Cvičenie 16.3.2017

1. Strelec zasiahne cieľ s pravdepodobnosťou 0,8. Ak pri opakovaných pokusoch predpokladáme, že zásahy cieľa sú nezávislé udalosti,

a) aká je pravdepodobnosť, že z desiatich pokusov práve 7 krát zasiahne cieľ?

b) aká je pravdepodobnosť, že z desiatich pokusov aspoň 7 krát zasiahne cieľ?

c) Koľkokrát musí strelec zopakovať pokus, aby pravdepodobnosť toho, že aspoň raz zasiahne cieľ, bola najmenej 0,999?

($f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$)

Riešenie:

a) P(X = 7) = f(7) = 0,201326592

b) P(X ≥ 7) = f(7) + f(8) + f(9) + f(10) = 0,879126118

c) P(X > 0) = 1 – P(X = 0) = 1 – $0.2^n \geq 0,999 \Rightarrow 0,2^n \leq 0,001 \Rightarrow$ n = 5

2. Počet nepodarkov vychádzajúcich z automatickej linky je náhodná premenná s Poissonovým rozdelením. Za hodinu sa priemerne vyskytne 0,5 nepodarkov. S akou pravdepodobnosťou z linky vyjdú

a) práve 2 nepodarky za hodinu? [2b]

b) viac než 2 nepodarky za hodinu? [3b]

c) viac než 2 nepodarky za 8-hodinovú smenu? [3b]

Pomôcka: $f(x) = (\lambda^x/x!) \exp(-\lambda)$

Riešenie:

a) P(X = 2) = f(2) = 0,075816332

b) P(X > 2) = 1 – P(X ≤ 2) = 1 – (f(0) + f(1) + f(2)) = 0,014387677

c) λ= 8*0,5 = 4, P(X > 2) = 1 – (f(0) + f(1) + f(2)) = 0,761896694

3. Pokusná myš sa pokúša dostať sa z miesta A do miesta B. Keď sa jej to podarí, pokúša sa o prechod opačným smerom, keď nie, opakuje pôvodný pokus. Prechod z A do B a rovnako aj prechod z B do A je úspešný s pravdepodobnosťou 0.7 a sú navzájom nezávislé. Aká je pravdepodobnosť toho, že po 5 pokusoch o prechod (či už jedným alebo druhým smerom) skončí v mieste A?

Riešenie:

$X \sim Bi(5, 0.7)$

a) $P(A) = P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4) = 0{,}49488$

b) $P(B) = P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) = 0{,}50512$

4. Basketbalisti Adam, Boris a Cyril súťažia medzi sebou v trojkovom hode na kôš v kľude. Hádžu jeden po druhom v danom poradí až kým niektorý z nich kôš netrafí, ale najviac 3 krát, t.j. ak po troch kolách nikto netrafí kôš, hra končí remízou, inak vyhráva úspešný strelec. Každý z nich má nasledovnú pravdepodobnosť úspechu pri každom hode: Adam 0,1, Boris 0,2 a Cyril 0,3. Ich pokusy možno považovať za nezávislé. Vypočítajte pravdepodobnosť

a) remízy,

b) víťazstva Adama,

c) víťazstva Borisa,

d) víťazstva Cyrila.

Riešenie:

a) $P(D) = (0{,}9*0{,}8*0{,}7)^3 = 0{,}128024064$

b) $P(A) = 0{,}1 + 0{,}9*0{,}8*0{,}7*0{,}1 + 0{,}9^2*0{,}8^2*0{,}7^2*0{,}1 = 0{,}1758016$

c) $P(B) = 0{,}9*0{,}2 + 0{,}9^2*0{,}8*0{,}7*0{,}2 + 0{,}9^3*0{,}8^2*0{,}7^2*0{,}2 = 0{,}31644288$

d) $P(C) = 0{,}9*0{,}8*0{,}3 + 0{,}9^2*0{,}8^2*0{,}7*0{,}3 + 0{,}9^3*0{,}8^3*0{,}7^2*0{,}3 = 0{,}379731456$

5. Dokážte, že pre náhodnú premennú X s geometrickým rozdelením pre ľubovoľné $k < n$ platí

$$P(X \geq n \mid X \geq k) = P(X \geq n-k)$$

Riešenie:
Najprv odvodíme vzťah pre $P(X \geq n)$
$P(X \geq n) = P(X = n) + (P(X = n+1) + P(X = n+2) + \dots) = (1-p)^n p + (1-p)^{n+1} p + (1-p)^{n+2} p + \dots = (1-p)^n p(1 + (1-p) + (1-p)^2 + \dots) = (1-p)^n p(1/(1-(1-p))) = (1-p)^n$
Potom
$P(X \geq n \mid X \geq k) = P(X \geq n, X \geq k)/P(X \geq k) = (1-p)^n/(1-p)^k = (1-p)^{n-k} = P(X \geq n-k)$