Kap. 5 Numerické integrovanie (kvadratúra)

5.1 Newtonove – Cotesove vzorce

Všeobecne:

Krok 1.

Použijeme vlastnosti určitého integrálu, rozdelíme interval a, b na n rovnako dlhých podintervalov $[x_{i-1}, x_i]$ pre $i = 1, 2, ..., n$ a integrál funkcie f na intervale $[a, b]$ počítame ako súčet integrálov na týchto podintervaloch:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

Krok 2.

Integrál funkcie f na podintervale $[x_{i-1}, x_i] = [c, d]$ nahradíme integrálom z jej interpolačného polynómu stupňa m $P_{m,i}$.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \cong \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_{m,i}(x)dx$$

Aplikáciou kroku 2 dostaneme elementárny (uzavretý) vzorec

$$\int_c^d f(x)dx \cong \int_c^d P_{m,i}(x)dx$$

pre príslušné m. Aplikáciou obidvoch krokov 1. a 2. dostaneme zložený (uzavretý) vzorec pre príslušné m.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_{m,i}(x)dx$$

$m = 0$. Obdĺžnikový elementárny vzorec.

$s = (c + d)/2$, $P_0(x) = f(s)$, $d - c = h$

$$\int_c^d f(x)dx \cong \int_c^d P_0(x)dx = f(s)(d-c) = h\, f(s)$$

Obdĺžnikový zložený vzorec.

$(b - a)/n = h$, $x_i = a + ih$, $h = x_i - x_{i-1}$, $s_i = (x_i + x_{i-1})/2$

1 $$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_{0,i}(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(x_i - x_{i-1}) = h\sum_{i=1}^{n} f(s_i)$$

m = 1. Lichobežníkový elementárny vzorec.

$s = (c + d)/2$, $d - c = h$, $P_1(x) = f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{h}(x - c)$

$$\int_c^d f(x)dx \cong \int_c^d P_1(x)dx = \frac{(f(c) + f(d)}{2}h$$

Lichobežníkový zložený vzorec.

$(b - a)/n = h$, $x_i = a + ih$, $h = x_i - x_{i-1}$,

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_{1,i}(x)dx \cong h[\frac{(f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]$$

m = 2. Simpsonov elementárny vzorec.

$s = (c + d)/2$, $d - c = 2h$,

$$P_2(x) = f(c) + \frac{f(s) - f(c)}{h}(x - c) + \frac{f(d) - 2f(s) + f(d)}{2h^2}(x - c)(x - d)$$

,

$$\int_c^d f(x)dx \cong \int_c^d P_2(x)dx = \frac{h}{3}(f(c) + 4f(s) + f(d))$$

Simpsonov zložený vzorec.

$(b - a)/(2n) = h$, $x_i = a + ih$, $h = x_i - x_{i-1}$, $b = x_{2n}$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{2(i-1)}}^{x_{2i}} P_{2,i}(x)dx \cong \frac{h}{3}(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}))$$

Chyby Newtonových - Cotesových vzorcov.

Dajú sa odvodiť netriviálnymi odhadmi pomocou integrovania chýb interpolačných polynómov. Dostaneme:

m = 0, obdĺžnikový zložený vzorec: $E = ((b - a)/24)M_2h^2$
m = 1, lichobežníkový zložený vzorec: $E = ((b - a)/12)M_2h^2$
m = 2, Simpsonov zložený vzorec: $E = ((b - a)/180)M_4h^4$,

kde $M_i = \max\{|f^{(i)}(x)|: x \in [a, b]\}$