Príklady z Matematiky 3

1 Prvý týždeň

1. Nájdite modul, hlavnú hodnotu argumentu a zobrazte v komplexnej rovine nasledujúce komplexne čísla:

   (a) $1-\sqrt{3}i$, $\left[2,\ -\frac{\pi}{3}.\right]$

   (b) $-2+2i$, $\left[2\sqrt{2},\ \frac{3\pi}{4}.\right]$

   (c) -4, $[4,\ \pi.]$

   (d) i^5. $\left[1,\ \frac{\pi}{2}\ .\right]$

2. Zapíšte nasledujúce čísla v trigonometrickom a exponenciálnom tvare:

   (a) $1+\sqrt{3}i$, $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),\ 2e^{i\frac{\pi}{3}}.\right]$

   (b) $2+2i$, $\left[2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),\ 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.\right]$

   (c) -2, $\left[2\left(\cos\pi+i\sin\pi\right),\ 2e^{i\pi}.\right]$

   (d) $-i^3$. $\left[\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right),\ e^{i\frac{\pi}{2}}.\right]$

3. Vypočítajte a napíšte v algebrickom tvare:

   (a) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^3$, $[-8.]$

   (b) $\frac{(1-i)^2}{1+i}$. $[-1-i.]$

4. Nájdite všetky korene rovníc a zobrazte ich v komplexnej rovine

   (a) $z^3=i$, $\left[w_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, w_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, w_3=-i.\right]$

   (b) $z^4=-1$, $\left[w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, w_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, w_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i, w_4=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i.\right]$

   (c) $z^4=1-\sqrt{3}i$, $\left[\begin{array}{c} w_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right), w_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right), \\ w_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right), w_4=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right) \\ \text{alebo}\ \ w_4=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right). \end{array}\right]$

   (d) $z^4=1$, $[w_1=1, w_2=i, w_3=-1, w_4=-i.]$

   (e) $z^3=-1$. $\left[w_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, w_2=-1, w_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.\right]$

2 Druhý týždeň

Vypočítajte krivkové integrály:

1. $\int_C \frac{1}{x-y} ds$, kde C je úsečka od bodu $[0,-2]$ po bod $[4,0]$. $[\sqrt{5}\ln 2.]$
2. $\int_C x ds$, kde C je časť paraboly $y = x^2$ medzi bodmi $[2,4]$ a $[1,1]$. $\left[\frac{17\sqrt{17}-5\sqrt{5}}{12}.\right]$
3. $\int_C x^2 ds$, kde C je časť grafu $y = \ln x$, kde $1 \leq x \leq 2$. $\left[\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}.\right]$
4. $\int_C \sqrt{x^2+y^2} ds$, kde C je kružnica $x^2+y^2 = x$. $[2.]$
5. $\int_C x^2 y ds$, kde C je oblúk kružnice $x^2+y^2 = a^2$, s koncovými bodmi $[a,0]$ a $[0,a]$. $\left[\frac{a^4}{3}\right]$
6. $\int_C xy ds$, kde C je obvod obdĺžnika ohraničený priamkami $x = 0, x = 4, y = 0, y = 2$. $[24]$
7. $\int_C \frac{x^2}{y} ds$, kde C je časť paraboly $y^2 = 2x$, $y \in \left\langle\sqrt{2}, 2\right\rangle$. $\left[\frac{5}{6}\sqrt{5} - \frac{1}{5}\sqrt{3}\right]$
8. $\int_C -dx + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dy$, kde C sa skladá z oblúkov $\widehat{AB}$ a $\widehat{BA}$, pričom $\widehat{AB}$ je oblúk paraboly $y = x^2$, od bodu $A = (0,0)$, po bod $B = (1,1)$ a $\widehat{BA}$ je úsečka od bodu B do bodu A. $\left[\frac{\pi}{4} - 1\right]$
9. $\int_C \left(x^2+y^2\right) dx + \left(x^2-y^2\right) dy$, kde C je časť grafu funkcie $y = 1-|1-x|$, $0 \leq x \leq 2$, so začiatočným bodom $[0,0]$. $\left[\frac{4}{3}.\right]$
10. $\int_C \left(x^2-2xy\right) dx + \left(y^2-2xy\right) dy$, kde C je krivka $y = x^2$, z bodu $[-1,1]$ po bod $[1,1]$. $\left[-\frac{14}{15}.\right]$
11. $\int_C y dx + x dy$, kde C je časť kružnice $x = a\cos t, y = a\sin t$, $t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, kde $[a,0]$ je začiatočný bod. $[0.]$
12. $\int_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, kde C je kružnica $x^2+y^2 = a^2$, kladne orientovaná. $[-2\pi]$
13. $\int_C \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, kde C je úsečka z bodu $(1,-1)$ po bod $(4,0)$. $\left[4-\sqrt{2}\right]$
14. Vypočítajte integrál $\int_C \frac{x+y}{x^2+y^2} dx - \frac{x-y}{x^2+y^2} dy$, kde C je oblúk AB kružnice $x^2+y^2 = a^2$ od bodu $A = (a,0)$ cez bod $C = (0,a)$ po bod $B = (-a,0)$. $[-\pi]$

Použitím Greenovej vety vypočítajte integrály:

15. $\int_C y^2 dx + x dy$, ak C je hranica štvorca ohraničená priamkami $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$, ktorá je kladne orientovaná. $[4.]$

16. $\int_C \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx + \frac{2}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dy$, kde C je hranica oblasti $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $x \leq y \leq \sqrt{3}x$, ktorá je kladne orientovaná. $\left[\frac{\pi}{12} \ln 2.\right]$

17. $\int_C \left(3x^2 \cos y - y^3, x^3 - x^3 \sin y\right) d\mathbf{s}$, kde C je kladne orientovaná krivka daná vzťahom $x^2 + y^2 = 1$. $\left[\frac{3}{2}\pi\right]$

18. $\int_C -dx + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dy$, kde C je kladne orientovaná uzavretá krivka pozostávajúca z oblúka paraboly $y = x^2$, od bodu $A = (0,0)$, po bod $B = (1,1)$ a z úsečky z bodu $B = (1,1)$ po bod $A = (0,0)$. $\left[\frac{\pi}{4} - 1\right]$

19. $\int_C e^x (1 - \cos y)\, dx - e^x (1 - \sin y)\, dy$, kde C je kladne orientovaná uzavretá krivka, ktorá je hranicou oblasti

    $A = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\right\}$. $\left[\frac{e^\pi}{2} - \frac{1}{2}\right]$

20. $\int_C -e^x (1 - \cos y)\, dx + e^x (y - \sin y)\, dy$, kde C je kladne orientovaná uzavretá krivka, ktorá je hranicou oblasti

    $A = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\right\}$. $\left[\frac{1}{5}e^\pi - \frac{1}{5}\right]$

3 Tretí týždeň

V úlohách 1 - 5 zistite, aká množina je určená daným vzťahom. Jej obraz načrtnite v komplexnej rovine.

1. $|z - z_0| = r,\ r > 0,\ z_0$ je pevný bod. [Kružnica so stredom z_0 a polomerom r]
2. $|z + i| + |z - i| < 4.$ $\left[\text{Vnútro elipsy } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1\right]$
3. $|z + 2| > 1.$ [Vonkajšok kružnice so stredom $S = (-2; 0)$ a polomerom $r = 1$]
4. $|z - 2| < |z|.$ [Polrovina $\operatorname{Re} z > 1$.]
5. $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = 2.$ $\left[z \neq 0,\right.$ kružnica so stredom $S = \left(0, -\frac{1}{4}\right)$ a polomerom $\left. r = \frac{1}{4}\right]$
6. Zistite, či sú nasledujúce množiny oblasti. (Načrtnite ich v komplexnej rovine):
   (a) $|z| < 4,$ [áno]
   (b) $1 \leq |z - 1| \leq 3,$ [nie]
   (c) $\frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4},$ [nie]
   (d) $0 < |z - 2| < 3,$ [áno]
   (e) $\operatorname{Re} z < 2.$ [áno]
7. Nájdite limity postupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak
   (a) $z_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n + \frac{n+1}{3n-1} i,$ $\left[\sqrt[3]{e} + \frac{1}{3} i\right]$
   (b) $z_n = 2n \sin \frac{1}{n} + \frac{4n+1}{5n-1} i,$ $\left[2 + \frac{4}{5} i\right]$
   (c) $z_n = n \operatorname{tg} \frac{1}{2n} + \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n i,$ $\left[\frac{1}{2} + i e^4\right]$
8. Zistite, či rady $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergujú, alebo divergujú
   (a) $z_n = \frac{\sin n + i \cos n}{n^3}$, [absolútne konverguje]
   (b) $z_n = \frac{1}{n(n+1)} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}} i,$ [absolútne konverguje]
   (c) $z_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \frac{n}{3^n} i,$ $\left[\text{diverguje, návod rad } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \text{ nespĺňa nutnú podmienku konvergencie}\right]$
9. Vyjadrite reálnu a imaginárnu časť funkcie:
   (a) $f(z) = e^{z^2},$
   $\left[\operatorname{Re} f(z) = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy, \operatorname{Im} f(z) = e^{x^2 - y^2} \sin 2xy\right]$
   (b) $f(z) = z^2 \sin z,$
   $$\left[\begin{array}{c} \operatorname{Re} f(z) = \left(x^2 - y^2\right) \sin x \cosh y - 2xy \cos x \sinh y, \\ \operatorname{Im} f(z) = \left(2xy \sin x \cosh y + \left(x^2 - y^2\right) \cos x \sinh y\right). \end{array}\right]$$

(c) $f(z) = \operatorname{tg} z$,
$\left[\begin{array}{l} \operatorname{Re} f(z) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y}, \\ \operatorname{Im} f(z) = \frac{\sinh y \cosh y}{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y} \end{array}\right]$

(d) $f(z) = z^2 - z + 1$,
$\left[\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 - x + 1, \operatorname{Im} f(z) = 2xy - y\right]$

(e) $f(z) = \frac{1}{z}$,
$\left[\operatorname{Re} f(z) = \frac{x}{x^2+y^2}, \operatorname{Im} f(z) = -\frac{y}{x^2+y^2}\right]$

(f) $f(z) = |z| + \operatorname{Re} z$.
$\left[\operatorname{Re} f(z) = \sqrt{x^2+y^2} + x, \operatorname{Im} f(z) = 0\right]$.

V úlohách 10 a 11 nájdite definičný obor funkcie f :

10. $f(z) = \frac{3iz-12z+i}{iz^2+1-i}$. $\left[D(f) = \boldsymbol{C} \setminus \left\{ \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{8}}, \sqrt[4]{2} e^{i\frac{9\pi}{8}} \right\}\right]$

11. $f(z) = \frac{\overline{z}}{(z^3-2i)(|z|-3)}$.
$\left[D(f) = \boldsymbol{C} \setminus \left(\{z \in \boldsymbol{C};\ |z| = 3\} \cup \left\{ \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, -\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, -i\sqrt[3]{2} \right\}\right)\right]$

V úlohách 12 - 14 vypočítajte funkčnú hodnotu funkcie f v čísle z_0 :

12. $f(z) = \frac{\overline{z}}{(z^3-2i)(|z|-3)}$, $z_0 = i$. $\left[-\frac{1}{6}\right]$

13. $f(z) = z + \overline{z}^2 - \operatorname{Re}(z\overline{z}) - \operatorname{Im}(z\overline{z})$, $z_0 = 8 - 6i$. $[-64 + 90i]$

14. $f(z) = \arg z$

    (a) $z_0 = 8 - 6i$. $\left[-\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)\right]$
    (b) $z_0 = -1 + 2i$. $[\pi - \operatorname{arctg} 2]$
    (c) $z_0 = -1 - i$. $\left[-\frac{3\pi}{4}\right]$

V úlohách 15 - 20 vypočítajte limity:

15. $\lim_{z \longrightarrow 2i} \frac{z+3}{z^2+2iz}$. $\left[-\frac{3+2i}{8}\right]$

16. $\lim_{z \longrightarrow i} \frac{z^2-iz+z-i}{3iz^2+3z}$. $\left[-\frac{1+i}{3}\right]$

17. $\lim_{z \longrightarrow 2+i} \frac{3iz-6i+3}{2iz^2-4iz+2z}$. $\left[\frac{6-3i}{10}\right]$

18. $\lim_{z \longrightarrow i} \frac{z^2+(2-i)z-2i}{z^2+1}$. $\left[\frac{1}{2} - i\right]$

19. $\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{z^3}{|z|^2}$. $[0]$

20. $\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{z^2}{|z|^2}$. [Návod:vyjadrite reálnu a imaginárnu časť funkcie, potom ukážte, že limita neexistuje.]

V úlohách 21 - 23 vyšetrite spojitosť funkcie f :

21. $f(z) = \frac{1}{1-z}$. [Spojitá v $\boldsymbol{C} \setminus \{1\}$]

22. $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. [Spojitá v $\boldsymbol{C} \setminus \{-i, i\}$]

23. $f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$. [Spojitá v $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$]

V úlohách 24 - 25 zistite, či je možné dodefinovať funkciu f v bode z_0 tak, aby bola spojitá v tomto bode:

24. $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0, 1+i\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{z^3 - z^2 - iz^2 + iz - i + 1}{z^2 - z - iz}$, $z_0 = 1+i$. $\left[\text{Je možné, ak } f(1+i) = \frac{3}{2}(1+i)\right]$

25. $f : \boldsymbol{C} \setminus \{4+i\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{z^2 - (3+2i)z - 6 + 7i}{z - 4 - i}$, $z_0 = 4+i$. [Nie je možné, lebo $f \lim_{z \longrightarrow 4+i} f(z) = \infty$]

4 Štvrtý týždeň

1. Nájdite obor konvergencie mocninového radu:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$. $[K(0,1)=\{z\in\boldsymbol{C};\ |z|<1\}]$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$. [konverguje len v strede $a=0$]
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$. $[K(0,e)=\{z\in\boldsymbol{C};\ |z|<e\}]$
   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n-1}}{1+in} z^n$. $[K(0,1)=\{z\in\boldsymbol{C};\ |z|<1\}]$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$. $[K(0,2)=\{z\in\boldsymbol{C};\ |z|<2\}]$
   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{2n}$. $\left[K\left(0,\sqrt{2}\right)=\left\{z\in\boldsymbol{C};\ |z|<\sqrt{2}\right\}\right]$
   (g) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in)\, z^n$. $\left[K\left(0,\frac{1}{e}\right)=\left\{z\in\boldsymbol{C};\ |z|<\frac{1}{e}\right\}\right]$
   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{2n}} (z-1+i)^n$.
   $\left[K\left(1-i,\frac{1}{3}\right)=\left\{z\in\boldsymbol{C};\ |z-1+i|<\frac{1}{3}\right\}\right]$
   (i) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2} (z-2i)^n$.
   $\left[K\left(2i,e^2\right)=\left\{z\in\boldsymbol{C};\ |z-2i|<e^2\right\}\right]$
   (j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+in}{2^n} (z+i)^n$. $[K(-i,2)=\{z\in\boldsymbol{C};\ |z+i|<2\}]$
   (k) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{5}\right)^n$ $[K(1,5)=\{z\in\boldsymbol{C}:|z-1|<5\}]$
   (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2i)^n}{(n+1)(n+3)} (z+3i)^n$,
   $\left[K\left(-3i,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\left\{z\in\boldsymbol{C}:|z+3i|<\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}\right]$
   (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} \left(\frac{z-1+i}{1-3i}\right)^n$,
   $\left[K\left(1-i,\sqrt{10}\right)=\left\{z\in\boldsymbol{C}:|z-1+i|<\sqrt{10}\right\}\right]$
   (n) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{5}\right)^n$ $[K(1,5)=\{z\in\boldsymbol{C}:|z-1|<5\}]$

2. Vypočítajte funkčné hodnoty:

   (a) $\ln(-1)$, $[i\pi]$
   (b) $\ln(-i)$, $\left[-\frac{1}{2}i\pi\right]$
   (c) $\ln\left(1-\sqrt{3}i\right)$. $\left[\frac{1}{2}\ln 4-\frac{1}{3}i\pi\right]$
   (d) $\ln(-3)$ $[\ln 3+i\pi]$
   (e) $\ln(5i)$ $\left[\ln 5+i\frac{\pi}{2}\right]$
   (f) $\ln(2)$ $[\ln 2]$
   (g) $\ln(e)$ $[1]$
   (h) $\ln(2+2i)$ $\left[\ln\left(\sqrt{8}\right)+i\frac{\pi}{4}\right]$
   (i) $\ln(-2+2i)$ $\left[\ln\left(\sqrt{8}\right)+i\frac{3\pi}{4}\right]$
   (j) $\ln(-2-2i)$ $\left[\ln\left(\sqrt{8}\right)+i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

(k) $\ln(2-2i)$ $\left[\ln\left(\sqrt{8}\right)-i\frac{\pi}{4}\right]$

(l) $\ln(3+4i)$ $\left[\ln 5+i\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right]$

(m) $\ln(-3-4i)$ $\left[\ln 5+i\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)-\pi\right)\right]$

(n) $\ln(3-4i)$ $\left[\ln 5-i\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right]$

(o) $\ln(1-i)$ $\left[\frac{1}{2}\ln 2-i\frac{\pi}{4}\right]$

(p) $\ln(-\sqrt{3}-i)$ $\left[\ln 2-i\frac{5\pi}{6}\right]$

(q) $\ln(1-i\sqrt{3})$ $\left[\ln 2-i\frac{\pi}{3}\right]$

(r) $\ln(-8+15i)$ $\left[\ln 17+i\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{15}{8}\right)\right]$

(s) $\ln\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$ $\left[i\frac{\pi}{4}\right]$

(t) $\ln\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$ $\left[\ln\sqrt{3}+i\frac{\pi}{6}\right]$

3. Nájdite všetky riešenia z rovníc:

(a) $e^z=-1$, $[\{i\pi\,(1+2k)\,,\,k\in\mathbf{Z}\}]$

(b) $e^z=-i$, $\left[\left\{i\pi\left(-\frac{1}{2}+2k\right),\,k\in\mathbf{Z}\right\}\right]$

(c) $e^z=1-\sqrt{3}i$. $\left[\left\{\frac{1}{2}\ln 4-\frac{1}{3}i\pi+2k\pi i,\,k\in\mathbf{Z}\right\}\right]$

4. Vypočítajte hodnoty:

(a) $e^{2+i\frac{\pi}{2}}$, $\left[ie^2\right]$

(b) e^{2+i}, $\left[e^2\cos 1+ie^2\sin 1\right]$

(c) i^i. $\left[e^{-\frac{1}{2}\pi}\right]$

(d) $(-3i)^{2i}$ $[e^{\pi}\,[\cos(\ln 9)+i\sin(\ln 9)]]$

(e) i^{1+i} $\left[ie^{-\frac{\pi}{2}}\right]$

(f) $i^{\frac{3}{4}}$ $\left[\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right]$

(g) $(1-i)^{2+i}$ $\left[2e^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)\right)-i\cos\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)\right)\right]$

(h) $(1+i)^{\frac{1}{2}}$ $\left[\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\right]$

(i) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{2-i}$ $\left[4e^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\ln 2\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\ln 2\right)\right)\right]$

5. Vypočítajte hodnoty:

(a) $\sin i$, $[i\sinh 1]$

(b) $\cos(1-i)$. $[\cos 1\cosh 1+i\sin 1\sinh 1]$

(c) $\sin(2-3i)$
$$\left[\frac{\sin 2\left(e^3+e^{-3}\right)}{2}-i\frac{\cos 2\left(e^3-e^{-3}\right)}{2}=\sin 2\cosh 3-i\cos 2\sinh 3\right]$$

(d) $\cos i$ $\left[\frac{e^{-1}+e}{2}=\cosh 1\right]$

(e) $\cos(4+i)$ $[\cos 4 \cosh 1 - i \sin 4 \sinh 1]$

(f) $\operatorname{tg}(2-i)$ $\left[\frac{e^2 \sin 4 + i\left(1-e^2 \cos 4\right)}{e^2 \cos 4 + 1 + ie^2 \sin 4}\right]$

(g) $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - i \ln 2\right)$ $\left[\frac{8+15i}{17}\right]$

5 Piaty týždeň

1. Daná je funkcia $f(z) = \frac{iz-1}{iz^2+1+i}$. Nájdite:

   (a) definičný obor; $\left[\boldsymbol{C} \setminus \left\{ \sqrt[4]{2} e^{\frac{3\pi}{8} i},\ \sqrt[4]{2} e^{\frac{11\pi}{8} i} \right\}\right]$

   (b) $f\,'$, $f\,'(i)$ $\left[f\,'(z) = \frac{z^2+2iz-1+i}{(iz^2+1+i)^2},\ f\,'(i) = -4+i\right]$

2. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(z) = \frac{3i}{2i-z}$. $\left[D(f) = \boldsymbol{C} \setminus \{2i\} = D(f\,'),\ f\,'(z) = \frac{3i}{(2i-z)^2}\right]$

V úlohách 3. - 8. pre funkciu f
a. zistite, kde existuje derivácia,
b. nájdite $f\,'$ v bodoch, kde existuje,
c. vyšetrite, kde je f analytická (holomorfná)

3. $f(z) = x^2 + iy^2$. $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f\,'\text{existuje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z\}, \\ \text{b. } f\,'(z) = f\,'(x+iy) = 2x, \\ \text{c. nie je analytická v žiadnom bode} \end{array}\right]$

4. $f(z) = |z|$. $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f\,' \text{ neexistuje v žiadnom bode,} \\ \text{b. } f\,'(z) \nexists, \\ \text{c. nie je analytická v žiadnom bode.} \end{array}\right]$

5. $f(z) = z^3 + z$. $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f\,' \text{ existuje na } \boldsymbol{C}, \\ \text{b. } f\,'(z) = 3z^2 + 1, \\ \text{c. je analytická na } \boldsymbol{C}. \end{array}\right]$

6. $f(z) = z \operatorname{Re} z$. $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f\,' \text{ existuje len v bode } z = 0, \\ \text{b. } f\,'(0) = 0, \\ \text{c. nie je analytická v žiadnom bode} \end{array}\right]$

7. $f(z) = f(x+iy) = (2xy + 2x - 1) + i\left(y^2 - x^2 + 2y\right)$. $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f\,' \text{ existuje na } \boldsymbol{C}, \\ \text{b. } f\,'(z) = f\,'(x+iy) = (2y+2) - i(2x), \\ \text{c. je analytická na } \boldsymbol{C}. \end{array}\right]$

8. $f(z) = (e^x \cos y) - i(e^x \sin y)$. $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f\,' \text{ neexistuje v žiadnom bode,} \\ \text{b. } f\,'(z) \nexists, \\ \text{c. nie je analytická v žiadnom bode.} \end{array}\right]$

V úlohách 9 - 20 nájdite na $A \subset \boldsymbol{C}$ analytickú (holomorfnú) funkciu $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, ak je daná jej jedna zložka a prípadne funkčná hodnota v jednom bode:

9. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $f(i) = 0$.
   $\left[f(z) = f(x+iy) = \left(x^3 - 3xy^2\right) + i\left(3x^2y - y^3 + 1\right)\right]$

10. $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$, $f(0) = 0$.
    $\left[f(z) = f(x+iy) = \left(x^2 - y^2 + xy\right) + i\left(2xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right)\right]$

11. $v(x,y) = x^2 - y^2 - 3x + 2xy,\ u(2,1) = 0.$

$\left[u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy + 3y - 2\right]$

12. $v(x,y) = 2e^x \sin y,\ f(0) = 1.$

$[f(z) = f(x+iy) = (2e^x \cos y - 1) + i(2e^x \sin y)]$

13. $v(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right) + x - 2y.$

$$\left[\begin{array}{c} u(x,y) = -2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - y - 2x + k, \text{ alebo} \\ u(x,y) = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - y - 2x + K \end{array}\right]$$

14. $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$, pričom $f(0) = 0$. $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = ze^z]$

15. Ukážte, že $u(x,y) = xy$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu.

$\left[f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = -\frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right) + C\right]$

16. Ukážte, že $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $\left[f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = 2xy - \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right) + C\right]$

17. Ukážte, že $u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $\left[f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = -2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - y^3 + C.\right]$

18. Ukážte, že $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - x$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $\left[f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 - y + C\right]$

19. Ukážte, že $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $\left[f : \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + C\right]$

20. Ukážte, že $u(x,y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $\left[f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = ye^x \cos y + xe^x \sin y + C\right]$

6 Šiesty týždeň

Vypočítajte integrály: ($\oplus$ je kladná orientácia, $\ominus$ je záporná orientácia krivky C.)

1. $\int_C z \sin z dz$, C je úsečka od bodu 0 po bod i. $\left[-ie^{-1}\right]$
2. $\int_C \operatorname{Re} z dz$, C je úsečka
   (a) od bodu 0 po bod $1+i$. $\left[\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right]$
   (b) od bodu -1 po bod $1+i$. $[0]$
3. $\int_C (\overline{z})^2 dz$, $C : z(t) = t + i\frac{t}{3}$, $t \in \langle 0, 3\rangle$ orientovaná súhlasne s parametrickým vyjadrením. $\left[\frac{10(3-i)}{3}\right]$
4. $\int_C \frac{1}{z} dz$, C je úsečka od bodu 1 po bod $1+i$. $\left[\ln\left(\sqrt{2}\right) + i\frac{\pi}{4}\right]$
5. $\int_C e^{\overline{z}} dz$, C je lomená krivka, ktorá sa skladá z dvoch úsečiek: prvá so začiatočným bodom 0 a koncovým bodom i, druhá so začiatočným bodom i a koncovým bodom $1+i$. $[1 + (e-2)(\cos 1 - i \sin 1)]$
6. $\int_C \frac{1}{z} dz$, $C : |z| = 2$, $\operatorname{Im} z \leq 0$ od bodu -2 po bod 2. $[i\pi]$
7. $\int_C |z|\, dz$, kde
   (a) $C : |z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu -1 po bod 1. $[2]$
   (b) $C : |z| = 2$, $\operatorname{Re} z \leq 0$ od bodu $-2i$ po bod $2i$. $[8i]$
8. $\int_C \overline{z}\,|z|\, dz$, kde $C : |z| = 1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$ od bodu i po bod $-i$ a úsečka od bodu $-i$ po bod i. $[-i\pi]$
9. $\int_C \operatorname{Re} z dz$, kde $C : |z| = 1$, $\ominus$. $[-i\pi]$
10. $\int_C z \operatorname{Im} z dz$, kde $C : |z| = 2$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu -2 po bod 2. $\left[\frac{16i}{3}\right]$
11. $\int_C \frac{z}{\overline{z}} dz$, kde $C : |z| = 2$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu 2 po bod -2 a úsečka od bodu -2 po bod -1 a $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu -1 po bod 1 a úsečka od bodu 1 po bod 2. $\left[\frac{4}{3}\right]$

V príkladoch 12 - 16 pomocou Cauchyho integrálnej vety vypočítajte integrály po jednoduchých, po častiach hladkých, uzavretých, kladne orientovaných krivkách:

12. $\int_C \frac{1}{z^2+1} dz$, $C = \left\{z \in \boldsymbol{C} : (\operatorname{Re} z)^2 + 4(\operatorname{Im} z)^2 = 1\right\}$. $[0]$
13. $\int_C \frac{z+4}{z^2+2z+5} dz$, $C : |z| = 1$. $[0]$
14. $\int_C \frac{z^2+5}{z^2+1} dz$, $C = \left\{z \in \boldsymbol{C} : 4(\operatorname{Re} z)^2 + 16(\operatorname{Im} z)^2 = 1\right\}$. $[0]$
15. $\int_C \frac{e^z+1}{z+i} dz$, $C : |z| = \frac{1}{2}$. $[0]$
16. $\int_C \frac{z+2}{z^2-2z+2} dz$, $C : |z+1| = 1$. $[0]$

7 Siedmy týždeň

V príkladoch 1 - 14 pomocou Cauchyho integrálnej vety, alebo Cauchyho integrálnej formuly vypočítajte integrály po jednoduchých, po častiach hladkých, uzavretých, kladne orientovaných krivkách:

1. $\int_C \frac{e^z \cos z}{(1+z^2)\sin z} dz$, $C : |z-2-i| = \sqrt{2}$. $[0]$
2. $\int_C \frac{\sin z}{z+i} dz$, $C : |z-i| = 1$. $[0]$
3. $\int_C \frac{1}{(z-2)(z+2i)} dz$, $C : |z| = 1$. $[0]$
4. $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1} dz$, $C : |z| = \frac{1}{2}$. $[0]$
5. $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1} dz$, $C : |z| = \frac{3}{2}$. $[18\pi i]$
6. $\int_C \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz$, $C : |z-2i| = \frac{3}{2}$. $\left[\frac{\pi}{e}\right]$
7. $\int_C \frac{z}{z^4-1} dz$, $C : |z-a| = a$, $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 1$. $\left[i\frac{\pi}{2}\right]$
8. $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1} dz$, $C : |z+1| = 1$. $[18\pi i]$
9. $\int_C \frac{e^z+1}{z+i} dz$, $C : |z+i| = 2$. $[2\pi \sin 1 + 2i\pi(1+\cos 1)]$
10. $\int_C \frac{z^2}{(z-4)(z^2+4)} dz$, $C : |z-1+i| = 2$. $\left[-\frac{2\pi}{5} + i\frac{\pi}{5}\right]$
11. $\int_C \frac{\sin z}{z^2+1} dz$, $C : |z+i| = 1$. $[i\pi \sinh 1]$
12. $\int_C \frac{z+2}{z^2-2z+2} dz$,
    (a) $C : |z-1-2i| = 2$. $[\pi(3+i)]$
    (b) $C : |z-1+2i| = 2$. $[\pi(-3+i)]$
13. $\int_C \frac{1}{z^4-1} dz$, $C : |z-1-i| = \sqrt{2}$. $\left[\frac{\pi(-1+i)}{2}\right]$
14. Vypočítajte $\int_C \frac{1}{z^2-i} dz$, ak C je jednoduchá, po častiach hladká, uzavretá, kladne orientovaná krivka, na ktorej neležia korene menovateľa. Vypočítajte všetky možnosti.
$$\left[\begin{array}{c} \text{korene menovateľa: } z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i). \\ \text{a. } z_0 \in IntC,\ z_1 \notin IntC\ \left[\frac{\pi\sqrt{2}}{2}(1+i)\right] \\ \text{b. } z_0 \notin IntC,\ z_1 \in IntC\ \left[-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}(1+i)\right] \\ \text{c. } z_0,\ z_1 \in IntC\ [0] \\ \text{d. } z_0,\ z_1 \notin IntC\ [0] \end{array}\right]$$

8 Ôsmy týždeň

V úlohách 1 - 2 pomocou definície nájdite Taylorov rad funkcie f so stredom v bode a a vyšetrite jeho konvergenciu:

1. $f(z) = \sin^2 z$, $a = 0$.
   $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}\text{, konverguje na } M = \boldsymbol{C}\right]$

2. $f(z) = \ln(iz+2)$, $a = 1+2i$.
   $\left[i\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (z-1-2i)^n\text{, konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-1-2i| < 1\}\right]$

   V úlohách 3 - 9 vypočítajte Taylorov rad funkcie f so stredom v bode a a vyšetrite jeho konvergenciu:

3. $f(z) = \frac{z}{z+2}$, $a = 1$.
   $\left[\frac{1}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} (z-1)^n\text{, konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-1| < 3\}\right]$

4. $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$, $a = 0$.
   $\left[-1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n\text{, konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z| < 1\}\right]$

5. $f(z) = \frac{z+2}{z^2+5z+4}$, $a = 1$.
   $\left[\begin{array}{c} \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(2\cdot 5^{-n-1} + 2^{-n-1}\right)(z-1)^n, \\ \text{konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-1| < 2\} \end{array}\right]$

6. $f(z) = \frac{z}{z^2+4z+3}$, $a = 2$.
   $\left[\begin{array}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \left(3\cdot 5^{-n-1} - 3^{-n-1}\right)(z-2)^n, \\ \text{konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-2| < 3\} \end{array}\right]$

7. $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z+5}$, $a = i$.
   $\left[\begin{array}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2-3i}{4}(1+i)^{-n-1} - \frac{2+3i}{4}(1-3i)^{-n-1}\right)(z-i)^n, \\ \text{konverguje na } M = \left\{z \in \boldsymbol{C} : |z-i| < \sqrt{2}\right\} \end{array}\right]$

8. $f(z) = \frac{z^2+i}{z^2+iz+2}$, $a = 1$.
   $\left[\begin{array}{c} \frac{2+i}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3}\left[\frac{(1+i)}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1+4i}{(1+2i)^{n+1}}\right](z-1)^n, \\ \text{konverguje na } M = \left\{z \in \boldsymbol{C} : |z-1| < \sqrt{2}\right\} \end{array}\right]$

9. $f(z) = e^{3z-2}$, $a = 1$. $\left[e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}(z-1)^n\text{, konverguje na } M = \boldsymbol{C}\right]$

V úlohách 10 - 29 nájdite Laurentov rad funkcie f so stredom v bode a pre medzikružie $P(a,r,R) = \{z \in \boldsymbol{C} : r < |z-a| < R\}$.

10. $f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}}$, $a = 0$, $P(0,0,\infty)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{5-n}\right]$

11. $f(z)=\frac{1}{(z-2)^2}$, $a=i$, $P\left(i,\sqrt{5},\infty\right)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(2-i)^n}{(z-i)^{n+2}}\right]$

12. $f(z)=\frac{1}{z(z^2+1)}$, $a=0$, $P(0,0,1)$. $\left[\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n+1}\right]$

13. $f(z)=\frac{1}{z(z^2+1)}$, $a=i$, $P(i,0,1)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1-2^{n+1}}{2(2i)^n}(z-i)^{n-1}\right]$

14. $f(z)=\frac{1}{z(z^2+1)}$, $a=0$, $P(0,1,\infty)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-2n-3}\right]$

15. $f(z)=\frac{1}{z(1-z)}$, $a=0$, $P(0,0,1)$. $\left[\sum_{n=-1}^{\infty}z^n\right]$

16. $f(z)=\frac{z+1}{z(z-1)}$, $a=1$, $P(1,0,1)$. $\left[2(z-1)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n\right]$

17. $f(z)=\frac{1}{z^2+iz+2}$, $a=-2i$, $P(-2i,3,\infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-1}(3i)^{-n-1}(z+2i)^{n-1}\right]$

18. $f(z)=\frac{1}{z^2-3iz-2}$, $a=2i$, $P(2i,1,\infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{-n-1}i^{-n-1}(z-2i)^{n-1}\right]$

19. $f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$, $a=1$, $P(1,0,1)$. $\left[(-1)\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n\right]$

20. $f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$, $a=1$, $P(1,1,\infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-2}(z-1)^n\right]$

21. $f(z)=\frac{5z+11}{z^2+4z+3}$, $a=-1$, $P(-1,0,2)$. $\left[3(z+1)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n}(z+1)^n\right]$

22. $f(z)=\frac{5z+11}{z^2+4z+3}$, $a=-1$, $P(-1,2,\infty)$. $\left[5(z+1)^{-1}+\sum_{n=-\infty}^{-2}(-1)^{n+1}2^{-n}(z+1)^n\right]$

23. $f(z)=\frac{5z+11}{z^2+4z+3}$, $a=-3$, $P(-3,0,2)$. $\left[2(z+3)^{-1}-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}(z+3)^n\right]$

24. $f(z)=\frac{5z+11}{z^2+4z+3}$, $a=-3$, $P(-3,2,\infty)$. $\left[2(z+3)^{-1}+3\sum_{n=-\infty}^{0}2^{-n}(z+3)^n\right]$

25. $f(z)=\frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$, $a=0$, $P(0,1,2)$. $\left[\left(-\frac{1}{12}\right)\sum_{n=0}^{\infty}4^{-n}z^{2n+1}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}z^{-2n-1}\right]$

26. $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $a=2$, $P\left(2,0,\sqrt{5}\right)$. $\left[(z-2)^{-1}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2+i)^{n+1}-(2-i)^{n+1}}{5^{n+1}}(z-2)^n\right]$

27. $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $a=0$, $P(0,1,2)$. $\left[2\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n z^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}z^n\right]$

28. $f(z)=z^2\sin\left(\frac{\pi z+1}{z}\right)$, $a=0$, $P(0,0,\infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{1-n}}{(1-2n)!}z^{2n+1}-z\right]$

29. $f(z)=2^z+2^{\frac{1}{z}}-1$, $a=0$, $P(0,0,\infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{(\ln 2)^n(-n)!}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n}{n!}z^n\right]$

9 Deviaty týždeň

V príkladoch 1 - 13 zistite druh izolovaných singulárnych bodov funkcie f a určte rezíduum funkcie f v týchto bodoch:

1. $f(z) = \frac{z^2}{z+3}$. $[z = -3$, pól 1. stupňa $res_{z=-3}[f(z)] = 9]$
2. $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+4)}$. $\begin{bmatrix} z = 2i, \text{ pól 1. stupňa } res_{z=2i}[f(z)] = \frac{-\sin 2 + i\cos 2}{16} \\ z = -2i, \text{ pól 1. stupňa } res_{z=-2i}[f(z)] = \frac{-\sin 2 - i\cos 2}{16} \\ z = 0, \text{ pól 2. stupňa } res_{z=0}[f(z)] = \frac{1}{4} \end{bmatrix}$
3. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$. $\begin{bmatrix} z = i, \text{ pól 3. stupňa } res_{z=i}[f(z)] = -\frac{3i}{16} \\ z = -i, \text{ pól 3. stupňa } res_{z=-i}[f(z)] = \frac{3i}{16} \end{bmatrix}$
4. $f(z) = \frac{z^3+z^2+2}{z(z^2-1)^2}$. $\begin{bmatrix} z = 1, \text{ pól 2. stupňa } res_{z=1}[f(z)] = -\frac{3}{4} \\ z = -1, \text{ pól 2. stupňa } res_{z=-1}[f(z)] = -\frac{5}{4} \\ z = 0, \text{ pól 1. stupňa } res_{z=0}[f(z)] = 2 \end{bmatrix}$
5. $f(z) = \frac{z+3}{(z-2)^2(z+2i)}$. $\begin{bmatrix} z = 2, \text{ pól 2. stupňa } res_{z=2}[f(z)] = \frac{2+3i}{8} \\ z = -2i, \text{ pól 1. stupňa } res_{z=-2i}[f(z)] = \frac{-2-3i}{8} \end{bmatrix}$
6. $f(z) = \frac{4+z^2-2z\sin z}{z^3}$. $[z = 0$, pól 3. stupňa $res_{z=0}[f(z)] = -1]$
7. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$. $[z = 0$, pól 1. stupňa $res_{z=0}[f(z)] = 1]$
8. $f(z) = z^3 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$. $[z = 0$, podstatne singulárny bod $res_{z=0}[f(z)] = a_{-1} = 0]$
9. $f(z) = z\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)$. $[z = -1$, podstatne singulárny bod $res_{z=-1}[f(z)] = a_{-1} = -1]$
10. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. $[z = 0$, odstrániteľný singulárny bod $res_{z=0}[f(z)] = 0]$
11. $f(z) = z^2\left(e^{\frac{1}{z}} - 2\right)$. $\left[z = 0\right.$, podstatne singulárny bod $\left.res_{z=0}[f(z)] = a_{-1} = \frac{1}{6}\right]$
12. $f(z) = z^2\cos\left(\frac{z+1}{z}\right)$. $\left[z = 0\right.$, podstatne singulárny bod $\left.res_{z=0}[f(z)] = a_{-1} = \frac{1}{6}\sin 1\right]$
13. $f(z) = \operatorname{tg} z$. $\left[z = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right.$, pól 1. stupňa $\left.res_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi}[f(z)] = -1\right]$

V príkladoch 14 - 26 pomocou Cauchyho vety o rezíduách vypočítajte integrály po jednoduchých, po častiach hladkých, uzavretých orientovaných krivkách C, kde $\oplus$ je kladná orientácia, $\ominus$ je záporná orientácia krivky C.

14. $\int_C \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}dz$, kde $C : |z-1-i| = 2$, $\oplus$. $\left[-\frac{\pi i}{2}\right]$
15. $\int_C \frac{z+3}{(z-2)^2(z+2i)}dz$, kde $C : |z| = 3$, $\ominus$. $[0]$
16. $\int_C \frac{z^3+1}{z(z-1)^3}dz$, kde $C : |z| = 2$, $\oplus$. $[2\pi i]$
17. $\int_C \frac{1}{z^4+1}dz$, kde $C : \{z(t) = (1+\cos t) + i\sin t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$, $\ominus$. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}i\pi\right]$

18. $\int_C \frac{1-\cos z}{z^3} dz$, kde $C : |z| = 1$, $\oplus$. $[\pi i]$

19. $\int_C z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$, kde $C : |z| = \frac{1}{2}$, $\oplus$. $\left[\frac{\pi i}{3}\right]$

20. $\int_C \frac{\cos z}{z} dz$, kde $C : |z| = 1$, $\ominus$. $[-2\pi i]$

21. $\int_C z^3 \cos\left(\frac{1}{z-2}\right) dz$, kde $C : |z-2| = 3$, $\oplus$. $\left[2\pi i \left(\frac{1}{4!} - 6\right)\right]$

22. $\int_C \sin^2\left(\frac{1}{z}\right) dz$, kde $C : |z| = 1$, $\ominus$. $[2\pi i]$

23. $\int_C (z-1)^2 \sin\left(\frac{1}{z-2}\right) dz$, kde $C : |z| = 3$, $\ominus$. $\left[-\frac{5\pi i}{3}\right]$

24. $\int_C \cos\left(\frac{z}{z+i}\right) dz$, kde $C : |z+i| = \frac{1}{2}$, $\oplus$. $[-2\pi \sin 1]$

25. $\int_C \operatorname{tg} z dz$, kde $C : \left|z - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $\ominus$. $[2\pi i]$

26. $\int_C \left(\frac{1}{z^2-9} - \cos\left(\frac{z}{z-3}\right)\right) dz$, kde $C : |z-3| = 1$, $\oplus$. $2\pi i \left(\frac{1}{6} + 3 \sin 1\right)$

10 Desiaty týždeň

1. Vypočítajte všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice:

   (a) $y'' + 3y' - 4y = 0.$ $\left[y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x}\right]$

   (b) $y'' - 2y' + 2y = 0.$ $[y(x) = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)]$

   (c) $y'' + 6y' + 9y = 0.$ $\left[y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}\right]$

2. Vyriešte začiatočné úlohy:

   (a) $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2.$ $\left[y(x) = 5e^{-2x} - 4e^{-3x}\right]$

   (b) $y''+2y'+2y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1.$ $[y(x) = e^{-x}(3\cos x + 4\sin x)]$

   (c) $y'' - 3y' - 4y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2.$ $\left[y(x) = -\frac{6}{5}e^{-x} + \frac{1}{5}e^{4x}\right]$:

3. Vypočítajte všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice:

   (a) $y'' + 2y' - 3y = 4 + x + 4e^{2x}.$
   $\left[y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{3}x + \frac{4}{5}e^{2x} - \frac{14}{9}\right]$

   (b) $y'' + 4y' + 4y = 2 - \sin 3x.$
   $\left[y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{12}{169}\cos 3x + \frac{5}{169}\sin 3x + \frac{1}{2}\right]$

   (c) $y'' + 2y' - 8y = 3x\cos 4x.$
   $\left[y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x} + \frac{3}{200}\cos 4x + \frac{57}{1600}\sin 4x - \frac{9}{80}x\cos 4x + \frac{3}{80}x\sin 4x\right]$

4. Vyriešte začiatočné úlohy:

   (a) $y'' + 2y' + 5y = 2\sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0.$
   $$\left[\begin{array}{c} \text{Všeobecné riešenie D.R. : } y(x) = \frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x + C_1(\cos 2x)e^{-x} + C_2(\sin 2x)e^{-x} \\ \text{Riešenie ZÚ: } y(x) = \frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x + \frac{6}{5}(\cos 2x)e^{-x} + \frac{2}{5}(\sin 2x)e^{-x} \end{array}\right]$$

   (b) $y'' + 2y' + y = \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0.$
   $$\left[\begin{array}{c} \text{Všeobecné riešenie D.R. : } y(x) = C_1 e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + C_2 x e^{-x} \\ \text{Riešenie ZÚ: } y(x) = \frac{3}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}xe^{-x} - \frac{1}{2}\cos x \end{array}\right]$$

   (c) $y''+3y'+2y = \sin 3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1.$ $\frac{d}{dx}\left(C_1 e^{-x} - \frac{7}{130}\sin 3x - \frac{9}{130}\cos 3x + C_2 e^{-2x}\right)$
   : $\frac{27}{130}\sin 3x - \frac{21}{130}\cos 3x - C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x}$ $\left[\begin{array}{c} \text{Všeobecné riešenie D.R. : } y(x) = C_1 e^{-x} - \frac{7}{130}\sin 3x - \\ \text{Riešenie ZÚ: } y(x) = \frac{3}{10}e^{-x} + \frac{3}{13}e^{-2x} - \frac{7}{130}\sin 3x \end{array}\right.$

11 Jedenásty týždeň

V úlohách 1 - 17 nájdite Laplaceov obraz funkcie f, ak f je originálom

1. $f(t) = 2e^{3t} + e^{it} + 6t^3 - 7t + 5.$

   $\left[F(p) = \frac{2}{p-3} + \frac{1}{p-i} + \frac{6\cdot 3!}{p^4} - \frac{7}{p^2} + \frac{5}{p}\right]$

2. $f(t) = \sin(5t) + 2\cos(3t) - \sinh t + \cosh(2t).$

   $\left[F(p) = \frac{5}{p^2+25} + \frac{2p}{p^2+9} - \frac{1}{p^2-1} + \frac{p}{p^2-4}\right]$

3. $f(t) = \sin^2(at),\ a \in \boldsymbol{R}.$ $\left[F(p) = \frac{2a^2}{p(p^2+4a^2)}\right]$

4. $f(t) = \sin(at)\cdot\cos(at),\ a \in \boldsymbol{R}.$ $\left[F(p) = \frac{a}{p^2+4a^2}\right]$

5. $f(t) = \sin(at)\cdot\cos(bt),\ a,\ b \in \boldsymbol{R},\ a \neq b.$

   $\left[F(p) = \frac{a\left(p^2+a^2-b^2\right)}{\left[p^2+(a+b)^2\right]\cdot\left[p^2+(a-b)^2\right]}\right]$

6. $f(t) = a^t + \sin(\omega t + \varphi).$

   $\left[F(p) = \frac{1}{p-\ln a} + \frac{\omega}{(p^2+\omega^2)}\cos\varphi + \frac{p}{p^2+\omega^2}\sin\varphi\right]$

7. $f(t) = \sinh(3t).$ $\left[F(p) = \frac{3}{p^2-9}\right]$

8. $f(t) = e^{(1+i)t}\cdot\sinh(3t).$ $\left[F(p) = \frac{3}{[p-(1+i)]^2-9}\right]$

9. $f(t) = a^t,\ a > 0.$ $\left[F(p) = \frac{1}{p-\ln a}\right]$

10. $f(t) = ta^t,\ a > 0.$ $\left[F(p) = \frac{1}{(p-\ln a)^2}\right]$

11. $f(t) = e^{2t}\cdot\cos(3t)\cdot\cos(4t).$

    $\left[F(p) = \frac{1}{2}\frac{p-2}{(p-2)^2+7^2} + \frac{1}{2}\frac{p-2}{(p-2)^2+1}\right]$

12. $f(t) = e^{-t} + e^t\cdot\sin(2t).$ $\left[F(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{2}{(p-1)^2+2^2}\right]$

13. $f(t) = t^2\cos(3t).$ $\left[F(p) = \frac{2p^3-54p}{(p^2+9)^3}\right]$

14. $f(t) = t^2 + 2t + 3 + te^{-5t}.$ $\left[F(p) = \frac{2+2p+3p^2}{p^3} + \frac{1}{(p+5)^2}\right]$

15. $f(t) = t(\cos(2t) + e^{-t}\cdot\sin(2t)).$

    $\left[F(p) = \frac{p^2-4}{(p^2+4)^2} + \frac{4(p+1)}{\left[(p+1)^2+4\right]^2}\right]$

16. $f(t) = t^2\left(e^{-3t} + \sin(2t)\right)$. $\left[F(p) = \frac{2}{(p+3)^3} + \frac{12p^2-16}{(p^2+4)^3}\right]$

17. $f(t) = \int_0^t \sin(\omega\tau)\,d\tau$. $\left[F(p) = \frac{\omega}{p(p^2+\omega^2)}\right]$

V úlohách 18 - 20 použitím vety o posune v originále nájdite Laplaceov obraz funkcie f :

18. $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < b \\ e^{at} & t \geq b \end{cases}$. $\left[\frac{e^{-(p-a)b}}{p-a}\right]$

19. (a) $f(t) = \eta(t)(t-2)^2$. $\left[\frac{2!}{p^3} - \frac{4}{p^2} + \frac{4}{p}\right]$

    (b) $f(t) = \eta(t-2)(t-2)^2$. $\left[e^{-2p}\frac{2!}{p^3}\right]$

    (c) $f(t) = \eta(t-2)\,t^2$. $\left[e^{-2p}\frac{2!}{p^3} + e^{-2p}\frac{4}{p^2} + e^{-2p}\frac{4}{p}\right]$

20. $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin t & t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 1 & t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$. $\left[\frac{p+e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^3+p}\right]$

V úlohách 21 - 22 nájdite Laplaceove obrazy konečných impulzov

21. $f(t) = \begin{cases} 0 & t \notin \langle 1, 4) \\ t-1 & t \in \langle 1, 2) \\ -\frac{t}{2}+2 & t \in \langle 2, 4) \end{cases}$. $\left[\left(e^{-p} - \frac{3e^{-2p}}{2} + \frac{e^{-4p}}{2}\right)\frac{1}{p^2}\right]$

22. $f(t) = \begin{cases} 0 & t \notin \langle 1, 5) \\ t-1 & t \in \langle 1, 2) \\ 1 & t \in \langle 2, 4) \\ 5-t & t \in \langle 4, 5) \end{cases}$. $\left[\left(e^{-p} - e^{-2p} - e^{-4p} + e^{-5p}\right)\frac{1}{p^2}\right]$

V úlohách 23 - 24 nájdite Laplaceov obraz periodickej funkcie

23. $f(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle 2k\pi, (2k+1)\pi) \\ -1 & t \in \langle (2k+1)\pi, (2k+2)\pi) \end{cases}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. $\left[\frac{1-e^{-p\pi}}{p(1+e^{-p\pi})}\right]$

24. $f(t) = |\sin(\omega t)|$, $\omega \in \boldsymbol{R}^+$. $\left[\frac{\omega\left(1+e^{-\frac{p\pi}{\omega}}\right)}{(p^2+\omega^2)\left(1-e^{-\frac{P\pi}{\omega}}\right)}\right]$

V úlohách 25 - 27 nájdite konvolučný súčin funkcií f, g :

25. $f(t) = t$, $g(t) = \cos t$. $[1 - \cos t]$

26. $f(t) = t^2$, $g(t) = t^3$. $\left[\frac{t^6}{60}\right]$

27. $f(t) = e^{at}$, $g(t) = 1 - at$. $[t]$

V úlohách 28 - 36 nájdite originál k funkcii F :

28. $F(p)=\frac{p^2+1}{p^3-p^2-2p}$. $\left[f(t)=-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{5}{6}e^{2t}\right]$

29. $F(p)=\frac{p^2-4p-3}{(p-1)^2(p+2)}$. $\left[f(t)=-2te^{t}+e^{-2t}\right]$

30. $F(p)=\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$. $\left[f(t)=e^{t}-e^{-t}\cos(2t)+\frac{3}{2}e^{-t}\sin(2t)\right]$

31. $F(p)=\frac{-2p^3+2p+5}{5(p^2+2p+2)(p+1)(p-1)}$. $\left[f(t)=\frac{1}{5}e^{-t}\sin t-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{10}e^{t}\right]$

32. $F(p)=\frac{e^{-\pi p}}{p^2+5p+6}$.

$\left[f(t)=\eta(t-\pi)\,e^{-2(t-\pi)}-\eta(t-\pi)\,e^{-3(t-\pi)}\right]$

33. $F(p)=\frac{1-e^{-p}-pe^{-p}}{p^2(1-e^{-p})}$.

$$\left[f(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ t-k & t\in\langle k,k+1),\ k=0,1,\dots \end{cases}\right]$$

34. $F(p)=\frac{1}{p(1+e^{-ap})}$, $a\in\boldsymbol{R}^{+}$.

$$\left[f(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t\in\langle 2ka,(2k+1)\,a) \\ 0 & t\in\langle(2k+1)\,a,(2k+2)\,a),\ k=0,1,\dots \end{cases}\right]$$

35. $F(p)=\frac{1}{p^3-2p^2+9p-18}$.

$\left[f(t)=\frac{1}{39}\left(-2\sin(3t)-3\cos(3t)+3e^{2t}\right)\right]$

36. $F(p)=\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p(p^2+1)}\left(1+e^{-\pi p}\right)$.

$$\left[f(t)=\begin{cases} 1 & t\in\langle 0,\pi) \\ 2-\cos(t-\pi) & t>\pi \end{cases}\right]$$

12 Dvanásty týždeň

V úlohách 1 - 11 vypočítajte pomocou Laplaceovej transformácie riešenie začiatočnej úlohy:

1. $x'''(t) + 2x''(t) + 5x'(t) = 0,\ x(0+) = -1,\ x'(0+) = 2,\ x''(0+) = 0.$
   $\left[x(t) = -\frac{1}{5} - \frac{4}{5}e^{-t}\cos(2t) + \frac{3}{5}e^{-t}\sin(2t)\right]$

2. $x^{(4)}(t) + 2x''(t) + x(t) = 1,\ x(0+) = x'(0+) = x''(0+) = x'''(0+) = 0.$
   $\left[x(t) = 1 - \cos t - \frac{t}{2}\sin t\right]$

3. $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^{3t},\ x(0+) = x'(0+) = 0.$
   $\left[x(t) = \frac{1}{2}e^{t} - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}\right]$

4. $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 2e^{3t},\ x(0+) = x'(0+) = 0.$
   $\left[x(t) = e^{t} - 2e^{2t} + e^{3t}\right]$

5. $x''(t) - x'(t) = te^{t},\ x(0+) = 1,\ x'(0+) = 0.$
   $\left[x(t) = e^{t}\left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right)\right]$

6. $x'(t) + x(t) = t^2e^{-t},\ x(0+) = a.$
   $\left[x(t) = ae^{-t} + \frac{t^3}{3}e^{-t}\right]$

7. $x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = t^3e^{-2t},\ x(0+) = 1,\ x'(0+) = 2.$
   $\left[x(t) = e^{-2t}\left(1 + 4t + \frac{t^5}{20}\right)\right]$

8. $x'''(t) - x''(t) = \sin t,\ x(0+) = x'(0+) = x''(0+) = 0.$
   $\left[x(t) = -1 - t + \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)\right]$

9. $x'(t) + x(t) = f(t),\ x(0+) = 0,\ f(t) = \begin{cases} 0 & t \notin \langle 0, 2) \\ 1 & t \in \langle 0, 2) \end{cases}.$
   $\left[x(t) = 1 - e^{-t} - \eta(t-2)\left(1 - e^{-(t-2)}\right)\right]$

10. $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = f(t),\ x(0+) = x'(0+) = 0,\ f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \in \langle 0, 1) \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}.$
    $\left[x(t) = -2 + t + 2e^{-t} + te^{-t} - \eta(t-1)\left[-2 + (t-1) + 2e^{-(t-1)} + (t-1)e^{-(t-1)}\right]\right]$

11. $x''(t) + x(t) = f(t),\ x(0+) = 1,\ x'(0+) = 0,\ f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ b & t \in \langle 0, a) \\ 2b & t \geq a \end{cases}.$
    $[x(t) = \eta(t)[b + (1-b)\cos t] + \eta(t-a)[b - b\cos(t-a)]]$