložke spojitá zľava, (D4) $\lim_{x\to\infty, y\to\infty} F(x,y) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$

(D5) $\lim_{x\to\infty} F(x,y) = F_2(y)$, $\lim_{y\to\infty} F(x,y) = F_1(x)$.

Definícia 14

Náhodný vektor $T = (X, Y)$ sa nazýva *diskrétny náhodný vektor*, ak obidve jeho zložky sú diskrétne náhodné premenné.

Definícia 15

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech $T = (X, Y)$ je diskrétny náhodný vektor. Nech H, resp. K sú množiny hodnôt zložiek X, resp. Y. Funkcia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná vzťahom

$$f(x,y) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x, Y(\omega) = y\})$$

sa nazýva *pravdepodobnostnou funkciou* diskrétneho náhodného vektora (X,Y).

Veta 12 (vlastnosti pravdepodobnostnej funkcie náhodného vektora)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech $T = (X, Y)$ je diskrétny náhodný vektor s distribučnou funkciou F, s pravdepodobnostnou funkciou f, s pravdepodobnostnými funkciami $f_1(x)$, $f_2(y)$ a s množinami hodnôt H, K zložiek X, Y. Potom

(PF1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = \Sigma\{f(s,t): s \in H, s < x, t \in K, t < y\}$$

(PF2) $\forall A \subset \mathbb{R}^2$,

$$P(\{\omega \in \Omega: (X(\omega),Y(\omega)) \in A\}) =$$
$$= \Sigma\{f(s,t): s \in H, t \in K, (s,t) \in A\}$$

(PF3) $\Sigma\{f(x,y): x \in H, y \in K\} = 1$

(PF4) $\Sigma\{f(x,y): x \in H\} = f_2(y)$ a

$\Sigma\{f(x,y): y \in K\} = f_1(x)$.

Definícia 16

T = (X, Y) je náhodný vektor s distribučnou funkciou F. Funkcia f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, taká, že pre $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

sa nazýva *funkciou hustoty* náhodného vektora (X,Y). Náhodný vektor (X,Y) sa nazýva *spojitý náhodný vektor s hustotou*, ak má funkciou hustoty.

Veta 13 (vlastnosti funkcie hustoty)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech T=(X, Y) je spojitý náhodný vektor s distribučnou funkciou F a s funkciou hustoty f. Potom

(FH1) $$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

(FH2) ak f je v bode $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ spojitá, tak

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

(FH3) zložky X, Y sú spojité náhodné premenné s hustotami

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \qquad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

(FH4) ak A je oblasť v $\mathbb{R}^2$, potom,

$$P((X,Y) \in A) = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

Nezávislosť zložiek náhodného vektora

Definícia 17.

Nech $T = (X, Y)$ je náhodný vektor s distribučnou funkciou $F(x,y)$ a nech $F_1(x)$, $F_2(x)$ sú distribučné funkcie zložiek X, Y. Hovoríme, že *zložky vektora* X *sú nezávislé*, ak pre všetky vektory $x, y \in \mathbb{R}^2$ platí

$$F(x, y) = F_1(x)\, F_2(y)$$

Veta 14. (podmienky nezávislosti náhodných premenných)

Nech $T = (X, Y)$ je diskrétny resp. spojitý náhodný vektor s pravdepodobnostnou funkciou, resp. funkciou hustoty f. Nech $F_i(x_i)$ je distribučná funkcia a $f_1(x)$, $f_2(y)$ sú pravdepodobnostné funkcie, resp. funkcie hustoty zložiek X, Y náhodného vektora. Zložky vektora sú nezávislé práve vtedy, ak pre všetky vektory $x, y \in \mathbb{R}^2$ platí

$$f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y).$$

Číselné charakteristiky rozdelení pravdepodobnosti náhodného vektora

Definícia 18.

Nech (X,Y) je diskrétny resp. spojitý náhodný vektor. Vektor E(X,Y) so zložkami E(X), E(Y) sa nazýva *strednou hodnotou náhodného vektora* (X, Y).

Definícia 19.

Nech (X, Y) je diskrétny resp. spojitý náhodný vektor so strednou hodnotou E(X,Y). s množinami hodnôt H, K jeho zložiek v diskrétnom prípade a s pravdepodobnostnou funkciou, resp. funkciou hustoty f(x,y). Číslo

cov(X, Y) = $\Sigma\Sigma$\{(x – E(X)(y – E(Y))f(x,y): x $\in$ H, y $\in$H\}

resp.

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - E(X))(y - E(Y))\, f(x,y)dxdy$$

sa nazýva *kovariancia* zložiek X, Y náhodného vektora (X,Y).

Číslo

ρ(X,Y) = cov (X,Y)/$\sqrt{}$(var(X)var(Y))

sa nazýva *korelačný koeficient* zložiek X, Y náhodného vektora (X,Y).

Veta 16.

Nech (X,Y) je diskrétny resp. spojitý náhodný vektor s pravdepodobnostnou funkciou resp. funkciou hustoty f(x,y) a H, K nech sú množiny hodnôt zložiek v diskrétnom prípade.

Nech h: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je také zobrazenie, že Z = h(X,Y) je diskrétna resp. spojitá náhodná premenná.

Potom

$E(Z) = \Sigma\Sigma\{h(x,y)f(x,y) : x \in H, y \in K\}$ resp.

$$E(Z) = E(h(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\, f(x,y)\, dxdy$$

Dôsledok.

Nech (X,Y) je náhodný vektor s kovarianciou cov(X,Y) a nech E(X), resp. E(Y) sú stredné hodnoty jeho zložiek.

Potom

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Vlastnosti číselných charakteristík náhodných premenných a vektorov

Veta 17. (vlastnosti strednej hodnoty)

Nech X, Y sú náhodné premenné a $a, b \in \mathbb{R}$. Potom

(E1) $E(a) = a$

(E2) $X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$

(E3) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

(E4) $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

(E5) X, Y nezávislé $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

(E6) $E(X^2) = 0 \Rightarrow P(X = 0) = 1$

(E7) $|E(X)| \leq E(|X|)$

(E8) $E^2(X) \leq E(X^2)$

Veta 18. (Cauchy – Schwarzova nerovnosť)

$$E^2(XY) \leq E(X^2)E(Y^2)$$

Veta 19. (vlastnosti variancie)

(V1) $var(X) = E(X^2) - E^2(X)$

(V2) $var(aX) = a^2 var(X)$

(V3) $var(X \pm Y) =$

$= var(X) + var(Y) \pm 2cov(X, Y)$

(V4) $var(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = E(X)) = 1$

Veta 20. (vlastnosti kovariancie)

(C1) $cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$

(C2) $cov(X, Y) = cov(Y, X)$

(C3) $cov(aX + b, Y) = a\, cov(X, Y)$

(C4) $cov(X + Y, Z) = cov(X, Z) + cov(Y, Z)$

(C5) X, Y nezávislé $\Rightarrow cov(X, Y) = 0$

(C6) $cov^2(X, Y) \leq var(X)\, var(Y)$

Veta 21. (vlastnosti korelačného koeficientu)

(K1) X, Y nezávislé $\Rightarrow \rho(X,Y) = 0$

(K2) $|\rho(X,Y)| \leq 1$

(K3) $|\rho(X,Y)| = 1 \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0,$
$P(Y = aX + b) = 1$

(K4) $Y = aX + b \Rightarrow \rho(X,Y) = 1$ ak $a > 0$
$\rho(X,Y) = -1$ ak $a < 0$