Náhodná premenná

Definícia 6.

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor. Funkciu $X: \Omega \to \mathbb{R}$ takú, že pre $\forall c \in \mathbb{R}$, $A_c = \{\omega \in \Omega: X(\omega) < c\} \in \mathcal{F}$, budeme nazývať *náhodnou premennou* (náhodnou veličinou).

Definícia 8

Náhodná premenná X sa nazýva *diskrétna náhodná premenná*, ak množina jej hodnôt je spočítateľná.

Definícia 9

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech X je diskrétna náhodná premenná s distribučnou funkciou F. Funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná vzťahom $f(x) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) = x\})$ sa nazýva *pravdepodobnostnou funkciou* diskrétnej náhodnej premnnej X.

Veta 6 (vlastnosti pravdepodobnostnej funkcie)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech X je diskrétna náhodná premenná s distribučnou funkciou F a s pravdepodobnostnou funkciou f, ktorej množina hodnôt je H. Potom

(PF1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{t \to x+} F(t) - F(x)$

(PF2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \Sigma\{f(t): t \in H, t < x\}$

(PF3) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $P(\{\omega \in \Omega: a \leq X(\omega) < b\}) = \Sigma\{f(t): t \in H, a \leq t < b\}$

(PF4) $\Sigma\{f(x): x \in H\} = 1$

Definícia 10

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech X je diskrétna náhodná premenná s distribučnou funkciou F. Funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, taká, že pre $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

sa nazýva *funkciou hustoty* náhodnej premennej x. Náhodná premenná X sa nazýva *spojitá náhodná premenná*, ak má funkciou hustoty.

Veta 7 (vlastnosti funkcie hustoty)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech X je náhodná premenná s distribučnou funkciou F a s funkciou hustoty f. Potom

(FH1) $\exists S \subset \mathbb{R}$, S spočítateľná tak, že $\forall x \in \mathbb{R} - S$, $f(x) = dF(x)/dx$

(FH2) $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

$$P(\{\omega \in \Omega : a \leq X(\omega) < b\}) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

(FH3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Číselné charakteristiky rozdelení pravdepodobnosti

Definícia 11

Nech X je diskrétna resp. spojitá náhodná premenná s pravdepodobnostnou funkciou resp. funkciou hustoty f a H nech je množina hodnôt v diskrétnom prípade.

Číslo

$$E(X) = \Sigma\{xf(x): x \in H\}$$

resp.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

sa nazýva *stredná hodnota* náhodnej premennej X.

Číslo

$$\mathrm{var}(X) = \Sigma\{(x - E(X))^2 f(x): x \in H\}$$

resp.

$$\mathrm{var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx$$

sa nazýva *variancia* náhodnej premennej X.

Nech X je diskrétna resp. spojitá náhodná premenná s pravdepodobnostnou funkciou resp. funkciou hustoty f a H nech je množina hodnôt v diskrétnom prípade.
Nech $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je taká funkcia, že $Y = h(X)$ je diskrétna resp. spojitá náhodná premenná.
Potom

$$E(Y) = \Sigma\{h(x)f(x): x \in H\}$$

resp.

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$$

Dôsledok

$$var(X) = E((X - E(X))^2)$$