Cvičenie 23.3.2017

1. Náhodná premenná X má funkciu hustoty

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)/6 & pre \quad -2 \le x \le 0 \\ (4-x)/12 & pre \quad 0 < x \le 4 \\ 0 & inak \end{cases}$$

a) Vypočítajte P(X > −1).

b) Určte t tak, aby P(−1 ≤ X ≤ t) = 3/4

c) Vypočítajte strednú hodnotu E(X) náhodnej premennej X.

Riešenie:

a) $$P(X > -1) = \int_{-1}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{x+2}{6}dx + \int_{0}^{4} \frac{4-x}{12}dx = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$$

b)

$$\frac{3}{4} = P(-1 \le X \le t) = \int_{-1}^{t} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{x+2}{6}dx + \int_{0}^{t} \frac{4-x}{12}dx = \frac{1}{4} + \frac{t}{3} - \frac{t^2}{24}$$

Z toho $t^2 - 8t + 12 = 0$ odkiaľ $t_1 = 2$, $t_2 = 6 \notin (0, 4]$, teda $t = 2$

c)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-2}^{0} x\frac{x+2}{6}dx + \int_{0}^{4} x\frac{4-x}{12}dx = -\frac{2}{9} + \frac{8}{9} = \frac{2}{3}$$

2. Náhodná premenná X má distribučnú funkciu

$$F(x) = \begin{cases} 0 & pre\ x \le 0 \\ x/a & pre\ 0 < x \le 2 \\ 1/2 & pre\ 2 < x \le 3 \\ (x-2)/b & pre\ 3 < x \le 4 \\ c & pre\ 4 < x \end{cases}$$

a) Určte konštanty a, b, c tak, aby F bola distribučnou funkciou spojitej náhodnej premennej.

b) Vypočítajte P(2,5 ≤ X ≤ 3,5). [3b]

c) Určte t tak, aby P(X ≥ t) = 1/5. [3b]

d) Vypočítajte strednú hodnotu náhodnej premennej X. [2b]

Riešenie:

a) 2/a = ½ ⇒ a = 4, (3 – 2)/b = ½ ⇒ b = 2, c = 1

b) P(2,5 ≤ X ≤ 3,5) = F(3,5) – F(2,5) = (3,5 – 2)/2 – ½ = ¼

c) 1/5 = 1 – F(t) ⇒ F(t) = 4/5 ⇒ (x – 2)/2 = 4/5 ⇒ 18/5

d) f(x) = dF(x)/dx = ¼ pre 0<x<2, f(x) = ½ pre 3<x<4, f(x) = 0 inak,

$$\Rightarrow \quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{2} \frac{1}{4} xdx + \int_{3}^{4} \frac{1}{2} xdx = \frac{1}{2} + \frac{7}{4} = \frac{9}{4}$$

3. Počet nepodarkov vychádzajúcich z automatickej linky je náhodná premenná s Poissonovým rozdelením, teda časový interval medzi dvomi poruchami je náhodná premenná s exponenciálnym rozdelením (f(x) = λexp(–λx), x ≥ 0). Za hodinu sa priemerne vyskytne 0,5 nepodarkov.

a) S akou pravdepodobnosťou prvá porucha nastane až po hodine prevádzky linky?

b) S akou pravdepodobnosťou čas medzi druhou a treťou poruchou je menší než 15 minút?

c) Najmenej aký čas bezporuchovej prevádzky sa dosiahne s pravdepodobnosťou 0,9?

Riešenie: $F(x) = 0{,}5\int_{-\infty}^{x} \exp(-t/2)dt = 1 - \exp(-t/2) \quad pre\ x \geq 0$

a) P(X > 1) = 1 – P(X < 1) = 1 – F(1) = 1 – 1 + exp(−1/2) = 0,6065
b) P(X < ¼) = 1 – exp(−1/8) = 0,8825
c) 0,9 = P(X ≥ t) = exp(−t/2) ⇒ t = −2 ln 0,9 = 0,2107 hod.

4. Automatická plniaca linka plní sáčky s deklarovaným množstvom náplne (t.j. množstvom uvedeným na etikete sáčku) 16 dkg. Predpokladajme, že skutočné množstvo náplne je náhodné a má normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ = 16,25 a smerodajnou odchýlkou σ = 0,17 dkg.

a) S akou pravdepodobnosťou je náplň sáčku aspoň 16 dkg,

b) Aké množstvo náplne dosiahne 10% najviac naplnených sáčkov?

c) Automatická linka možňuje manuálne nastaviť strednú hodnotu μ. Ako ju treba nastaviť, aby len 1% sáčkov obsahovalo menej než 16 dkg náplne?

Riešenie:

a) P(X ≥ 16) = P((X − μ)/σ ≥ (16 – 16,25)/0,17) =
P(Z < –(16 – 16,25)/0,17) = P(Z < 1,5625) = 0,9292

b) 0,1 = P(X > t) = P((X − μ)/σ > (t – 16,25)/0,16) ⇒
(t – 16,25)/0,17 = 1,28 ⇒ t = 16,25 + 1,28*0,17 = 16,4676

c) P(X < 16) = 0,01 ⇒ P((X − μ)/σ < (16 − μ)/0,17) = 0,01 ⇒
(16 – μ)/0,17 = −2,33 ⇒ μ = 16,3961

5. Dokážte, že pre náhodnú premennú X s exponenciálnym rozdelením pre ľubovoľné a < b platí

$$P(X \geq b \mid X \geq a) = P(X \geq b-a)$$

Riešenie:
Platí $P(X \geq b) = 1 - P(X < b) = 1 - (1 - e^{-\lambda b}) = e^{-\lambda b}$
Potom

$$P(X \geq b \mid X \geq a) = P(X \geq b, X \geq a)/P(X \geq a) = P(X \geq b)/P(X \geq a) = e^{-\lambda b}/e^{-\lambda a}$$
$$= e^{-\lambda(b-a)} = P(X \geq b-a)$$