1. Náhodná premenná X má normálne rozdelenie s parametrami μ, σ^2, t.j. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Na základe realizácie náhodného výberu

1070 1170 1310 1390 1430 1460 1640 1640

a. Určte intervalový odhad pre strednú hodnotu μ s koeficientom spoľahlivosti $1 - \alpha = 0{,}9$, ak variancia σ^2 je známa a rovná sa 40000.

b. Určte intervalový odhad pre strednú hodnotu μ s koeficientom spoľahlivosti $1 - \alpha = 0{,}9$, ak variancia σ^2 nie je známa.

c. Určte intervalový odhad pre varianciu σ^2 s koeficientom spoľahlivosti $1 - \alpha = 0{,}9$, ak stredná hodnota μ je známa a rovná sa 1400.

d. Určte intervalový odhad pre varianciu σ^2 s koeficientom spoľahlivosti $1 - \alpha = 0{,}9$, ak stredná hodnota μ nie je známa.

Riešenie:

$\overline{x} = 1388{,}8$ $\quad s = 203{,}079$ $\quad s(\mu) = 190{,}296$

a. $u(1-\alpha/2) = u(0{,}95) = 1{,}645$, $\quad I_{0,9} = (1377{,}1;\ 1400{,}4)$

b. $t(1-\alpha/2;\ 7) = t(0{,}95;\ 7) = 1{,}8946$; $\quad I_{0,9} = (1252{,}7;\ 1524{,}8)$

c. $\chi^2(0{,}05;\ 8) = 2{,}73$; $\quad \chi^2(0{,}95;\ 8) = 15{,}51$; $\quad I_{0,9} = (18648;\ 106120)$

d. $\chi^2(0{,}05;\ 7) = 2{,}17$; $\quad \chi^2(0{,}95;\ 7) = 14{,}07$; $\quad I_{0,9} = (20518;\ 133040)$

2. Náhodná premenná X má strednú hodnotu μ a varianciu σ^2. Z realizácie náhodného výberu o rozsahu $n = 40$ sme vypočítali výberový priemer $\overline{x} = 251$ a výberovú smerodajnú odchýlku $s = 24{,}438$.

a. Určte intervalový odhad pre strednú hodnotu μ s koeficientom spoľahlivosti $1 - \alpha = 0,95$, ak variancia σ^2 je známa a rovná sa 576.

b. Najmenej aký veľký musí byť rozsah náhodného výberu, aby pri známej variancii $\sigma^2 = 576$ bola dĺžka intervalového odhadu s koeficientom spoľahlivosti $1 - \alpha = 0,95$ najviac 1.

c. Určte intervalový odhad pre strednú hodnotu μ s koeficientom spoľahlivosti $1 - \alpha = 0,95$, ak variancia σ^2 nie je známa.

Riešenie:

$n = 40 \geq 30 \;\Rightarrow\;$ podľa CLV $(\overline{X} - \mu)\sqrt{n}/\sigma \sim N(0, 1)$

a. $u(1-\alpha/2) = u(0,975) = 1,96$; $I_{0,95} = (243,6; 258,4)$

b. $2\sigma\, u(1-\alpha/2)/\sqrt{n} \leq 1 \;\Rightarrow\; 2*24*1,96/\sqrt{n} \leq 1 \;\Rightarrow\; n \geq 8852$

c. $u(1-\alpha/2) = u(0,975) = 1,96$, $I_{0,95} = (243,4; 258,6)$

3. Realizácia náhodného výberu 200 respondentov ukázala 123 pozitívnych odpovedí na položenú otázku. Nech náhodná premenná X nadobúda hodnotu 1 ak z populácie náhodne vybratý respondent odpovie na položenú otázku kladne, inak nadobúda hodnotu 0.

a. Nájdite intervalový odhad s koeficientom spoľahlivosti $1 - \alpha = 0,9$ pre parameter p alternatívneho rozdelenia náhodnej premennej X.

b. Vypočítajte minimálny rozsah náhodného výberu, pre ktorý dĺžka intervalového odhadu s koeficientom spoľahlivosti $1 - \alpha = 0,9$ pre parameter p nepresiahne 0,01. Použite CLV.

Riešenie:

$n = 200 \geq 30 \;\Rightarrow\;$ podľa CLV $(\overline{X} - p)\sqrt{(n/p(1-p))} \sim N(0, 1)$

a. $u(1-\alpha/2) = u(0,95) = 1,645$, $\overline{p} \pm u(0,95)\sqrt{(\overline{p}(1-\overline{p})/n)}$, $I_{0,9} = (0,5584;\ 0,6716)$

b. $2*1,645\sqrt{(p*(1-p))}/\sqrt{n} \leq 0,01 \Rightarrow 1,645/\sqrt{n} \leq 0,01 \Rightarrow n \geq 27061$