Matematika 3

Ľ. Marko

February 9, 2021

CONTENTS

PREDHOVOR

Matematika 3 v novej akreditácii sa zaoberá pojmami z matematickej analýzy funkcií komplexnej premennej, konkrétne základmi Fourierovej , Laplaceovej a Z-transformácie a zo základov matematickej štatistiky. Tento učebný text pre predmet M3 sa zaoberá prvou časťou t.j. základmi Fourierovej, Laplaceovej a Z-transformácie a bol vytvorený pre študijné odbory RK, EN, TLK počas zimného semestra školského roku 2018/2019. Je to minimalistický zápis prednášok. Nemožno ho považovať za konečnú verziu. Pretože predmet "Matematika 3" je "nový predmet", budem text dopĺňať a adaptovať v priebehu ďalších semestrov.
Ľ. Marko

Fourierova transformácia.

Fourierove rady.

Periodická funkcia, spektrálny rozklad.

Nech:

- $f : \langle a, a+T\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}, T>0,$ alebo f je periodická funkcia s periódou T.
- f je integrovateľná tj. $\int_a^{a+T} |f(t)|dt < \infty$.

Fourierov rad funkcie f v komplexnom tvare je rad

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} = \cdots + c_{-2}e^{-2i\omega t} + c_{-1}e^{-i\omega t} + c_0 + c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{2i\omega t} + \cdots ,$$

kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{-in\omega t}dt$.

Fourierove koeficienty funkcie f t.j. $c_n, (n \in \boldsymbol{Z})$ dávajú funkcii $f(t)$ hodnoty, ktoré súvisia s periodickým pohybom $e^{in\omega t}$, tj. s násobnými harmonickými kmitočtami.

Platí: Spojité funkcie integrovateľné s kvadrátom, ktoré majú rovnaké Fourierove koeficienty sú rovnaké. Fourierove koeficienty charakterizujú funkcie vo frekvenčnej oblasti.

Ak je f reálna funkcia, potom $c_{-n} = \overline{c_n}, \forall\ n \in \boldsymbol{N}$.

$f(t)$ je reálna: $c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{-in\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos n\omega t dt - i\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin n\omega t dt,$

$c_{-n} = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{in\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos n\omega t dt + i\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin n\omega t dt$ a teda $c_{-n} = \overline{c_n}$.

Ak je f reálna funkcia, potom môžeme zlúčiť dva komplexne združené členy a dostaneme čisto reálny rad:

Pre $n \geq 1$

$c_n e^{in\omega t} + c_{-n}e^{-in\omega t} = c_n(\cos n\omega t + i\sin n\omega t) + c_{-n}(\cos n\omega t - i \sin n\omega t) =$
$= (c_n + c_{-n}) cos n\omega t + i(c_n - c_{-n})\sin n\omega t = 2\operatorname{Re} c_n \cos n\omega t - 2\operatorname{Im} c_n \sin n\omega t.$

Označme: $a_n = 2\operatorname{Re} c_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos n\omega t dt$, $b_n = -2\operatorname{Im} c_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t) sin n\omega t dt.$

kosínovo-sínový tvar: $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t$, s amplitúdou: $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$.

transformačné vzťahy mezi koeficientami: $n\geq 1$, $a_n=2\operatorname{Re}c_n$, $c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$, $b_n=-2\operatorname{Im}c_n$. $c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$.

Dôležité je, že Fourierove koeficienty umožnia zrekonštruovať funkciu (sú vlastne súradnicami voči nekonečnej báze).

Niekedy je funkcia priamo rovná súčtu svojho Fourierovho radu.

Theorem 1 *(Dirichletova veta.)* *Ak reálna funkcia $f(t)$ s periódou T je po častiach spojitá a má po častiach spojitú deriváciu, potom* $\frac{f(t+)+f(t-)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right)$, *pre všetky* $t\in\boldsymbol{R}$.

Priama a inverzná Fourieova transformácia.

Motiváciou Fourierovej transformácie je spektrálny rozklad všeobecnej neperiodickej funkcie v nekonečnej časovej oblasti (s nekonečne veľkou periódou) kde pôvodnú postupnosť fourierových koeficientov (spektrálnu postupnosť) nahrádzame (spektrálnou) funkciou $F:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{C}$, $F(p)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ipt}dt$, t.j. nediskrétna škála frekvencií, koreluje funkciu s harmonickými funkciami $g(t)=e^{ipt}, p\in\boldsymbol{R}$.

Definition 2 *Nech $f:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{C}$ je komplexná funkcia definovaná na $\boldsymbol{R}$. Funkcia*

$$\mathcal{F}\left\{f\left(t\right)\right\}=\overset{\curlywedge}{f}(p)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ipt}dt, p\in\boldsymbol{R},$$

sa nazýva Fourierova transformácia funkcie f. Funkcia

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{f\left(t\right)\right\}=\overset{\curlyvee}{f}(p)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{ipt}dt, p\in\boldsymbol{R},$$

sa nazýva inverzná Fourierova transformácia funkcie f.

Za definičný obor FT sa považuje množina všetkých $p\in\boldsymbol{R}$, pre ktoré existujú príslušné integrály.

Nevlastný integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt=v.p.\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(t)dt$$

uvažujeme v zmysle hlavnej hodnoty integrálu.

Remark 3 $\mathcal{F}\left\{f\left(t\right)\right\}=\overset{\curlywedge}{f}(p)=2\pi\overset{\curlyvee}{f}(-p)$, *t.j.*.$\overset{\curlyvee}{f}(-p)=\frac{1}{2\pi}\overset{\curlywedge}{f}(p)$.

Označenie a terminológia: $F:f\mapsto\overset{\curlywedge}{f}, F^{-1}:f\mapsto\overset{\curlyvee}{f}$ alebo $\mathcal{F}:f\mapsto\overset{\curlywedge}{f},\mathcal{F}^{-1}:f\mapsto\overset{\curlyvee}{f}$

Fourierova transformácia a inverzná Fourierova transformácia. Iné označenie $\mathcal{F}\left(f\right), f(t)\circeq\overset{\curlywedge}{f}(p), F\{f(t)\}=\overset{\curlywedge}{f}(p)$.

Postačujúca podmienka pre existenciu Fourierovej transformácie je $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|dt<\infty$.

Potom $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)e^{-itp}\right|dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|dt<\infty$. Označenie:
$L^1(\boldsymbol{R})=\{f:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{C}:\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|dt<\infty\}$.

Example 4 *Nájdime obraz funkcie* $f_a(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle -a, a\rangle \\ 0 & t \notin \langle -a, a\rangle \end{cases}$, $a > 0$.

Solution 5 $\mathcal{F}(f_a) = \hat{f}_a(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(t) e^{-itp} dt = \int_{-a}^{a} e^{-itp} dt = \left[\frac{e^{-itp}}{-ip}\right]_{-a}^{a} = \frac{e^{iap} - e^{-iap}}{ip} = 2\frac{\sin ap}{p}$.$\square$

Example 6 *Nájdime inverzný obraz funkcie* $f_a(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle -a, a\rangle \\ 0 & t \notin \langle -a, a\rangle \end{cases}$, $a > 0$.

Solution 7 $\mathcal{F}^{-1}(f_a) = \check{f}_a(p) = \frac{1}{2\pi} \hat{f}_a(-p) = \left(\frac{1}{2\pi} 2\frac{\sin(-ap)}{-p}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(ap)}{p}$.$\square$

Example 8 *Nájdime obraz gaussovskej funkcie* $f(t) = e^{-at^2}, a > 0$.

Solution 9 *Vieme, že* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-itp} dt = \sqrt{\pi} e^{-\frac{p^2}{4}}$, *potom*

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-itp} dt = |u = \sqrt{a}t| =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} e^{-\frac{iup}{\sqrt{a}}} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{p^2}{4a}}.\square$$

Example 10 *Nájdime obraz funkcie, ktorá popisuje vybíjanie kondenzátora* $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, $\alpha > 0$.

Solution 11 $\hat{f}(p) = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-itp} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + ip)t} dt = \left[-\frac{1}{(\alpha + ip)} e^{-(\alpha + ip)t}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{(\alpha + ip)}$.$\square$

Fourierove obrazy racionálnych funkcií.

Fourierove obrazy racionálnych funkcií sú aplikáciou Cauchyho vety o rezíduách. Predpoklady: P a Q sú polynómy, $stQ > stP$ a Q nemá reálne korene: tak máme:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{it} dt = 2\pi i \sum_{\{z\,:\,Q(z)=0, \operatorname{Im} z > 0\}} res \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}$$

Pri výpočte Fourierovej transformácie racionálnej funkcie $\frac{P(t)}{Q(t)}$ je potrebné vypočítať integrály $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{-itp} dt$. Ten pomocou substitúcie prevedieme na horeuvedený tvar integrálu. Substitúcia pre $p \neq 0 : u = -pt, du = -pdt$.

Potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{-itp} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P\left(-\frac{u}{p}\right)}{Q\left(-\frac{u}{p}\right)} e^{iu} \frac{du}{|p|}.$$

Označme $R(z) = \frac{P(-\frac{z}{p})}{Q(-\frac{z}{p})}$ potom máme:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{-itp} dt = \frac{2\pi i}{|p|} \sum_{\left\{z\,:\,Q\left(-\frac{z}{p}\right)=0, \operatorname{Im} z > 0\right\}} res_z R(z)\, e^{iz}.$$

Example 12 *Nájdime obraz funkcie* $f(t) = \frac{1}{t^2+1}$.

Solution 13 $p \neq 0 : R(z) = \frac{1}{\left(-\frac{z}{p}\right)^2+1} = \frac{p^2}{z^2+p^2}$,

$\overset{\curlywedge}{f}(p) = \frac{2\pi i}{|p|} \sum_{\left\{z\,:\,Q\left(-\frac{z}{p}\right)=0, \operatorname{Im} z>0\right\}} res_{z=i|p|} \frac{p^2}{z^2+p^2} e^{iz} = \frac{2\pi i p^2}{|p|} \frac{e^{-|p|}}{2i|p|} = \pi e^{-|p|}$.

Pre $p = 0$ *dopočítame buď zo spojitosti obrazu, alebo z definice:* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1} dt = [\operatorname{arctg} t]_{-\infty}^{\infty} = \pi$.□

Súvislosť Fourierovej transformácie a Fourierovho radu.

Predpokladajme, že $f(t)$ je periodická funkcia s periódou $T > 0$, taká, že $\int_a^{a+T} |f(t)| dt < \infty$. Označme $\mathbf{1}_{\langle a,a+T\rangle}$ charakteristickú funkciu intervalu $\langle a, a+T\rangle$ a $f_T = \mathbf{1}_{\langle a,a+T\rangle} f(t)$.

Pre Fourierov koeficient, c_n funkcie $f(t)$ platí $c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{T} \overset{\curlywedge}{f}_T(n\omega)$.

Theorem 14 *(Veta o inverznej Fourierovej transformácii) Nech* $f \in L^1(\boldsymbol{R})$.

1. Ak je f *spojitá na* $\boldsymbol{R}$ *a* $\overset{\curlywedge}{f} \in L^1(\boldsymbol{R})$, *potom* $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overset{\curlywedge}{f}(p) e^{ipt} dp$, *pre všetky* $t \in \boldsymbol{R}$.

2 Ak sú f *a* f' *po častiach spojité funkcie na* $\boldsymbol{R}$, *potom* $\frac{f(t+)+f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overset{\curlywedge}{f}(p) e^{ipt} dp$ *pre všetky* $t \in \boldsymbol{R}$.

Význam:

$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overset{\curlywedge}{f}(p) e^{ipt} dp$, $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ aproximujúce súčty tohoto integrálu: $\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \overset{\curlywedge}{f}(p_i) (p_{i+1} - p_i) e^{ip_i t}$ sú kombináciou harmonických funkcí $p_i(t) = e^{ip_i t}$ a $\left|\overset{\curlywedge}{f}(p)\right|$ je amplitúda.

Corollary 15 *Dve spojité funkcie z* $L^1(\boldsymbol{R})$ *sú rovnaké, ak majú rovnaké Fourierove transformácie.*

$f, g \in L^1(\boldsymbol{R})$ *spojité* $\widehat{f} = \widehat{g}$. *Pre* $h = f - g$ *máme* $\widehat{h} = 0$ *a teda* $h = 0$.

Example 16 $g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{\sin p}{p} e^{ipt} dp$.

Podľa vety máme $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{ak } t \in (-1, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{ak } t = 1, -1 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$.

Inými slovami inverzný obraz funkcie $h(p) = \frac{2 \sin p}{p}$ je funkcia $g(t)$.Špeciálny prípad $t = 0$ vedie na Newtonov integrál.□

Theorem 17 *Základná gramatika Fourierovej transformácie* $(F(p) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ipt} dt, p \in \boldsymbol{R},\ )$

1. *(posun v originále)* $\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-ipa} \overset{\curlywedge}{f}(p) = e^{-ipa} F(p)$,
2. *(zmena mierky, scaling)*$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} \overset{\curlywedge}{f}\left(\frac{p}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{p}{a}\right), a \neq 0$,
3. *(pravidlo konjugácie)* $\mathcal{F}\{\overline{f(-t)}\} = \overline{\overset{\curlywedge}{f}(p)} = \overline{F(p)}$,
4. *(posun v obraze, modulácia vzoru)* $\mathcal{F}\{e^{iat} f(t)\} = \overset{\curlywedge}{f}(p-a) = F(p-a)$.

1. $\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-ipa}\overset{\curlywedge}{f}(p) : \mathcal{F}\{f(t-a)\}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-ipt}dt = |u = t-a| =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ip(u+a)}du = e^{-ipa}\overset{\curlywedge}{f}(p).$

2. $\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}\overset{\curlywedge}{f}(\frac{p}{a}) : \mathcal{F}\{f(at)\}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-ipt}dt = |u = at| =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-\frac{ipu}{a}}\frac{1}{|a|}du = \frac{1}{|a|}\overset{\curlywedge}{f}(\frac{p}{a}).$

3. $\mathcal{F}\{\overline{f(-t)}\}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-t)}e^{-ipt}dt = |u = -t| = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)}e^{ipu}du =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)\, e^{-ipu}}du = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-ipu}du} = \overline{\overset{\curlywedge}{f}(p)}.$

4. $\mathcal{F}\{e^{iat}f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iat}f(t)e^{-ipt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(p-a)t}dt = \overset{\curlywedge}{f}(p-a).$

Example 18 *Vypočítajme* $\mathcal{F}(f)$, *ak* $f(t) = e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}$ $\quad$ *(* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}e^{-itp}dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{p^2}{4a}}$ *)*

Solution 19 $\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}\} = e^{-ip}\sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}p^2}.\square$

Example 20 *Vypočítajme* $\mathcal{F}(f)$, *ak* $f(t) = \sin te^{-t^2}$.

Solution 21 $\sin te^{-t^2} = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}e^{-t^2} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{2i}\sqrt{\pi}\left(e^{-\frac{(p-1)^2}{4}} - e^{-\frac{(p+1)^2}{4}}\right).\square$

Example 22 *Predpokladajme, že platí veta o inverznej Fourierovej transformácii. Aké reálne funkcie majú reálny Fourierov obraz?*

Solution 23 $\overset{\curlywedge}{f}(p) = \overline{\overset{\curlywedge}{f}(p)}$ *a tak* $f(-t) = f(t)$. *Sú to párne funkcie.*$\square$

Example 24 *Vypočítajme obraz funkcie* $g(t) = f(2t-3)$ *pomocou obrazu funkcie* $f(t)$.

Solution 25 $\mathcal{F}\{f(t)\} = \overset{\curlywedge}{f}(p) \Longrightarrow \mathcal{F}\{f(t-3)\} = e^{-3ip}\overset{\curlywedge}{f}(p) \Longrightarrow \mathcal{F}\{f(2t-3)\} =$
$= \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}ip}\overset{\curlywedge}{f}(\frac{p}{2}).\square$

Theorem 26 *(Riemannova-Lebesgueova lemma) Ak je* $f \in L^1(\boldsymbol{R})$, *potom je* $\overset{\curlywedge}{f}$ *spojitá funkcia a* $\lim_{p\to\pm\infty}\overset{\curlywedge}{f}(p) = 0$.

Theorem 27 *(Obraz derivácie) Nech* $f(t)$ *je spojite diferencovateľná funkcia a* $f,\ f' \in L^1(\boldsymbol{R})$. *Potom* $\mathcal{F}\{f'(t)\}(p) = ip\overset{\curlywedge}{f}(p)$.

$$f' \in L^1(\boldsymbol{R}) \Longrightarrow \int_0^\infty f'(t)dt = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0). \text{ T.j. existuje limita } \lim_{t\to\infty} f(t).$$

Táto limita musí byť rovná nule, pretože $f \in L^1(\boldsymbol{R})$.

Použitím metódy per partes dostaneme $\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-ipt}dt = [f(t)e^{-ipt}]_{t=-\infty}^{t=\infty} +$
$ip\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ipt}dt = ip\overset{\curlywedge}{f}(p).$

Example 28 *Vypočítajme obraz* $f\,'$, *ak* $f\ (t) = e^{-at^2}, a > 0.$

Solution 29 *Platí:* $f\,'(t) = -2ate^{-at^2} \mathrel{\overset{\circ}{=}} ip\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{p^2}{4a}}.\square$

Corollary 30 *Ak sú* $f,\ f\,', ..., f^{(k)}$ *spojité funkce z* $L^1(\boldsymbol{R})$ *potom* $f^{(k)}(t) \mathrel{\overset{\circ}{=}} (ip)^k \overset{\curlywedge}{f}(p)$ *a podľa Riemannovej-Lebesgueovej lemmy* $\lim_{|p|\to\infty} p^k \overset{\curlywedge}{f}(p) = 0.$

Theorem 31 *(Derivácia obrazu) Nech* $f\,(t) \in L^1(\boldsymbol{R})$ *a* $tf\,(t) \in L^1(\boldsymbol{R})$, *potom* $\mathcal{F}\{tf(t)\}(p) = i\frac{d}{dp}\overset{\curlywedge}{f}(p).$

Example 32 *Vypočítajme Fourierovu transformáciu funkcie* $f(t) = te^{-\frac{t^2}{2}}.$

Solution 33 $te^{-\frac{t^2}{2}} \mathrel{\overset{\circ}{=}} i\frac{d}{dp}\left(\sqrt{2\pi}e^{-\frac{p^2}{2}}\right) = -i\sqrt{2\pi}pe^{-\frac{p^2}{2}}.\square$

Konvolúcia je operácia na množine integrovateľných funkcií. Motivácia: Čo odpovedá vo Fourierovej transformácii súčinu funkcií?

Definition 34 *Nech* $f, g \in L^1(\boldsymbol{R})$. *Konvolúcia funkcií f a g je funkcia* $h = f * g$ *daná vzťahom* $(f * g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds.$

Example 35 *Určme konvolúciu* $h = f_a * f_a$, *kde* f_a *je bránová funkcia.*

Solution 36 $h(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_a(s)f_a(t-s)ds$. *Integrujeme cez prienik intervalov* $\langle -a, a\rangle$ *a* $\langle t-a, t+a\rangle$. $h(t) = \begin{cases} 0 & t < -2a \\ t+2a & t \in \langle -2a, 0\rangle \\ 2a-t & t \in \langle 0, 2a\rangle \\ 0 & t > 2a \end{cases}$ $.\square$

Theorem 37 *(Obraz konvolúcie) Nech* $f, g \in L^1(\boldsymbol{R})$. *Potom pre* $h = f * g$ *platí* $\overset{\curlywedge}{h}(p) = \overset{\curlywedge}{f}(p)\overset{\curlywedge}{g}(p).$

Dôkaz je založený na zámene poradia integrovania:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\overbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds)}^{h(t)}e^{-ipt}dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(\overbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t-s)e^{-i(t-s)p}dt)}^{|u=t-s|}f(s)e^{-isp}ds =$$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-iup}du\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-isp}ds\right) = \overset{\curlywedge}{g}(p)\overset{\curlywedge}{f}(p).$$

Example 38 *Vypočítajme fourierov obraz trojuholníka* $f(t) = \begin{cases} 0 & t < -2a \\ t+2a & t \in \langle -2a, 0 \rangle \\ 2a - t & t \in \langle 0, 2a \rangle \\ 0 & t > 2a \end{cases}$.

Solution 39 $f(t) = f_a(t) * f_a(t)$. *Podľa vety o obraze konvolúcie:* $\hat{f}(p) = \left(\frac{2\sin ap}{p}\right)^2 = \frac{4\sin^2 ap}{p^2}$.$\square$

Example 40 *Vypočítajme konvolúciu* $e^{-at^2} * e^{-bt^2}, a, b > 0$.

Solution 41 *Fourierova transformácia konvolúcie:* $\mathcal{F}\left(e^{-at^2} * e^{-bt^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{p^2}{4a}} . \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{p^2}{4b}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} e^{-\frac{p^2}{4\left(\frac{ab}{a+b}\right)}}$.$\square$

Inverzná Fourierova transformácia: $\sqrt{\frac{\pi}{a+b}} e^{-\frac{ab}{a+b}t^2}$.$\square$

Example 42 *Riešme diferenciálnu rovnicu* $y''(t) - y(t) = e^{-t^2}$.

Solution 43 *Fourierova transformácia:* $-p^2 \overset{\curlywedge}{y}(p)(p) - \overset{\curlywedge}{y}(p) = F\{e^{-t^2}\}(p)$.

$-y(t) = \left[e^{-t^2} * F^{-1}\left(\frac{1}{1+p^2}\right)\right](t)$.

$F^{-1}\left(\frac{1}{1+p^2}\right)(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$.

$y(t) = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-s|} e^{-s^2} ds$.

Fourierova transformácia je základom odborov: teória signálov, harmonická analýza, kvantová mechanika, waveletová analýza, parciálne diferenciálne rovnice atď.

Cvičenia.

V úlohách 1 - 17 zistite, či sú nasledujúce funkcie z priestoru $L^1(\boldsymbol{R})$ a nájdite ich Fourierove obrazy

1. $f(t) = e^{-a|t|}, a > 0.$

   $\left[\frac{2a}{p^2+a^2}\right]$

2. $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{ak } |t| \le a \\ 0, & \text{ak } |t| > a > 0 \end{cases}.$

   $\left[\begin{array}{ll} \frac{2}{p}\sin pa, & \text{ak } p \ne 0 \\ 2a, & \text{ak } p = 0 \end{array}\right]$

3. $f(t) = \frac{1}{t^2+a^2}$, $a \in \boldsymbol{R}$. $\left[\frac{\pi}{a}e^{-a|p|}\right]$

4. $f(t) = e^{-at} \cdot \mathbf{1}(t)$. $\left[F(p) = \frac{1}{a+ip}\right]$

5. $f(t) = \frac{1}{(t^2+4)(t^2+9)}$. $\left[F(p) = \frac{\pi}{5}\left(\frac{e^{-2|p|}}{2} - \frac{e^{-3|p|}}{3}\right)\right]$

6. $f(t) = e^{-\alpha(t-1)^2}, \alpha > 0.$ $\left[e^{-ip}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}e^{-\frac{p^2}{4\alpha}}\right]$

7. $f(t) = \sin t \cdot e^{-\alpha t^2}, \alpha > 0.$ $\left[\frac{-i}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}\left(e^{-\frac{(p-1)^2}{4\alpha}} - e^{-\frac{(p+1)^2}{4\alpha}}\right)\right]$

8. $f(t) = te^{-\alpha t} \cdot \mathbf{1}(t), \alpha > 0.$ $\left[\frac{1}{(\alpha+ip)^2}\right]$

9. $f(t) = t^2e^{-\alpha t^2}, \alpha > 0.$ $\left[F(p) = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left(e^{-\frac{p^2}{4\alpha}} - \frac{p^2}{2\alpha}e^{-\frac{p^2}{4\alpha}}\right)\right]$

10. Určte inverznú Fourierovu transformáciu funkce $g(p) = e^{i\omega p}(1(p-a) - 1(p-b)), a < b$. $\left[f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(\omega+t)b} - e^{i(\omega+t)a}}{i(\omega+t)}\right]$

11. Aké funkcie majú súčasne reálny vzor aj obraz vo Fourierovej transformácii? [párne funkcie]

12. Pomocou Fourierovho obrazu funkcie $f(t)$ určte Fourierov obraz funkce $g(t) = f(3t-2)$. $\left[\overset{\curlywedge}{g}(p) = e^{-\frac{2}{3}ip}\frac{1}{3}\overset{\curlywedge}{f}(\frac{p}{3})\right]$

13. Pomocou Fourierovho obrazu funkcie $f(t)$ určte Fourierov obraz funkce $g(t) = tf(2t+1)$. $\left[\overset{\curlywedge}{g}(p) = \frac{i}{2}e^{i\frac{p}{2}}\left(\frac{i}{2}\overset{\curlywedge}{f}(\frac{p}{2}) + \frac{1}{2}f'(\frac{p}{2})\right)\right]$

14. Pomocou Fourierovho obrazu funkcie $f(t)$ určte Fourierov obraz funkce $g(t) = e^{-it}f'(2t-1)$. $\left[\overset{\curlywedge}{g}(p) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}i(p+1)}i\frac{p+1}{2}\overset{\curlywedge}{f}(\frac{p+1}{2})\right]$

15. Je daná funkcia $f(t) = \frac{t}{t^2+r^2}, r > 0$.

    a) Vypočítajte Fourierovu transformáciu funkcie $f(t)$ a nakreslite graf jej imaginárnej časti.

    b) Vypočitajte Fourierovu transformáciu funkce $f(t)\sin 2t$.

    c) Vypočítajte inverznú Fourierovu transformáciu funkcie $f(t)$.

$$\left[\begin{array}{c} a) F(p) = -\operatorname{sign}(p)\pi e^{-|p|r} i \\ b) F(p) = \frac{1}{2i}\overset{\curlywedge}{f}(p-2) - \frac{1}{2i}\overset{\curlywedge}{f}(p+2) \\ c) \operatorname{sign}(p)\pi e^{-|p|r} i \frac{1}{2\pi} \end{array}\right]$$

16. Pomocou vety o rezíduách vypočítajte $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t^2+1)(t^2+2)} e^{-ipt} dt$.

    a) Pomocou tohto výsledku určte Fourierov obraz nasledujúcich funkcií:

    1) $f(t) = \frac{1}{(4t^2+1)(4t^2+2)}$,

    2) $g(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{(t^2+1)(t^2+2)}$.

$$\left[\begin{array}{l} \pi\left(e^{-|p|} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|p|}\right), \\ 1)\ \frac{\pi}{2}e^{-\frac{|p|}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}\frac{|p|}{2}}, \\ 2)\ ip\pi\left(e^{-|p|} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|p|}\right) \end{array}\right]$$

17. Určte funkciu $f(t)$, pre ktorú platí $f(t) * e^{-at^2} = e^{-bt^2}, a > b > 0$.

$$\left[f(t) = \frac{a}{\sqrt{\pi(a-b)}} e^{-\frac{ab}{a-b}t^2}\right]$$

18. Riešte pomocou F-transformácie diferenciálnu rovnicu $-\frac{d^2u(x)}{dx^2} + a^2u(x) = f(x), -\infty < x < \infty, a > 0$.

$$\left[u(x) = \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-a|x-s|} ds\right]$$

Laplaceova transformácia.

Operačný počet sa stal jednou z dôležitých častí matematickej analýzy, považuje sa za abecedu automatizácie. Metódy operačného počtu sa používajú pri riešení obyčajných diferenciálnych rovníc a systémov obyčajných diferenciálnych rovníc. Možno ich však použiť aj pri riešení parciálnych diferenciálnych rovníc.

Základom tzv. operačného počtu je buď Carsonova transformácia, ktorá zobrazí funkciu $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(t)$ na funkciu komplexnej premennej $K(p)$ pomocou formuly

$$K(p) = p\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt \tag{(1)}$$

alebo integrálna Laplaceova transformácia, ktorá zobrazí funkciu $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(t)$ na funkciu komplexnej premennej p - $F(p)$ pomocou formuly

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[f(t)] = F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt \tag{(2)}$$

kde t je reálna premenná a $p = \alpha + i\beta$ je komplexná premenná.

Komplexná alebo reálna funkcia reálneho argumentu $f(t)$ sa nazýva originál a jej obraz, funkcia komplexnej premennej $F(p)$, sa na nazýva Laplaceovým zobrazením (transformáciou) funkcie $f(t)$.

Zo vzťahov (1) a (2) je vidieť, že medzi Carsonovou a Laplaceovou transformáciou platí vzťah

$$pF(p) = K(p).$$

Preto sa budeme zaoberať Laplaceovou transformáciou. Na označenie toho, že $F(p)$ je Laplaceovou transformáciou $f(t)$, budeme používať zápis $F(p) = \boldsymbol{\mathcal{L}}[f(t)]$. Pre každý z týchto symbolických zápisov budeme malými písmenami označovať originály, veľkými písmenami ich Laplaceove obrazy. Laplaceova transformácia je charakteristická tým, že mnohým operáciám s originálmi $f(t)$ zodpovedajú omnoho jednoduchšie operácie s ich obrazmi. Najskôr definujeme, čo rozumieme pod pojmom (Laplaceov) originál.

Definition 44 *Funkciu $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ nazývame (Laplaceovým) originálom ak*

1. *funkcia $f(t)$ je po častiach spojitá,*
2. $f(t) = 0$ *pre* $t < 0$,
3. *existuje $M > 0$ reálne a $\alpha \in \boldsymbol{R}$ také, že platí odhad*

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t},\ \forall t \in \boldsymbol{R} \tag{(3)}$$

Množinu všetkých originálov označíme symbolom $\mathcal{A}$.

Ak je funkcia f originál, tak hodnotu

$$\alpha_0 = \inf\left\{\alpha \in \boldsymbol{R}; |f(t)| \leq M_\alpha e^{\alpha t},\ \forall\, t \in \boldsymbol{R}\right\}$$

nazývame indexom rastu funkcie f. Originál f má index rastu $\alpha = -\infty$, ak pre každé $\alpha \in \boldsymbol{R}$ existuje konštanta M_α s vlastnosťou

$$|f(t)| \leq M_\alpha e^{\alpha t},\ \forall t \in \boldsymbol{R}.$$

Example 45 *Funkcia* $\Theta : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *definovaná predpisom*

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & ak \quad t < 0 \\ 1 & ak \quad t \geq 0 \end{cases},$$

nazývaná Heavisideova funkcia (funkcia jednotkového skoku) je originál s indexom rastu $\alpha_0 = 0$, *pretože*

$$|\Theta(t)| \leq 1e^{\alpha t},\ \forall \alpha > 0,\ \forall t \in \boldsymbol{R}.$$

Ak ľubovoľnú funkciu $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ vynásobíme Heavisideovou funkciou Θ, tak dostaneme funkciu rovnú nule na zápornej časti reálnej osi.

Example 46 *Ak* $n \in \boldsymbol{N}$, *tak funkcia* $f(t) = \Theta(t)\, t^n$ *je originál s indexom rastu* $\alpha_0 = 0$. *Vyplýva to zo vzťahu*

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{\alpha t}} = 0,\ \forall\, \alpha > 0 \Longrightarrow |\Theta(t)\, t^n| \leq \varepsilon e^{\alpha t},\ \forall t \geq T \Longrightarrow |\Theta(t)\, t^n| \leq M e^{\alpha t},\ \forall t \in \boldsymbol{R}.$$

Example 47 *Funkcia* $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}, f(t) = \Theta(t) \frac{1}{t-2}$ *nie je originálom, pretože v bode* $t = 2$ *nemá konečnú limitu ani sprava, ani zľava, teda nie je splnená vlastnosť (3) originálu.*

Example 48 *Funkcia* $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(t) = \Theta(t)\, e^{t^3}$ *nie je originál, pretože*

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{e^{t^3}}{e^{\alpha t}} = \infty\,,\ \forall \alpha \in \boldsymbol{R},$$

čo implikuje, že nie je splnená vlastnosť (3) originálu.

Teraz ukážeme, že podmienka (3) zabezpečuje absolútnu konvergenciu integrálu (2), keď $\operatorname{Re} p > \alpha_0$.

Theorem 49 *Pre každý originál* $f(t)$ *je zobrazenie* $F(p)$ *definované vzťahom (2) v polrovine* $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, *kde* α_0 *je index rastu funkcie* $f(t)$, *analytickou funkciou, pričom*

$$F'(p) = -\int_0^\infty t f(t)\, e^{-pt} dt,\ \operatorname{Re} p > \alpha_0 \quad a \quad \lim_{\operatorname{Re} p \longrightarrow \infty} F(p) = 0.$$

Example 50 *Nájdite obraz Heavisideovej funkcie.*

Solution 51 *V príklade 45 sme ukázali, že funkcia* Θ *je originál s indexom rastu* $\alpha_0 = 0$. *Teda Laplaceov obraz bude existovať pre* $\operatorname{Re} p > 0$ *a máme*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[\Theta(t)] = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt}\right]_0^\infty = \frac{1}{p}.\ \square$$

Vlastnosti Laplaceovej transformácie.

Theorem 52 *(Lineárnosť Laplaceovej transformácie) Nech* $f(t), g(t)$ *sú originály,* $\mathcal{L}[f] = F$ *a* $\mathcal{L}[g] = G$, *potom pre každé* $\lambda, \vartheta \in \boldsymbol{C}$ *platí*

$$\mathcal{L}[\lambda f(t) + \vartheta g(t)] = \lambda F(p) + \vartheta G(p).$$

Theorem 53 *(O derivácii obrazu) Nech* f *je originál s indexom rastu* α_0, $F = \mathcal{L}(f)$ *a* $n \in \boldsymbol{N}$. *Potom aj funkcia* $g : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $g(t) = t^n f(t)$ *je originál s indexom rastu* α_0 *a*

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(p), \ \mathrm{Re}\, p > \alpha_0.$$

Example 54 *Nájdite obraz funkcie* $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(t) = \Theta(t)\, t^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Solution 55 *Podľa predchádzajúcej vety o derivácii obrazu sú funkcie* $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(t) = \Theta(t)\, t^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *originály s indexom rastu* $\alpha_0 = 0$, *pričom*

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}, \ \mathrm{Re}\, p > 0. \square$$

Theorem 56 *(O posunutí v obraze) Nech* f *je originál s indexom rastu* α_0, $a \in \boldsymbol{C}$ *a* $\mathcal{L}(f) = F$. *Potom funkcia*

$$g : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}, \ g(t) = e^{at} f(t)$$

je originál s indexom rastu $\alpha_0 + \mathrm{Re}\, a$, *pričom*

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(p-a), \ \mathrm{Re}\, p > \alpha_0 + \mathrm{Re}\, a.$$

Example 57 *Nájdite obraz funkcií* $f, h : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(t) = e^{at}$, $h(t) = t^n e^{at}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Solution 58 *Podľa vety o posunutí v obraze máme*

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \frac{1}{p-a}, \ \mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, a.$$

$$\mathcal{L}\left[t^n e^{at}\right] = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}, \ \mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, a. \square$$

Example 59 *Nájdite obraz funkcií* $\cos t, \sin t$.

Solution 60 *Platí*

$$\mathcal{L}[\cos t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}\right) = \frac{p}{p^2+1}, \ \mathrm{Re}\, p > 0.$$

$$\mathcal{L}[\sin t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right] = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i}\right) = \frac{1}{p^2+1}, \ \mathrm{Re}\, p > 0. \square$$

Theorem 61 *(Veta o zmene mierky) Nech f je originál s indexom rastu α_0, $b \in \boldsymbol{R}^+$ a $\boldsymbol{\mathcal{L}}[f] = F$. Potom*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[f(bt)] = \frac{1}{b}F\left(\frac{p}{b}\right), \operatorname{Re}\left(\frac{p}{b}\right) > \alpha_0.$$

Example 62 *Nájdite obraz funkcií* $\cos(\omega t), \sin(\omega t), \omega > 0.$

Solution 63 *Platí*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[\cos(\omega t)] = \frac{1}{\omega}\frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \operatorname{Re} p > 0.$$

podobne

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \operatorname{Re} p > 0. \square$$

Posun v originále.

Ak $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je originál s indexom rastu α_0 a $\tau \in \boldsymbol{R}$ definujeme funkciu $f_\tau : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ vzťahom $f_\tau(t) = \Theta(t-\tau)f(t-\tau)$.

Theorem 64 *(Veta o posune v originále) Nech f je originál s indexom rastu α_0, $\tau \in \boldsymbol{R}$ a $\boldsymbol{\mathcal{L}}[f] = F$. Potom aj posunutá funkcia f_τ, $\tau > 0$ je originál s indexom rastu α_0 a platí*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[\Theta(t-\tau)f(t-\tau)] = e^{-\tau p}F(p), \operatorname{Re} p > \alpha_0.$$

Pomocou vety o obraze posunutej funkcie môžme dostať obrazy funkcií, ktoré sa často používajú v elektrotechnike ako sú napríklad konečné impulzy.

Example 65 *Nájdite obraz obdĺžnikového impulzu - funkcie f, ktorá má tvar*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ak \quad t < 0 \\ M & ak \quad 0 \le t < a \\ 0 & ak \quad t > a \end{cases}.$$

Solution 66 *Funkciu f možno vyjadriť v tvare*

$$f(t) = M[\Theta(t-a) - \Theta(t-b)], t \in \boldsymbol{R}.$$

Potom

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[f(t)] = \frac{M}{p}\left(e^{-ap} - e^{-bp}\right), \operatorname{Re} p > 0. \square$$

Example 67 *Nájdite obraz lichobežníkového impulzu - funkcie f, ktorá má tvar*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ak \quad t < a \\ M\frac{t-a}{b-a} & ak \quad a \le t < b \\ M & ak \quad b \le t < c \\ M\frac{d-t}{d-c} & ak \quad c \le t < d \\ 0 & ak \quad d \le t \end{cases}.$$

Solution 68 *Funkciu f možno vyjadriť v tvare*

$$f(t)=\frac{M}{b-a}(t-a)\left[\Theta(t-a)-\Theta(t-b)\right]+M\left[\Theta(t-b)-\Theta(t-c)\right]+$$

$$+\frac{M}{d-c}(d-t)\left[\Theta(t-c)-\Theta(t-d)\right],$$

čo prepíšeme do takého tvaru, aby bolo možné použiť vetu o posune v originále:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{M}{b-a}\left[(t-a)\Theta(t-a)-(t-b)\Theta(t-b)+(a-b)\Theta(t-b)\right]+ \\ &\quad +M\left[\Theta(t-b)-\Theta(t-c)\right]+ \end{aligned}$$

$$+\frac{M}{d-c}\left[-(t-c)\Theta(t-c)+(d-c)\Theta(t-c)+(t-d)\Theta(t-d)\right].$$

Potom

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\left[f(t)\right]=F(p)=\frac{M}{p^2}\left(\frac{e^{-ap}-e^{-bp}}{b-a}+\frac{e^{-dp}-e^{-cp}}{d-c}\right),\ \operatorname{Re}p>0.\square$$

Example 69 *Nájdite obraz sínusového impulzu - funkcie f, ktorá má tvar*

$$f(t)=\begin{cases} 0 & ak & t<0 \\ \sin t & ak & 0\leq t<\pi \\ 0 & ak & \pi\leq t \end{cases}.$$

Solution 70 *Funkciu f možno vyjadriť v tvare*

$$f(t)=\Theta(t)\sin t+\Theta(t-\pi)\sin(t-\pi).$$

Potom

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\left[f(t)\right]=F(p)=\left(1+e^{-\pi p}\right)\frac{1}{p^2+1},\ \operatorname{Re}p>0.\square$$

Obraz periodickej funkcie.

Theorem 71 *(Veta o obraze periodickej funkcie) Ak $f_1:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{C}$ je nenulová po častiach periodická funkcia s periodou T, tak funkcia $f:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{C}$, $f(t)=\Theta(t)f_1(t)$ je originál s indexom rastu $\alpha_0=0$ a platí vzťah*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\left[f(t)\right]=\frac{\int_0^T f(t)\,e^{-pt}dt}{1-e^{-pT}}=\frac{F_T(p)}{1-e^{-pT}},\ \operatorname{Re}p>0,$$

kde F_T je obraz konečného impulzu $f_{\langle 0,T\rangle}$: $f_{\langle 0,T\rangle}(t)=\begin{cases} 0 & ak & t<0 \\ f(t) & ak & 0\leq t<T \\ 0 & ak & T\leq t \end{cases}$.

Example 72 *Nájdite obraz funkcie $f:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{C}$, $f(t)=\Theta(t)\left|\sin t\right|$.*

Solution 73 *Funkcia* $f_1 : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f_1(t) = |\sin t|$ *má periodu* $T = \pi$. *Použitím predchádzajúcej vety pre* $\boldsymbol{\mathcal{L}}[f] = F$ *máme*

$$F(p) = \frac{F_\pi(p)}{1 - e^{-\pi p}}, \ \operatorname{Re} p > 0,$$

kde F_π *je obraz funkcie* $f_{\langle 0,\pi\rangle}$ *danej predpisom:*

$$f_{\langle 0,T\rangle}(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & ak & t < 0 \\ \sin t & ak & 0 \le t < \pi \\ 0 & ak & \pi \le t \end{array} \right. .$$

V predchádzajúcom príklade 72 sme našli obraz F_π *v tvare:*

$$F_\pi(p) = \left(1 + e^{-\pi p}\right) \frac{1}{p^2+1}, \ \operatorname{Re} p > 0,$$

potom

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[|\sin t|] = \frac{1 + e^{-\pi p}}{(p^2+1)(1 - e^{-\pi p})}, \ \operatorname{Re} p > 0. \square$$

Example 74 *Nájdite obraz pílovitej funkcie* $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$,

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & ak & t < 0 \\ a(t - kT) & ak & kT \le t < (k+1)T, \ k = 0,1,2,\ldots \end{array} \right. .$$

Solution 75 *Pretože:*

$$f_{\langle 0,T\rangle}(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & ak & t < 0 \\ at & ak & 0 \le t < T \\ 0 & ak & T \le t \end{array} \right. .$$

máme

$$f_{\langle 0,T\rangle}(t) = [\Theta(t) - \Theta(t-T)]\, at = at\Theta(t) - a(t-T)\Theta(t-T) - aT\Theta(t-T)$$

a

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\left[f_{\langle 0,T\rangle}\right] = F_T(p) = a\left[\frac{1}{p^2}(1 - e^{-pT}) - \frac{T}{p}e^{-pT}\right]$$

potom

$$F(p) = \frac{F_T(p)}{1 - e^{-pT}} = \frac{a}{p}\left(\frac{1}{p} + \frac{Te^{-pT}}{e^{-pT} - 1}\right), \ \operatorname{Re} p > 0. \square$$

Theorem 76 *(Laplaceov obraz radu) Nech* $f(t) \in \mathcal{A}$, *nech platí:*

1) $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $\forall t \ge 0$,

2) Rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{p^{n+1}}$ *konverguje v nejakom okolí nekonečna. Potom pre Laplaceov obraz* $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ *platí*

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tfrac{n!}{p^{n+1}}.$$

Example 77 *Nájdime LT* $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.

Solution 78 *Máme* $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$. *Keď skúmame konvergenciu radu* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2n+1)! p^{2n+1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) p^{2n+1}}$, *tento rad konverguje pre* $|p| > 1$. *Potom* $F(p) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) p^{2n+1}}$, *pre* $\operatorname{Re} p > 1$. $\square$

Theorem 79 *(Veta o obraze derivácie) Ak* $f : \langle 0, \infty) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je* k*-krát spojite diferencovateľná na* $\langle 0, \infty)$ *a jej derivácia rádu* $k-1$ *je po častiach spojite diferencovateľná, pričom funkcie* $f, f', f'', \dots, f^{(k-1)}, f^{(k)}$ *sú originály s indexom rastu* α_0, *potom ak* $F(p) = L[f(t)]$, *platí*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\left[f^{(k)}(t)\right] = p^k F(p) - p^{k-1} f(0+) - p^{k-2} f'(0+) - \cdots - f^{(k-1)}(0+).$$

Theorem 80 *(O integrovaní originálu) Ak* $f : \langle 0, \infty) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je originál s indexom rastu* α_0 *a* $g : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $g(t) = \int_0^t f(s)\, ds$, *potom ak* $F(p) = \boldsymbol{\mathcal{L}}[f(t)]$, *platí*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\left[\int_0^t f(s)\, ds\right] = \frac{F(p)}{p}, \ \operatorname{Re} p > \alpha_0 > 0.$$

Definition 81 *Nech* $f, g : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *sú po častiach spojité funkcie. Funkciu*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)\, g(t-s)\, ds, \ t \in \boldsymbol{R}$$

nazývame konvolúciou funkcií f, g.

Pre konvolučný súčin platí

$$f * g = g * f, \ f * (g * h) = (f * g) * h, \ f * (g + h) = f * g + f * h$$

Theorem 82 *Nech* f, g *sú originály s indexami rastu* α_0, β_0. *Potom* $f * g$ *je originál s indexom rastu* $\gamma_0 = \max\{\alpha_0, \beta_0\}$ *a platí*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[(f * g)(p)] = \boldsymbol{\mathcal{L}}[f](p)\, \boldsymbol{\mathcal{L}}[g](p), \ \operatorname{Re} p > \max\{\alpha_0, \beta_0\}.$$

Example 83 *Nech* $f, g : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(t) = e^t \cos 2t$, $g(t) = e^t \sin 2t$. *Nájdite* $(f * g)(t)$ *a jej Laplaceov obraz.*

Solution 84 *Pretože* $(f * g)(t) = \int_0^t f(s)\, g(t-s)\, ds$, *dostávame*

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t e^s \cos 2s \cdot e^{t-s} \sin 2(t-s)\, ds = \\ &= e^t \int_0^t \sin 2(t-s) \cos 2s ds = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}e^t \int_0^t [\sin 2(t-2s) + \sin 2t]\, ds = \frac{1}{2}e^t t \sin 2t.$$

a pre Laplaceov obraz dostávame

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}e^t t \sin 2t\right] &= \mathcal{L}\left[e^t \cos 2t\right] \mathcal{L}\left[e^t \sin 2t\right] = \\ &= \frac{p-1}{(p-1)^2+2^2} \frac{2}{(p-1)^2+2^2} = \frac{2(p-1)}{\left[(p-1)^2+4\right]^2}. \square \end{aligned}$$

Inverzná Laplaceova transformácia.

Medzi Fourierovou a Laplaceovou transformáciou je úzka súvislosť. Z teórie Fourierovho integrálu je známe, že ak f je spojitá s počastiach spojitou deriváciou a $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$ potom v ľubovoľnom bode, v ktorom je funkcia $f(t)$ spojitá, môžme ju vyjadriť v tvare

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx\right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega,$$

kde $F = \mathcal{F}(f)$ a ak je bod $t = t_0$ bod nespojitosti s konečnými limitami sprava a zľava, potom

$$\frac{f(t_0+) + f(t_0-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx\right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega,$$

Podmienka absolútnej integrovateľnosti funkcie $f(t)$ na intervale $(-\infty, \infty)$, t.j. existencie integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ je veľmi silná, preto trieda funkcií, ktoré sa dajú vyjadriť Fourierovým integrálom nie je široká. Aj také jednoduché funkcie ako napríklad $f(t) = const$ alebo $f(t) = \Theta(t)$ nespĺňajú túto podmienku.

Ak miesto funkcie $f(t)$ uvažujeme funkciu $f(t)\, e^{-i\alpha t}$, pričom predpokladáme, že $f(t) = 0$ pre $t < 0$, potom pre $\alpha > \alpha_0$, kde α_0 je index rastu funkcie $f(t)$ bude integrál $\int_0^{\infty} |f(t)\, e^{-\alpha t} dt|$ konvergovať pre širokú triedu funkcií a platí

$$e^{-\alpha t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau\right) e^{i\omega t} d\omega.$$

Výrazy, ktoré sme dostali možno zapísať aj inak. Ak položíme $p = \alpha + i\omega$ a $d\omega = \frac{dp}{i}$, tak dostaneme:

Platí vzťah (my ho nebudeme dokazovať, pretože plynie z vlastností Fourierovho integrálu)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \left(\int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau\right) e^{pt} dp,$$

odkiaľ pretože

$$L[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau$$

je Laplaceova transformácia, tak inverzná Laplaceova transformácia bude

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} F(p)\, e^{pt} dp.$$

Celý tento postup teraz sformulujeme ako vetu:

Theorem 85 *Ak je funkcia $f(t)$ originál a $F(p)$ jej Laplaceov obraz, potom v ľubovoľnom bode platí*

$$\frac{f(t+)+f(t-)}{2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(p)\,e^{pt}dp.$$

Vetu uvádzame bez dôkazu. Možno ju nájsť v každej lepšej knihe o funkciách komplexnej premennej. Vzťah pre inverznú Laplaceovu transformáciu z predchádzajúcej vety sa používa pri hľadaní Laplaceovej transformácie iba zriedkavo. V praxi je dôležité vedieť, či sa originál zo známeho Laplaceovho obrazu dá dostať jediným spôsobom. Z predchádzajúcej vety plynie tvrdenie:

Ak je funkcia $F(p)$ Laplaceovým obrazom originálov $f_1(t)$ a $f_2(t)$, potom sa tieto originály rovnajú vo všetkých bodoch spojitosti. Bez dôkazu uvedieme podmienky pre to, aby funkcia $F(p)$ bola Laplaceovým obrazom funkcie $f(t)$:

1. $F(p)$ je analytická funkcia na polrovine $\operatorname{Re} p=\alpha>\alpha_0$, kde α_0 je reálna časť singulárneho bodu funkcie $F(p)$, ktorý leží čo najviac vpravo.
2. $\lim_{p\longrightarrow\infty}F(p)=0$
3. Funkcia $F(p)$ je absolútne integrovateľná podľa každej priamky, ktorá leží v polrovine $\operatorname{Re} p=\alpha>\alpha_0$, rovnobežnej s imaginárnou osou t.j.

$$\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left|F(p)\,e^{pt}\right|dp=A<\infty.$$

Originály možno nájsť aj pomocou rezíduí, čo tvrdí nasledujúca veta:

Theorem 86 *Nech $F:\boldsymbol{C}\setminus\{p_1,\ldots,p_n\}\longrightarrow\boldsymbol{C}$ je analytická funkcia a $p_1,\ldots,p_n$ sú izolované singulárne body funkcie F s vlastnosťami:*

a) $\operatorname{Re} p_k<\alpha_0$, $k=1,\ldots,n$

b) $\lim_{p\longrightarrow\infty}F(p)=0$

c) F je Laplaceov obraz originálu s indexom rastu α_0 s vlastnosťou

$$f(t)=\frac{f(t+)+f(t-)}{2},\ t\in\boldsymbol{R}.$$

Potom

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{p_k}\left[F(p)\,e^{pt}\right],\ \ \textit{pre každé}\ \ t>0.$$

Example 87 *Nájdite originál f, ktorého Laplaceov obraz f má tvar*

$$F(p)=\frac{1}{p^2(p+1)},\ p\in\boldsymbol{C}\setminus\{-1,0\}.$$

Solution 88 *Sú splnené všetky predpoklady vety o hľadaní originálu pomocou rezíduí. Izolované body sú body -1, 0, teda originál existuje a má tvar*

$$f(t)=\operatorname*{res}_{z=-1}\left[F(p)\,e^{pt}\right]+\operatorname*{res}_{z=0}\left[F(p)\,e^{pt}\right]=\lim_{p\longrightarrow-1}\frac{e^{pt}}{p^2}+\lim_{p\longrightarrow0}\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{e^{pt}}{p+1}\right]=e^{-t}+t-1,\ t>0.$$

Tak

$$f(t)=\Theta(t)\left(e^{-t}+t-1\right),\ t\in\boldsymbol{R}.\square$$

Example 89 *Nájdite originál f, ktorého Laplaceov obraz f má tvar*

$$F(p) = e^{-2p}\frac{p}{(p-1)(p^2+1)},\ p \in \boldsymbol{C}\setminus\{1, i, -i\}.$$

Solution 90 *V tomto príklade nemôžeme použiť vetu o hľadaní originálu pomocou rezíduí, pretože predpoklad b) nie je splnený. Podľa vety??? je funkcia $f(t) = \Theta(t-2)\,g(t-2)$, pre $t \in \boldsymbol{R}$, kde $g(t)$ je originál k funkcii $G(p)$, ktorú definujeme vzťahom*

$$G(p) = \frac{p}{(p-1)(p^2+1)},\ p \in \boldsymbol{C}\setminus\{1, i, -i\}.$$

Funkcia G spĺňa už všetky predpoklady predchádzajúcej vety, teda originál existuje a má tvar

$$g(t) = \operatorname*{res}_{z=1}\left[G(p)\,e^{pt}\right] + \operatorname*{res}_{z=i}\left[G(p)\,e^{pt}\right] + \operatorname*{res}_{z=-i}\left[G(p)\,e^{pt}\right] = \frac{1}{2}\left(e^t - \cos t + \sin t\right),$$

pre $t > 0$. Tak

$$f(t) = \frac{1}{2}\Theta(t-2)\left(e^{t-2} - \cos(t-2) + \sin(t-2)\right),\ t \in \boldsymbol{R}.\square$$

Theorem 91 *(Veta o rozklade) Nech $F(p)$ je analytická funkcia v okolí nekonečna s Laurentovým radom $F(p) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$. Potom je $F(p)$ Laplaceovým obrazom funkcie $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \frac{}{(n-1)!} t^{n-1}$.*

Example 92 *Nech $F(p) = \frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}$. Nájdite originál.*

Solution 93 $F(p) = \frac{1}{p}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!p^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!p^{n+1}}$. *Potom* $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!}\frac{t^n}{n!}.\square$

Cvičenia.

V úlohách 1 - 17 nájdite Laplaceov obraz funkcie f, ak f je originálom

1. $f(t) = 2e^{3t} + e^{it} + 6t^3 - 7t + 5.$

   $\left[F(p) = \frac{2}{p-3} + \frac{1}{p-i} + \frac{6\cdot 3!}{p^4} - \frac{7}{p^2} + \frac{5}{p}\right]$

2. $f(t) = \sin(5t) + 2\cos(3t) - \sinh t + \cosh(2t).$

   $\left[F(p) = \frac{5}{p^2+25} + \frac{2p}{p^2+9} - \frac{1}{p^2-1} + \frac{p}{p^2-4}\right]$

3. $f(t) = \sin^2(at)$, $a \in \boldsymbol{R}$. $\left[F(p) = \frac{2a^2}{p(p^2+4a^2)}\right]$

4. $f(t) = \sin(at)\cdot\cos(at)$, $a \in \boldsymbol{R}$. $\left[F(p) = \frac{a}{p^2+4a^2}\right]$

5. $f(t) = \sin(at)\cdot\cos(bt)$, $a,\, b \in \boldsymbol{R}$, $a \neq b$.

   $\left[F(p) = \frac{a\left(p^2+a^2-b^2\right)}{\left[p^2+(a+b)^2\right]\cdot\left[p^2+(a-b)^2\right]}\right]$

6. $f(t) = a^t + \sin(\omega t + \varphi).$

   $\left[F(p) = \frac{1}{p-\ln a} + \frac{\omega}{(p^2+\omega^2)}\cos\varphi + \frac{p}{p^2+\omega^2}\sin\varphi\right]$

7. $f(t) = \sinh(3t)$. $\left[F(p) = \frac{3}{p^2-9}\right]$

8. $f(t) = e^{(1+i)t}\cdot\sinh(3t)$. $\left[F(p) = \frac{3}{[p-(1+i)]^2-9}\right]$

9. $f(t) = a^t$, $a > 0$. $\left[F(p) = \frac{1}{p-\ln a}\right]$

10. $f(t) = ta^t$, $a > 0$. $\left[F(p) = \frac{1}{(p-\ln a)^2}\right]$

11. $f(t) = e^{2t}\cdot\cos(3t)\cdot\cos(4t).$

    $\left[F(p) = \frac{1}{2}\frac{p-2}{(p-2)^2+7^2} + \frac{1}{2}\frac{p-2}{(p-2)^2+1}\right]$

12. $f(t) = e^{-t} + e^t\cdot\sin(2t)$. $\left[F(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{2}{(p-1)^2+2^2}\right]$

13. $f(t) = t^2\cos(3t)$. $\left[F(p) = \frac{2p^3-54p}{(p^2+9)^3}\right]$

14. $f(t) = t^2 + 2t + 3 + te^{-5t}$. $\left[F(p) = \frac{2+2p+3p^2}{p^3} + \frac{1}{(p+5)^2}\right]$

15. $f(t) = t\left(\cos(2t) + e^{-t}\cdot\sin(2t)\right).$

    $\left[F(p) = \frac{p^2-4}{(p^2+4)^2} + \frac{4(p+1)}{\left[(p+1)^2+4\right]^2}\right]$

16. $f(t) = t^2\left(e^{-3t} + \sin(2t)\right)$. $\left[F(p) = \frac{2}{(p+3)^3} + \frac{12p^2-16}{(p^2+4)^3}\right]$

17. $f(t)=\int_0^t \sin(\omega\tau)\,d\tau$. $\left[F(p)=\frac{\omega}{p(p^2+\omega^2)}\right]$

V úlohách 18 - 20 použitím vety o posune v originále nájdite Laplaceov obraz funkcie f :

18. $f(t)=\begin{cases} 0 & 0<t<b \\ e^{at} & t\geq b \end{cases}$. $\left[\frac{e^{-(p-a)b}}{p-a}\right]$

19. (a) $f(t)=\Theta(t)(t-2)^2$. $\left[\frac{2!}{p^3}-\frac{4}{p^2}+\frac{4}{p}\right]$

(b) $f(t)=\Theta(t-2)(t-2)^2$. $\left[e^{-2p}\frac{2!}{p^3}\right]$

(c) $f(t)=\Theta(t-2)t^2$. $\left[e^{-2p}\frac{2!}{p^3}+e^{-2p}\frac{4}{p^2}+e^{-2p}\frac{4}{p}\right]$

20. $f(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ \sin t & t\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right) \\ 1 & t\geq\frac{\pi}{2} \end{cases}$. $\left[\frac{p+e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^3+p}\right]$

V úlohách 21 - 22 nájdite Laplaceove obrazy konečných impulzov

21. $f(t)=\begin{cases} 0 & t\notin\langle 1,4) \\ t-1 & t\in\langle 1,2) \\ -\frac{t}{2}+2 & t\in\langle 2,4) \end{cases}$. $\left[\left(e^{-p}-\frac{3e^{-2p}}{2}+\frac{e^{-4p}}{2}\right)\frac{1}{p^2}\right]$

22. $f(t)=\begin{cases} 0 & t\notin\langle 1,5) \\ t-1 & t\in\langle 1,2) \\ 1 & t\in\langle 2,4) \\ 5-t & t\in\langle 4,5) \end{cases}$. $\left[\left(e^{-p}-e^{-2p}-e^{-4p}+e^{-5p}\right)\frac{1}{p^2}\right]$

V úlohách 23 - 24 nájdite Laplaceov obraz periodickej funkcie

23. $f(t)=\begin{cases} 1 & t\in\langle 2k\pi,(2k+1)\pi) \\ -1 & t\in\langle (2k+1)\pi,(2k+2)\pi) \end{cases}$, $k=0,1,2,\ldots$. $\left[\frac{1-e^{-p\pi}}{p(1+e^{-p\pi})}\right]$

24. $f(t)=|\sin(\omega t)|$, $\omega\in\boldsymbol{R}^+$. $\left[\frac{\omega\left(1+e^{-\frac{p\pi}{\omega}}\right)}{(p^2+\omega^2)\left(1-e^{-\frac{P\pi}{\omega}}\right)}\right]$

V úlohách 25 - 27 nájdite konvolučný súčin funkcií f, g :

25. $f(t)=t$, $g(t)=\cos t$. $[1-\cos t]$

26. $f(t)=t^2$, $g(t)=t^3$. $\left[\frac{t^6}{60}\right]$

27. $f(t)=e^{at}$, $g(t)=1-at$. $[t]$

V úlohách 28 - 36 nájdite originál k funkcii F :

28. $F(p)=\frac{p^2+1}{p^3-p^2-2p}$. $\left[f(t)=-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{5}{6}e^{2t}\right]$

29. $F(p)=\frac{p^2-4p-3}{(p-1)^2(p+2)}$. $\left[f(t)=-2te^t+e^{-2t}\right]$

30. $F(p) = \frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$. $\left[f(t) = e^t - e^{-t}\cos(2t) + \frac{3}{2}e^{-t}\sin(2t)\right]$

31. $F(p) = \frac{-2p^3+2p+5}{5(p^2+2p+2)(p+1)(p-1)}$. $\left[f(t) = \frac{1}{5}e^{-t}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{10}e^t\right]$

32. $F(p) = \frac{e^{-\pi p}}{p^2+5p+6}$.
$\left[f(t) = \Theta(t-\pi)\, e^{-2(t-\pi)} - \Theta(t-\pi)\, e^{-3(t-\pi)}\right]$

33. $F(p) = \frac{1-e^{-p}-pe^{-p}}{p^2(1-e^{-p})}$.
$$\left[f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t-k & t \in \langle k, k+1), \; k = 0, 1, \ldots \end{cases}\right]$$

34. $F(p) = \frac{1}{p(1+e^{-ap})}$, $a \in \boldsymbol{R}^+$.
$$\left[f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t \in \langle 2ka, (2k+1)\, a) \\ 0 & t \in \langle (2k+1)\, a, (2k+2)\, a), \; k = 0, 1, \ldots \end{cases}\right]$$

35. $F(p) = \frac{1}{p^3-2p^2+9p-18}$.
$\left[f(t) = \frac{1}{13}e^{2t} - \frac{1}{13}\cos(3t) - \frac{2}{13}\sin(3t)\right]$

36. $F(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p(p^2+1)}\left(1+e^{-\pi p}\right)$.
$$\left[f(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle 0, \pi) \\ 2-\cos(t-\pi) & t > \pi \end{cases}\right]$$

Pomocou vety o rozklade vypočítajte inverznú LT

1. $F(p) = \operatorname{arctg} \frac{1}{p}$.

   $\left[f(t) = \frac{\sin t}{t}\right]$

2. $F(p) = \frac{e^{\frac{1}{p}}}{p}$.

   $\left[f(t) = \sum_{n-0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} t^n\right]$

3. $F(p) = \frac{\sin \frac{1}{p}}{p}$.

   $\left[f(t) = \sum_{n-0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{((2n+1)!)^2} t^{2n+1}\right]$

4. $F(p) = \frac{e^{-\pi p}}{p^2+5p+6}$.

   $\left[f(t) = \Theta(t-\pi) e^{-2(t-\pi)} - \Theta(t-\pi) e^{-3(t-\pi)}\right]$

5. $F(p) = \frac{e^{-\pi p}}{p^2+5p+6}$.

   $\left[f(t) = \Theta(t-\pi) e^{-2(t-\pi)} - \Theta(t-\pi) e^{-3(t-\pi)}\right]$

6. $F(p) = \frac{e^{-\pi p}}{p^2+5p+6}$.

   $\left[f(t) = \Theta(t-\pi) e^{-2(t-\pi)} - \Theta(t-\pi) e^{-3(t-\pi)}\right]$

7. $F(p) = \frac{e^{-\pi p}}{p^2+5p+6}$.

   $\left[f(t) = \Theta(t-\pi) e^{-2(t-\pi)} - \Theta(t-\pi) e^{-3(t-\pi)}\right]$

8. $F(p) = \frac{e^{-\pi p}}{p^2+5p+6}$.

   $\left[f(t) = \Theta(t-\pi) e^{-2(t-\pi)} - \Theta(t-\pi) e^{-3(t-\pi)}\right]$

9. $F(p) = \frac{e^{-\pi p}}{p^2+5p+6}$.

   $\left[f(t) = \Theta(t-\pi) e^{-2(t-\pi)} - \Theta(t-\pi) e^{-3(t-\pi)}\right]$

10. $F(p) = \frac{e^{-\pi p}}{p^2+5p+6}$.

    $\left[f(t) = \Theta(t-\pi) e^{-2(t-\pi)} - \Theta(t-\pi) e^{-3(t-\pi)}\right]$

Aplikácie Laplaceovej transformácie.

Riešenie lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami.

Ak $a_k \in \boldsymbol{C}$, $k = 0, 1, \ldots, n$; $a_n \neq 0$, $b_k \in \boldsymbol{C}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ sú dané komplexné konštanty a $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je po častiach spojitá funkcia, môžme sformulovať začiatočnú úlohu - ZÚ ako problém nájsť riešenie obyčajnej diferenciálnej rovnice

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t) \qquad ((1))$$

pre $t > 0$, ktoré bude spĺňať podmienky

$$x(0+) = b_0, x'(0+) = b_1, \ldots, x^{(n-1)}(0+) = b_{n-1} \qquad ((2))$$

Z teórie obyčajných diferenciálnych rovníc vieme, že ZÚ (1), (2) má jediné riešenie. Túto úlohu možno riešiť aj pomocou Laplaceovej transformácie, ak budeme predpokladať, že funkcia $f(t)$ je originál. Potom aj riešenie - funkcia $x : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, ktorú rozšírime nulou pre $t < 0$ so svojimi deriváciami do rádu n sú originály. Toto plynie z faktu, že

$$x^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{n} \left[b_k + \int_0^t \frac{W_k(\tau)}{W(\tau)} d\tau \right] \varphi_k(t), \; j = 0, 1, \ldots, n-1$$

kde $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ je báza vektorového priestoru riešení rovnice (1) s nulovou pravou stranou:

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$$

a

$$W(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

$$W_k(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & 0 & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & 0 & \ldots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \ldots & f(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

pričom stĺpec pravých strán sa nachádza v k-tom stĺpci. Funkcie φ_k, $k = 1, \ldots, n$ sú originály, pretože majú tvar $\varphi(t) = t^\alpha e^{\beta t}$, kde α, β sú vhodné konštanty. Riešenie x spolu s deriváciami do rádu $(n-1)$ dostaneme z funkcií $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, f$ použitím operácií, ktoré zachovávajú exponenciálny rast, to znamená že funkcie $x, x', \ldots, x^{(n-1)}$ sú originály. Funkcia $x^{(n)}$ je tiež originál, pretože sa dá vyjadriť z rovnice (1) v tvare

$$x^{(n)}(t) = a_n^{-1} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t) \right], \; t \geq 0.$$

Potom aplikáciou Laplaceovej transformácie na úlohu (1) s využitím podmienok (2) dostaneme

$$a_n \left[p^n X(p) - p^{n-1} b_0 - p^{n-2} b_1 - \cdots - p b_{n-2} - b_{n-1} \right] +$$

$$+a_{n-1}\left[p^{n-1}X(p)-p^{n-2}b_0-p^{n-3}b_1-\cdots-pb_{n-3}-b_{n-2}\right]+$$
$$+\cdots+$$
$$+a_1\left[pX(p)-b_0\right]+a_0X(p)=F(p)$$

kde $F(p)=\mathcal{L}[f(t)]$ a $X(p)=\mathcal{L}[x(t)]$. Riešením tejto algebrickej rovnice dostaneme

$$X(p)=\frac{F(p)}{Q_n(p)}+\frac{P_{n-1}(p)}{Q_n(p)}.$$

V poslednom výraze je $Q_n(p)$ charakteristický polynóm rovnice (1) n-tého stupňa a $P_{n-1}(p)$ je polynóm najviac $(n-1)$ stupňa. Použitím vety o konvolúcii dostaneme originál v tvare

$$x(t)=\int_0^t f(s)\,g(t-s)\,ds+h(t),\ t\geq 0,$$

kde

$$\mathcal{L}[g]=\frac{1}{Q_n},\ \mathcal{L}[h]=\frac{P_{n-1}}{Q_n}.$$

Example 94 *Riešte začiatočnú úlohu:*

$$x''-2x'+5x=e^t\cos 2t,\ x(0+)=C_1,\ x'(0+)=C_2.$$

Solution 95 *Použitím vzťahu* $X(p)=\mathcal{L}[x(t)]$ *dostaneme* $\mathcal{L}[x'(t)]=pX(p)-C_1$, $\mathcal{L}[x''(t)]=p^2X(p)-pC_1-C_2$. $\mathcal{L}[e^t\cos 2t]=\frac{p-1}{(p-1)^2+4}$. *Aplikáciou Laplaceovej transformácie na rovnicu dostaneme:*

$$p^2X(p)-pC_1-C_2-2[pX(p)-C_1]+5X(p)=\frac{p-1}{(p-1)^2+4},$$

odkiaľ

$$X(p)\left[p^2-2p+5\right]=\frac{p-1}{(p-1)^2+4}+pC_1+C_2-2C_1.$$

čo dáva

$$X(p)=\frac{p-1}{\left[(p-1)^2+4\right]^2}+C_1\frac{p}{(p-1)^2+4}+(C_2-2C_1)\frac{1}{(p-1)^2+4}.$$

Aplikáciou vety o inverznej transformácii alebo vety o konvolúcii dostaneme:

$$\mathcal{L}\left[\left(\frac{1}{4}te^t\sin 2t\right)\right]=\frac{p-1}{\left[(p-1)^2+4\right]^2}$$

a

$$\mathcal{L}\left[\left(e^t\cos 2t\right)\right]=\frac{p-1}{(p-1)^2+4},\ \mathcal{L}\left[\left(\frac{1}{2}e^t\sin 2t\right)\right]=\frac{1}{(p-1)^2+4},$$

čo implikuje, že

$$x(t)=\frac{1}{4}te^t\sin 2t+C_1e^t\cos 2t+(C_2-2C_1)\frac{1}{2}e^t\sin 2t.\ \square$$

Laplaceovu transformáciu môžme použiť pri riešení obyčajných diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami, ktorých pravá strana má tvar posunutej funkcie alebo tvar konečného impulzu. Uvažujme teda začiatočnú úlohu:

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t)$$

pre $t > 0$, ktoré bude spĺňať podmienky

$$x(0+) = b_0, x'(0+) = b_1, \ldots, x^{(n-1)}(0+) = b_{n-1},$$

t.j. ZÚ (1), (2) s pravou stranou tvaru:

$$f(t) = \Theta(t-\tau_1) f_1(t-\tau_1) + \cdots + \Theta(t-\tau_k) f_k(t-\tau_k) \tag{(3)}$$

kde funkcie $f_1, \ldots, f_k$ sú originály a $0 \leq \tau_1 < \cdots < \tau_k$. Použitím Laplaceovej transformácie na túto ZÚ dostaneme:

$$Q_n(p) X(p) - P_{n-1}(p) = e^{-\tau_1 p} F_1(p) + \cdots + e^{-\tau_k p} F_k(p).$$

odkiaľ

$$X(p) = \frac{P_{n-1}(p)}{Q_n(p)} + e^{-\tau_1 p} G_1(p) + \cdots + e^{-\tau_k p} G_k(p),$$

kde

$$G_j = \frac{F_j}{Qn}, \; j = 1, 2, \ldots, k.$$

Použitím vety o posune v originále dostaneme originál v tvare

$$x(t) = h(t) + \Theta(t-\tau_1) g_1(t-\tau_1) + \cdots + \Theta(t-\tau_k) g_k(t-\tau_k),$$

pričom

$$\mathcal{L}[h] = \frac{P_{n-1}}{Q_n}, \; \mathcal{L}[g_j] = G_j, \; j = 1, 2, \ldots, k.$$

Example 96 *Nájdite riešenie ZÚ:*

$$x'' + 4x = f(t), \; x(0+) = 1, \; x'(0+) = 0, \quad kde \quad f(t) = \begin{cases} 0 & pre & t < 0 \\ \cos t & pre & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & pre & t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

Solution 97 *Použitím vzťahu $X(p) = \mathcal{L}[x(t)]$ dostaneme $\mathcal{L}[x'(t)] = pX(p) - 1$, $\mathcal{L}[x''(t)] = p^2 X(p) - p$. Pravú stranu rovnice možno zapísať v tvare*

$$f(t) = \cos t \left[\Theta(t) - \Theta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \Theta(t) \cos t + \Theta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{p}{p^2+1} + e^{-p\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p^2+1}.$$

Aplikáciou Laplaceovej transformácie na rovnicu dostaneme:

$$p^2 X(p) - p + 4X(p) = \frac{p}{p^2+1} + e^{-p\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p^2+1},$$

t.j.

$$X(p) = \frac{p}{p^2+4} + \frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)} + e^{-p\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)},$$

teda

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \Theta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) x_3\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

pričom

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[x_1(t)] = \frac{p}{p^2+4}, \ \boldsymbol{\mathcal{L}}[x_2(t)] = \frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}, \ \boldsymbol{\mathcal{L}}[x_3(t)] = \frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)}.$$

Pretože platí

$$\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{1}{3}\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{3}\frac{p}{p^2+4}$$

a

$$\frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{1}{3}\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{p^2+4},$$

tak

$$x_1(t) = \cos 2t, \ x_2(t) = \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos 2t, \ x_3(t) = \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{6}\cos 2t$$

a

$$x(t) = \frac{1}{3}\cos t + \frac{2}{3}\cos 2t + \Theta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\left[\frac{1}{3}\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{6}\sin 2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right]. \square$$

V elektrotechnike sa často stretávame s úlohou riešiť obyčajnú diferenciálnu rovnicu s periodickou funkciou na pravej strane.

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = \Theta(t) f(t) \qquad ((4))$$

$$x(0+) = b_0, x'(0+) = b_1, \ldots, x^{(n-1)}(0+) = b_{n-1} \qquad ((5))$$

s periodickou funkciou f, $f(t) = f(t+T)$. Riešenie takejto ZÚ hľadáme v tvare

$$x(t) = y(t) + z(t), \ t > 0;$$

kde y je periodické riešenie rovnice (4) a z je riešením ZÚ

$$a_n z^{(n)}(t) + a_{n-1} z^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 z'(t) + a_0 z(t) = 0,$$

s podmienkami

$$z(0+) = c_0, z'(0+) = c_1, \ldots, z^{(n-1)}(0+) = c_{n-1},$$

kde

$$c_j = b_j - y^{(j)}(0+), \ j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Skúmajme teda najskôr úlohu

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = \Theta(t) f(t), \qquad ((6))$$

kde $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je funkcia s periodou T, t.j. $f(t+T) = f(t)$ a my hľadáme riešenie $y(t)$, tak aby platilo $y(t) = y(t+T)$ pre každé $t \geq 0$. Aplikáciou Laplaceovej transformácie na rovnicu (4) dostaneme

$$Y(p) = \frac{P_{n-1}(p)}{Q_n(p)} + \frac{F_T(p)}{Q_n(p)\left(1-e^{-pT}\right)},$$

kde $Y(p) = \boldsymbol{\mathcal{L}}[y(t)]$ a $F_T(p)$ je Laplaceova transformácia funkcie $f_{\langle 0,T\rangle}(t)$, ktorá je definovaná vzťahom

$$f_{\langle 0,T\rangle}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad t < 0,\, T \leq t \\ f(t) & \text{pre} \quad 0 \leq t < T \end{cases}$$

a $P_{n-1}(p)$ je zatiaľ neznámy polynóm rádu $n-1$, ktorého koeficienty volíme tak, aby funkcia $y(t)$ bola periodická. Ak preformulujeme poslednú rovnicu, tak dostávame:

$$Y(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}}\left[\frac{F_T(p)}{Q_n(p)} + \left(1-e^{-pT}\right)\frac{P_{n-1}(p)}{Q_n(p)}\right],$$

t.j.

$$Y(p) = \frac{G(p)}{1-e^{-pT}},$$

kde

$$G(p) = \frac{F_T(p)}{Q_n(p)} + \left(1-e^{-pT}\right)\frac{P_{n-1}(p)}{Q_n(p)}$$

a nech G je Laplaceova transformácia funkcie g, $G(p) = \boldsymbol{\mathcal{L}}[g(t)]$. Originál $x(t)$ bude periodická funkcia s periodou T vtedy a len vtedy ak $g(t) = 0$ pre každé $t \geq T$. Potom podľa vety o obraze periodickej funkcie $x(t)$ má tvar

$$y(t) = \begin{cases} g(t) & \text{pre} \quad 0 \leq t < T \\ g(t-kT) & \text{pre} \quad kT \leq t < (k+1)T \end{cases}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Example 98 *Nájdite periodické riešenie ZÚ*

$$x' + x = f(t),\, t > 0;\, x(0+) = 0$$

s periodickou pravou stranou $f : \langle 0, \infty) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *definovanou*

$$f(t) = \begin{cases} t & \textit{pre} \quad 0 \leq t < 1 \\ t-k & \textit{pre} \quad k \leq t < k+1 \end{cases}, \; k = 1, 2, \ldots$$

Solution 99 *Funkcia f je periodická s periodou* $T = 1$. *Riešenie ZÚ budeme hľadať v tvare* $x(t) = y(t) + z(t)$, $t > 0$ *kde* $y(t)$ *je riešenie úlohy*

$$y' + y = f(t);\; y(t+1) = y(t),\, y(0+) = B,\, \forall\, t > 0$$

a $z(t)$ *je riešenie ZÚ*

$$z' + z = 0;\; z(0+) = -B;\; t > 0.$$

Riešme najskôr prvú úlohu. Ak označíme

$$f_{\langle 0,1\rangle}(t) = t\left[\Theta(t) - \Theta(t-1)\right] = t\Theta(t) - (t-1)\,\Theta(t-1) - \Theta(t-1)\,,\ t \in \boldsymbol{R},$$

tak

$$f_1(p) = \frac{1}{p^2}\left(1 - e^{-p}\right) - \frac{1}{p}e^{-p}$$

a pre $Y = \boldsymbol{\mathcal{L}}[y]$ *s podmienkou* $y(0+) = B$, *kde* B *určíme tak aby riešenie* $y(t)$ *bolo periodickou funkciou, dostaneme*

$$Y(p) = \frac{B}{p+1} + \frac{1 - e^{-p} - pe^{-p}}{p^2(p+1)(1-e^{-p})} =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-p}}\left[\frac{B}{p+1} + \frac{1}{p^2(p+1)} - e^{-p}\left(\frac{B}{p+1} + \frac{1}{p^2(p+1)} + \frac{1}{p(p+1)}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-p}}\left[\left(\frac{B+1}{p+1} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}\right) - e^{-p}\left(\frac{B}{p+1} + \frac{1}{p^2}\right)\right] = \frac{G(p)}{1-e^{-p}},$$

kde

$$G(p) = \left(\frac{B+1}{p+1} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}\right) - e^{-p}\left(\frac{B}{p+1} + \frac{1}{p^2}\right)$$

a originál $g(t)$ *musí byť taká funkcia, že* $g(t) = 0$, *pre* $t > 1$. *Originál* $g(t)$ *má tvar*

$$g(t) = (B+1)\,e^{-t} + t - 1 - \Theta(t-1)\left[Be^{-(t-1)} + t - 1\right].$$

Potom pre $t > 1$ *dostaneme:*

$$g(t) = (B+1)\,e^{-t} + t - 1 - Be^{-(t-1)} - t + 1 = e^{-t}\left[B(1-e) + 1\right],$$

odkiaľ dostávame

$$B = \frac{1}{e-1},$$

teda periodické riešenie prvej rovnice má tvar

$$y(t) = \begin{cases} \frac{e^{1-t}}{e-1} + t - 1 & pre \quad 0 \le t < 1 \\ \frac{e^{k+1-t}}{e-1} + t - k - 1 & pre \quad k \le t < k+1 \end{cases},\ k = 1, 2, \ldots$$

Teraz vyriešime druhú úlohu. Jej riešenie má tvar

$$z(t) = \frac{1}{1-e}e^{-t},\ t > 0.$$

Potom riešenie pôvodnej ZÚ bude mať tvar

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t} + t - 1 & pre \quad 0 \le t < 1 \\ \frac{e^{k+1}-1}{e-1}e^{-t} + t - k - 1 & pre \quad k \le t < k+1 \end{cases},\ k = 1, 2, \ldots \ \square$$

Riešenie systémov obyčajných diferenciálnych rovníc.

Metódu, ktorú sme použili v predchádzajúcej časti pri riešení začiatočných úloh je možné aplikovať aj v prípade systémov obyčajných diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami. My sa obmedzíme iba na riešenie systémov obyčajných diferenciálnych rovníc prvého rádu tvaru:

$$\begin{array}{ll} x_1'(t) + a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) & = f_1(t) \\ x_2'(t) + a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) & = f_2(t) \\ \cdots & \\ x_n'(t) + a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) & = f_n(t) \end{array}, \ t > 0$$

so začiatočnými podmienkami

$$x_j(0+) = b_j, \ j = 1, 2, \ldots, n$$

Za predpokladu, že $f_1, \ldots, f_n$ sú rovné nule pre $t < 0$ a ak $X_j = \mathcal{L}[x_j]$, $F_j = \mathcal{L}[f_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$ daný systém diferenciálnych rovníc transformujeme na tvar

$$\begin{array}{c} (p + a_{11}) X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = F_1 + b_1 \\ a_{21}X_1 + (p + a_{22})X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = F_2 + b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + (p + a_{nn})X_n = F_n + b_n \end{array}.$$

Pretože determinant systému je rovný nule iba v konečnom počte bodov, môžeme úlohu riešiť pomocou Cramerovho pravidla. Potom dostaneme

$$X_j = \frac{D_j(p)}{D(p)}, \ j = 1, 2, \ldots, n$$

kde

$$D(p) = \begin{vmatrix} (p + a_{11}) & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & (p + a_{22}) & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & (p + a_{nn}) \end{vmatrix}$$

a

$$D_j(p) = \begin{vmatrix} (p + a_{11}) & a_{12} & \ldots & F_1 + b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & (p + a_{22}) & \ldots & F_2 + b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & F_n + b_n & \ldots & (p + a_{nn}) \end{vmatrix}.$$

Originály dostaneme pomocou tých istých metód ako predtým.

Example 100 *Riešte ZÚ:*

$$\begin{array}{lll} x' - y & = 2, & x(0+) = 0 \\ y' - x & = t, & y(0+) = -1 \end{array}.$$

Solution 101 *Ak označíme $X = \mathcal{L}[x]$, $Y = \mathcal{L}[y]$ potom aplikáciou Laplaceovej transformácie dostaneme*

$$\begin{array}{ll} pX - Y & = \frac{2}{p} \\ -X + pY & = \frac{1}{p^2} - 1 \end{array},$$

odkiaľ

$$\begin{aligned} D(p) &= \begin{vmatrix} p & -1 \\ -1 & p \end{vmatrix} = p^2 - 1, \\ D_1(p) &= \begin{vmatrix} \frac{2}{p} & -1 \\ \frac{1}{p^2} - 1 & p \end{vmatrix} = 1 + \frac{1}{p^2}, \end{aligned}$$

$$D_2(p) = \begin{vmatrix} p & \frac{2}{p} \\ -1 & \frac{1}{p^2} - 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{p} - p,$$

odkiaľ

$$X(p) = \frac{p^2+1}{p^2(p^2-1)} = -\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1},$$

$$Y(p) = \frac{3-p^2}{p(p^2-1)} = -\frac{3}{p} + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}$$

a

$$x(t) = -t + e^{-t} - e^t, \; y(t) = -3 - e^{-t} + e^t, \; t > 0. \square$$

Example 102 *Riešte ZÚ:*

$$\begin{aligned} x_1' + 2x_1 + x_2 &= \sin t, \quad x_1(0+) = 0 \\ x_2' - 4x_1 - 2x_2 &= \cos t, \quad x_2(0+) = 1 \end{aligned}$$

Solution 103 *Ak označíme* $X_1 = \mathcal{L}[x_1]$, $X_2 = \mathcal{L}[x_2]$ *potom aplikáciou Laplaceovej transformácie dostaneme*

$$\begin{aligned} (p+2) X_1 + X_2 &= \tfrac{1}{p^2+1} \\ -4X_1 + (p-2) X_2 &= \tfrac{p}{p^2+1} + 1 \end{aligned}$$

odkiaľ

$$D(p) = \begin{vmatrix} p+2 & 1 \\ -4 & p-2 \end{vmatrix} = p^2,$$

$$D_1(p) = \begin{vmatrix} \frac{1}{p^2+1} & 1 \\ \frac{p}{p^2+1} + 1 & p-2 \end{vmatrix} = -\frac{p^2+3}{p^2+1},$$

$$D_2(p) = \begin{vmatrix} p+2 & \frac{1}{p^2+1} \\ -4 & \frac{p}{p^2+1} + 1 \end{vmatrix} = \frac{p^3+3p^2+3p+6}{p^2+1},$$

odkiaľ

$$X_1(p) = -\frac{p^2+3}{p^2(p^2+1)} = -\frac{3}{p^2} + \frac{2}{p^2+1},$$

$$X_2(p) = \frac{p^3+3p^2+3p+6}{p^2(p^2+1)} = \frac{3}{p} + \frac{6}{p^2} - 2\frac{p}{p^2+1} - 3\frac{1}{p^2+1}$$

a

$$x_1(t) = -3t + 2\sin t, \; x_2(t) = 3 + 6t - 2\cos t - 3\sin t, \; t > 0. \square$$

Riešenie integrodiferenciálnych rovníc.
Skúmajme lineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu s konštantnými koeficientami:

$$a_2 x'(t) + a_1 x(t) + a_0 \int_0^t x(s)\, ds = f(t),\ t > 0 \tag{(7)}$$

$$x(0+) = b_0 \tag{(8)}$$

Ak je funkcia f diferencovateľná, potom úlohu (7), (8) môžme preformulovať na začiatočnú úlohu s diferenciálnou rovnicou druhého rádu:

$$a_2 x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f'(t),\ t > 0$$

$$x(0+) = b_0,\ x'(0+) = \frac{f(0+) - a_1 b_0}{a_2}.$$

Takúto úlohu už dokážeme riešiť. My však pomocou Laplaceovej transformácie vieme úlohu (7), (8) riešiť aj priamo, pričom ak $F = \boldsymbol{\mathcal{L}}[f]$ dostaneme

$$a_2 (pX - b_0) + a_1 X + a_0 \frac{X}{p} = F(p),\ \operatorname{Re} p > 0$$

t.j.

$$X(p) = \frac{p\left[F(p) + a_2 b_0\right]}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0},$$

odkiaľ originál určíme bežnými metódami.

Example 104 *Riešte ZÚ pre integrodiferenciálnu rovnicu:*

$$x'(t) + 2x(t) + 2\int_0^t x(s)\, ds = 1,\ t > 0,\ x(0+) = 0.$$

Solution 105 *Nech $F(p) = L[f(t)]$. Aplikáciou Laplaceovej transformácie dostaneme*

$$pX(p) + 2X(p) + 2\frac{X(p)}{p} = \frac{1}{p},$$

odkiaľ máme

$$X(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 2} = \frac{1}{(p+1)^2 + 1}.$$

Originál teraz možno určiť pomocou elementárnych pravidiel a dostávame:

$$x(t) = e^{-t} \sin t. \ \square$$

Cvičenia.

V úlohách 1 - 14 vypočítajte pomocou Laplaceovej transformácie riešenie začiatočnej úlohy:

1. $x'''(t) + 2x''(t) + 5x'(t) = 0,\ x(0+) = -1,\ x'(0+) = 2,\ x''(0+) = 0.$
   $\left[x(t) = -\frac{1}{5} - \frac{4}{5}e^{-t}\cos(2t) + \frac{3}{5}e^{-t}\sin(2t)\right]$
2. $x^{(4)}(t) + 2x''(t) + x(t) = 1,\ x(0+) = x'(0+) = x''(0+) = x'''(0+) = 0.$
   $\left[x(t) = 1 - \cos t - \frac{t}{2}\sin t\right]$
3. $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^{3t},\ x(0+) = x'(0+) = 0.$
   $\left[x(t) = \frac{1}{2}e^{t} - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}\right]$
4. $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 2e^{3t},\ x(0+) = x'(0+) = 0.$
   $[x(t) = e^{t} - 2e^{2t} + e^{3t}]$
5. $x''(t) - x'(t) = te^{t},\ x(0+) = 1,\ x'(0+) = 0.$
   $\left[x(t) = e^{t}\left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right)\right]$
6. $x'(t) + x(t) = t^2e^{-t},\ x(0+) = a.$
   $\left[x(t) = ae^{-t} + \frac{t^3}{3}e^{-t}\right]$
7. $x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = t^3e^{-2t},\ x(0+) = 1,\ x'(0+) = 2.$
   $\left[x(t) = e^{-2t}\left(1 + 4t + \frac{t^5}{20}\right)\right]$
8. $x'''(t) - x''(t) = \sin t,\ x(0+) = x'(0+) = x''(0+) = 0.$
   $\left[x(t) = -1 - t + \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)\right]$
9. $x'(t) + x(t) = f(t),\ x(0+) = 0,\ f(t) = \begin{cases} 0 & t \notin \langle 0, 2) \\ 1 & t \in \langle 0, 2) \end{cases}.$
   $\left[x(t) = 1 - e^{-t} - \Theta(t-2)\left(1 - e^{-(t-2)}\right)\right]$
10. $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = f(t),\ x(0+) = x'(0+) = 0,\ f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \in \langle 0, 1) \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}.$
    $\left[x(t) = -2 + t + 2e^{-t} + te^{-t} - \Theta(t-1)\left[-2 + (t-1) + 2e^{-(t-1)} + (t-1)e^{-(t-1)}\right]\right]$
11. $x''(t) + x(t) = f(t),\ x(0+) = 1,\ x'(0+) = 0,\ f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ b & t \in \langle 0, a) \\ 2b & t \geq a \end{cases}.$
    $[x(t) = \Theta(t)[b + (1-b)\cos t] + \Theta(t-a)[b - b\cos(t-a)]]$
12. $x''(t) + x(t) = |\sin t|,\ x(0+) = x'(0+) = 0.$
    $\left[X(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2(1-e^{-\pi p})} + e^{-\pi p}\frac{p}{(p^2+1)^2(1-e^{-\pi p})}, x(t) =\right]$

13. $x'(t) + 3x(t) = e^{-t} + |\sin t|\,,\ x(0+) = 0.$

$\left[X(p) = \frac{1}{(p+3)(p+1)} + \frac{p}{(p+3)(p^2+1)(1-e^{-\pi p})} - e^{-\pi p}\frac{p}{(p+3)(p^2+1)(1-e^{-\pi p})},\, x(t) = \right]$

14. $x'(t) + 2x(t) = Ae^{-t} + g(t)\,,\ x(0+) = 0$, kde $A = \frac{1}{1-e}$ a $g(t)$ je periodická s periódou 1, ktorá na intervale $\langle 0,1)$ je $g(t) = (1-A)\,e^{-t}$.

$$\left[\begin{array}{c} x(t) = \frac{1}{1-e}e^{-t} - \frac{1}{1-e^2}e^{-2t} + h(t)\,,\quad \text{kde } h(t) \text{ je periodická funkcia} \\ \text{s periódou 1, ktorá sa na intervale } \langle 0,1) \text{ rovná} \\ h(t) = \left(1 - \frac{1}{1-e}\right)e^{-t} - \left(1 - \frac{1}{1-e^2}\right)e^{-2t}. \end{array}\right]$$

Z - transformácia.

Z-transformácia.

Motiváciou pre z-transformáciu je spracovanie diskrétneho signálu. Vzorkovanie, umožňuje použiť analytické operácie na diskrétne objekty.

$$Z : (a_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}.$$

Pre aké postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ konverguje v nejakom okolí nekonečna?

Theorem 106 *Rad* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ *konverguje v nejakom okolí bodu* ∞ $\Leftrightarrow$ *ak existujú konštanty* $M \geq 0$ *a* $c \in \boldsymbol{R}$ *tak, že* $|a_n| \leq Me^{cn}, \forall n$.

Predpokladajme, že $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ konverguje vo vonkajšku kruhu $K(0, R_0) = \{z \in \boldsymbol{C} : |z| > R_0\}$. Jeho súčet $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ je na tejto oblasti analytická funkcia. Zvoľme kladne orientovanú kružnicu C so stredom v počiatku, ležiacu v $\{z \in \boldsymbol{C} : |z| > R_0\}$, tj. s polomerom $R > R_0 > 0$.

Podľa integrálneho vyjadrenia koeficientov Laurentovho radu (tu je treba rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ interpretovať ako rad so stredom v počiatku) máme

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{F(z)}{z^{-n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R^{1-n}} \max\nolimits_{z \in \boldsymbol{C}} |F(z)| \, 2\pi R = R^n \underbrace{\max_{z \in \boldsymbol{C}} |F(z)|}_{=M}.$$ Teda $|a_n| \leq Me^{n \ln R}$.

Opačná implikácia: predpokladajme, že platí odhad $|a_n| \leq Me^{cn}, \forall n$. Rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M \frac{(e^c)^n}{z^n}$ je pre $|z| > e^c$ geometrický rad s absolutnou hodnotou kvocientu $\frac{e^c}{|z|} < 1$.

Podľa porovnávacieho kritéria rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ konverguje $\forall \, |z| > e^c$.

Označme Z_0 množinu všetkých komplexných postupností $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, ktoré sú najviac exponenciálneho rastu, t.j. $|a_n| \leq Me^{cn}, \forall n$, kde $M \geq 0, c \in \boldsymbol{R}$, čo je ekvivalentné s tým, že pre $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ $\exists M \geq 0$ a $a > 0$ tak, že $|a_n| \leq Ma^n, \forall n$.

Máme:

- Každá ohraničená postupnosť je zo Z_0,
- Každá postupnosť $(p(n))_{n=0}^{\infty}$, kde p je polynóm, je zo Z_0: $\lim_{n \to \infty} \frac{p(n)}{e^n} = 0$, teda napríklad $|p(n)| \leq e^n$ pre dostatočne veľké n.
- Vzorkovanie kvázipolynómu je zo Z_0,

- $(n^n)_{n=0}^{\infty} \notin Z_0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{e^{cn}} = \lim_{n\to\infty} e^{n(\ln n - c)} = \infty$,

- $(n!)_{n=0}^{\infty} \notin Z_0$, Podielové kritérium pre rad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{z^n}$ dáva: $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(n+1)!}{|z|^{n+1}} \cdot \frac{|z|^n}{n!} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(n+1)}{|z|} = \infty, n \to \infty$. Nekonverguje v žiadnom bode.

Definition 107 *Z-obraz postupnosti* $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ *je funkcia* $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$.

Označenie: $Z(a_n)_{n=0}^{\infty} = F(z), (a_n)_{n=0}^{\infty} \mathrel{\mathring{=}} F(z)$. Označme K_0 je množina funkcií analytických v okolí ∞, ktoré majú v ∞ vlastnú limitu.

Theorem 108 *Z-transformácia je prosté zobrazenie množiny* Z_0 *na množinu* K_0.

Veta o Laurentovom rozvoji analytickej funkcie.

Example 109 $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 2, 0, 4, 0, 0, ...)$. *Nájdime* $F(z)$.

Solution 110 $F(z) = 1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^3}, z \neq 0$.

Example 111 $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 0, ..., \underbrace{1}_{index m}, 0, 0, ...) = (\delta_{mn})_{n=0}^{\infty}$.

Solution 112 $F(z) = \frac{1}{z^m}$.

Example 113 $(a_n)_{n=0}^{\infty} = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n=0}^{\infty}$. *Nájdime* $F(z)$.

Solution 114 $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = e^{\frac{1}{z}}, \ z \neq 0$.

Example 115 $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (c)_{n=0}^{\infty}$. *Nájdime* $F(z)$.

Solution 116 $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c}{z^n} = c\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{cz}{z-1}, |z| > 1$.

Example 117 $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, ...)$. *Nájdime* $F(z)$.

Solution 118 $F(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} + \cdots + = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z^2}} = \frac{z}{z^2-1}, |z| > 1$.

Example 119 *Vieme, že sa postupnosť* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *zobrazí na funkciu* $F(z)$. *Aká postupnosť sa zobrazí na funkciu* $F(z^2)$*?*

Solution 120 $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \ F(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(z^2)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{2n}},$ *teda* $(a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, ...)$ *má* $Z-$*obraz* $F(z^2)$.

Example 121 $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a^n)_{n=0}^{\infty}, a \in C$. *Nájdime* $F(z)$.

Solution 122 $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}=\frac{z}{z-a}$, $|z|>|a|$.

Theorem 123 *Základná gramatika Z-transformácie: Predpokladajme, že* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}\in Z_0$, *pričom* $Z(a_n)_{n=0}^{\infty}=F(z)$. *Potom platí*

1. Linearita $Z(c_1a_n+c_2b_n)_{n=0}^{\infty}=c_1Z(a_n)_{n=0}^{\infty}+c_2Z(b_n)_{n=0}^{\infty}$ *pre lubovoľné* $c_1,c_2\in\boldsymbol{C}$.

2. (Multiplikácia) $Z(a^na_n)_{n=0}^{\infty}=F\left(\frac{z}{a}\right)$ *, pre všetky* $a\neq 0$.

3. (Derivácia obrazu) $Z(na_n)_{n=0}^{\infty}=-zF'(z)$.

1. $Z(c_1a_n+c_2b_n)_{n=0}^{\infty}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_1a_n}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_2b_n}{z^n}=c_1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}+c_2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{z^n}=c_1Z(a_n)_{n=0}^{\infty}+c_2Z(b_n)_{n=0}^{\infty}$.

2. $Z(a^na_n)_{n=0}^{\infty}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_na^n}{z^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\left(\frac{z}{a}\right)^n}=Z(\frac{z}{a})_{n=0}^{\infty}$.

3. $F'(z)=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}-\frac{na_n}{z^{n+1}}$, potom $-zF'(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{na_n}{z^{n+1}}=Z(na_n)_{n=0}^{\infty}$.

Example 124 $(c+2a^n)_{n=0}^{\infty}$. *Nájdime* $F(z)$.

Solution 125 $Z(c+2a^n)_{n=0}^{\infty}=Z(c)_{n=0}^{\infty}+2Z(a^n)_{n=0}^{\infty}=\frac{cz}{z-1}+2\frac{z}{z-a}$, $|z|>\max\{1,|a|\}$.□

Example 126 $(\sin\omega n)_{n=0}^{\infty}$. *Nájdime* $Z(\sin\omega n)_{n=0}^{\infty}$.

Solution 127 $\sin\omega n=\frac{1}{2i}(e^{i\omega n}-e^{-i\omega n})$. $F(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z-e^{i\omega}}-\frac{z}{z-e^{-i\omega}}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{z\left(z-e^{-i\omega}\right)-z\left(z-e^{i\omega}\right)}{(z-e^{i\omega})(z-e^{-i\omega})}\right)=\frac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$.□

Example 128 $(a^n\sin\omega n)_{n=0}^{\infty}$. *Nájdime* $Z(a^n\sin\omega n)_{n=0}^{\infty}$.

Solution 129 $Z(a^n\sin\omega n)_{n=0}^{\infty}=\frac{\left(\frac{z}{a}\right)\sin\omega}{\left(\frac{z}{a}\right)^2-2\left(\frac{z}{a}\right)\cos\omega+1}=\frac{az\sin\omega}{z^2-2az\cos\omega+a^2}$.□

Example 130 $(n)_{n=0}^{\infty}$. *Nájdime* $Z(n)_{n=0}^{\infty}$.

Solution 131 $Z(n)_{n=0}^{\infty}=-z\left(\frac{z}{z-1}\right)'=\frac{z}{(z-1)^2}$.□

Example 132 $(n^2)_{n=0}^{\infty}$. *Nájdime* $Z(n^2)_{n=0}^{\infty}$.

Solution 133 $Z(n^2)_{n=0}^{\infty}=-z\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)'=\frac{z^2+z}{(z-1)^3}$.□

Takto možno nájsť obraz každého polynómu.

Example 134 $(a^nn)_{n=0}^{\infty}$. *Nájdime* $Z(a^nn)_{n=0}^{\infty}$.

Solution 135 $Z(a^nn)_{n=0}^{\infty}=\frac{\frac{z}{a}}{\left(\frac{z}{a}-1\right)^2}=\frac{az}{(z-a)^2}$.□

Theorem 136 *(Posun doprava) Nech* $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ *a* k *je nezáporné celé číslo. Definujme postupnosť* $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ *vzťahom* $b_n = \begin{cases} a_{n-k}, & ak\ n \geq k \\ 0, & ak\ n < k \end{cases}$. *Potom* $Z(b_n)_{n=0}^{\infty} = \frac{1}{z^k}F(z)$, *kde* $F(z)$ *je obraz* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. *Tiež:* $(a_{n-k}\mathbf{1}(n-k))_{n=0}^{\infty} \circeq \frac{1}{z^k}F(z)$.

$$\left(\overbrace{0,...0}^{k}, a_0, a_1, ...\right) \circeq \frac{1}{z^k}F(z).$$

$$Z(b_n)_{n=0}^{\infty} = \frac{a_0}{z^k} + \frac{a_1}{z^{k+1}} + \frac{a_2}{z^{k+2}} + \cdots = \frac{1}{z^k}(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots) = \frac{1}{z^k}F(z).$$

Example 137 $(0,0,0,1,1,1,\dots)$. *Nájdime* $F(z)$.

Solution 138 $(1)_{n=0}^{\infty} \circeq \frac{z}{z-1}$, *potom* $(0,0,0,1,1,1,\dots) \circeq \frac{1}{z^3}\frac{z}{z-1}$.□

Theorem 139 *(Posun doľava) Predpokladajme, že* $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ *má Z-obraz* $F(z)$ *a* k *je celé nezáporné číslo. Definujme postupnosť* $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ *rovnosťou* $b_n = a_{n+k}, n = 0, 1, ...$ *Potom* $Z(b_n)_{n=0}^{\infty} = z^k\left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1}\frac{a_n}{z^n}\right]$.

$$(a_k, a_{k+1}, ...) \circeq z^kF(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} - \frac{a_2}{z^2} - \cdots - \frac{a_{k-1}}{z^{k-1}}.$$

$$Z(b_n)_{n=0}^{\infty} = a_k + \frac{a_{k+1}}{z} + \frac{a_{k+2}}{z^2} + \cdots = z^k\left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1}\frac{a_n}{z^n}\right] = z^k\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n} - \sum_{n=0}^{k-1}\frac{a_n}{z^n}\right) =$$
$$= z^k\left(\frac{a_k}{z^k} + \frac{a_{k+1}}{z^{k+1}} + \frac{a_{k+2}}{z^{k+2}} + \frac{a_{k+3}}{z^{k+3}} + \dots\right) = a_k + \frac{a_{k+1}}{z} + \frac{a_{k+2}}{z^2} + \dots$$

Example 140 $(\sin 5\omega, \sin 6\omega, ...)$

Solution 141 $F(z) = z^5\left[\frac{zsin\omega}{z^2-2zcos\omega+1} - \frac{sin\omega}{z} - \frac{sin2\omega}{z^2} - \frac{sin3\omega}{z^3} - \frac{sin4\omega}{z^4}\right]$.□

Example 142 $((n+3)^2)_{n=0}^{\infty}$

Solution 143 $(n^2)_{n=0}^{\infty} \circeq \frac{z^2+z}{(z-1)^3}$, *potom* $F(z) = z^3\left[\frac{z^2+z}{(z-1)^3} - 0 - \frac{1}{z} - \frac{4}{z^2}\right] = \frac{z^5+z^4}{(z-1)^3} - z^2 - 4z$.□

Diferencia postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je definovaná: $\Delta(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_{n+1} - a_n)_{n=0}^{\infty}$.
Diferencie vyšších rádov: $\Delta^k(a_n)_{n=0}^{\infty} = \Delta\Delta^{k-1}(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

Example 144 *Pre* $\Delta^2(a_n)_{n=0}^{\infty} = \Delta(a_{n+1} - a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_{n+2} - a_{n+1} - (a_{n+1} - a_n))_{n=0}^{\infty} = (a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n)_{n=0}^{\infty}$, *tak*

$$\Delta(n)_{n=0}^{\infty} = (1)_{n=0}^{\infty},\ \Delta^2(n)_{n=0}^{\infty} = (0)_{n=0}^{\infty}.$$

Theorem 145 *Nech* $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ *má Z-obraz* $F(z)$. *Potom* $Z(\Delta a_n)_{n=0}^{\infty} = (z-1)F(z) - za_0$.

$(a_{n+1})_{n=0}^{\infty} = (a_1, a_2, ...). = z[F(z) - a_0]$.
$\Delta(a^n)_{n=0}^{\infty} \circeq zF(z) - za_0 - F(z)$.

Definition 146 *Predpokladajme, že* $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$*.Konvolúciou týchto postupností je postupnosť* $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}$*, definovaná vzťahom* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, n = 0, 1, ...$, $c_0 = a_0 b_0, c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$.

Example 147 $(1)_{n=0}^{\infty} * (1)_{n=0}^{\infty} = (n+1)_{n=0}^{\infty}$

Example 148 $(1)_{n=0}^{\infty} * (e^n)_{n=0}^{\infty} = (1, 1+e, 1+e+e^2, ...)$

Example 149 *Čo je konvolúciou s postupnosťou* $(0, 1, 0, 0, ...)$*?*

Solution 150 $(0, 1, 0, 0, ...) * (a_0, a_1, a_2, ...) = (0, a_0, a_1, ...)$.

Example 151 *Čo je konvoluciou s postupnosťou* $(\delta_{kn})_{n=0}^{\infty}$*?*

Solution 152 $(0, 0, 0, \ldots, \underset{k}{1}, 0, 0, ...) * (a_0, a_1, a_2, ...) = (\underbrace{0, 0, 0, \ldots 0}_{k}, a_0, a_1, ...)$ *je posun doprava o k-pozícii..*

Theorem 153 *(Veta o konvolúcii) Predpokladajme, že* $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0, Z(a_n)_{n=0}^{\infty} = F(z), Z(b_n)_{n=0}^{\infty} = G(z)$*. Potom*

$Z[(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}] = F(z)G(z)$.

$$F(z)G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{z^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)}{z^n} = Z[(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}]$$

Example 154 $(n+1)_{n=0}^{\infty} = (1)_{n=0}^{\infty} * (1)_{n=0}^{\infty} \stackrel{\circ}{=} \left(\frac{z}{z-1}\right)^2$.□

Example 155 $(1)_{n=0}^{\infty} * (e^n)_{n=0}^{\infty} \stackrel{\circ}{=} \frac{z}{z-1} \frac{z}{z-e} = \frac{z^2}{(z-1)(z-e)}$.□

Example 156 *Určte posloupnost* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$*, pre ktorú platí* $(a_n)_{n=0}^{\infty} * (2^n)_{n=0}^{\infty} = (4^n)_{n=0}^{\infty}$.

Solution 157 $Z(a_n)_{n=0}^{\infty} \cdot \frac{z}{z-2} = \frac{z}{z-4} \Longrightarrow Z(a_n)_{n=0}^{\infty} = \frac{z-2}{z-4} = 1 + \frac{2}{z-4} \stackrel{\circ}{=} (\delta_{n0} + 2.\mathbf{1}(n-1)4^{n-1})_{n=0}^{\infty} = (1, 2, 8, 32, ...)$.□

Example 158 *Pre akú postupnosť* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *platí, že* $(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$ *pre všetky* $(b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$*..*

Solution 159 $F(z) \cdot G(z) = G(z) \Longrightarrow F(z) = 1 \Longrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 0, 0, ...)$.□

Corollary 160 *Konvolučný súčin je komutatívny, asociatívny a má jednotkový prvok.*

Význam konvolúcie.

$L : Z_0 \to Z_0$

vstup $\longrightarrow$ výstup

1. L je translačne invariantný, tj. ak $L(a_n)_{n=0}^{\infty} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$, potom $L(\mathbf{1}(n-k)a_{n-k})_{n=0}^{\infty} = (\mathbf{1}(n-k)b_{n-k})_{n=0.}^{\infty}$

2. L je lineárny, tj $L(c_1(a_n)_{n=0}^{\infty} + c_2(b_n)_{n=0}^{\infty} + \ldots) = c_1 L(a_n)_{n=0}^{\infty} + c_2 L(b_n)_{n=0}^{\infty} + \ldots$ Predpokladajme, že

$L(1, 0, ...) = (b0, b1, ...)$

vstup:
$a_0(1,0,0,...)+a_1(0,1,0,0,...)+...$
výstup:
$a_0\cdot\ (b_0,b_1,b_2,b_3,...)+$
$a_1\cdot\ (0,b_0,b_1,b_2,...)+$
$a_2\cdot\ (0,0,b_0,b_1,...)+...$
$(a_0b_0,a_0b_1+a_1b_0,a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0,...)$
Záver: Odozva na $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je $(a_n)_{n=0}^{\infty}*(b_n)_{n=0}^{\infty}=(a_n)_{n=0}^{\infty}*L(1,0,0,...)$ alebo $L(a_n)_{n=0}^{\infty}=(a_n)_{n=0}^{\infty}*L(1,0,0,...)$.

Theorem 161 *Ak je* $Z(a_n)_{n=0}^{\infty}=F(z)$, *potom* $Z\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)_{n=0}^{\infty}=\frac{zF(z)}{z-1}$.
$\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)_{n=0}^{\infty}=(a_n)_{n=0}^{\infty}*(1)_{n=0}^{\infty}.=\frac{z}{z-1}F(z)$.

Example 162 $Z\left(\sum_{k=0}^{n}k\right)=\frac{z}{z-1}.\frac{z}{(z-1)^2}=\frac{z^2}{(z-1)^3}.\square$

Inverzná Z-transformácia.
$Z^{-1}:K_0\to Z_0,\ \ F(z)\mapsto(a_n)_{n=0}^{\infty},\ \ F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}$.
Metódy výpočtu:

- rozvoj do Laurentovho radu
- integrálna forma koeficientov, veta o rezíduách $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)z^{n-1}dz$, kde C je kladne orientovaná kružnica so stredom v počiatku, ležiaci v oblasti, kde je obraz analytický.

Podľa vety o rezíduách: $a_n=\sum_{z_i}res_{z_i}(F(z)z^{n-1})$. Suma cez singularity ležiace vo vnútri C.

- priame vzorce $a_0=\lim_{z\to\infty}F(z)$, $a_1=\lim_{z\to\infty}z(F(z)-a_0)$, $a_2=\lim_{z\to\infty}z^2\left(F(z)-a_0-\frac{a_1}{z}\right)$,
- $a_{n+1}=(-1)^{n+1}\lim_{z\to\infty}\frac{z^{n+2}}{(n+1)!}[z^nF(z)]^{(n+1)}$.
- známe obrazy
- konvolúcia

Example 163 $F(z)=\sin\frac{1}{z}$

Solution 164 $\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}}$, $a_{2n+1}=(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}$, $a_{2n}=0$.

Example 165 $F(z)=\frac{1}{(z-1)(z-e)}$

Solution 166 $F(z)=\frac{1}{1-e}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-e}\right)$
$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}.\frac{z}{z-1}\circeq(0,1,1,...)$,
$\frac{1}{z-e}=\frac{1}{z}.\frac{z}{z-e}\circeq(0,1,e,e^2,...)$,
$Z^{-1}F(z)=\frac{1}{1-e}(0,0,1-e,1-e^2,...)$.

Example 167 $F(z) = \frac{1}{(z-1)(z-e)}$.

Solution 168 *Metódou reziduí:* $a_0 = \lim_{z\to\infty} F(z) = 0$,
$n \geq 1,\ a_n = res_1 \frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-e)} + res_e \frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-e)} = \frac{1}{1-e} + \frac{e^{n-1}}{e-1} = \frac{1-e^{n-1}}{1-e}.\square$

Example 169 $F(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$.

Solution 170 $F(z) = \frac{1}{z}\frac{z}{(z-1)^2} \mathrel{\hat{=}} (0, 0, 1, 2, 3, ...)$.

pomocou rezíduí: $n \geq 1$
$a_n = res_1 \frac{z^{n-1}}{(z-1)^2} = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz} z^{n-1} = n - 1.\square$

Example 171 *Pomocou Z transformácie nájdime súčet* $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2$.

Solution 172 $(n^2) \mathrel{\hat{=}} \frac{z^2+z}{(z-1)^3}$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 \mathrel{\hat{=}} \frac{z}{z-1}\frac{z^2+z}{(z-1)^3} = \frac{z^3+z^2}{(z-1)^4}$,
$res_1 \frac{z^3+z^2}{(z-1)^4} z^{n-1} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{3!}(z^{n+2}+z^{n+1})^{(3)} = \frac{1}{3!}[(n+2)(n+1)n+(n+1)n(n-1)] = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Aplikácia z-transformácie pri riešení diferenčných rovníc.

Diferenčné rovnice.

Motivácia: teória signálov, numerické riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc, reťazové siete, ... Diferenčné rovnice majú podobnú štruktúru ako diferenciálne rovnice, hľadá sa riešenie v tvare postupnosti, ktorá vyhovuje začiatočným podmienkám. Riešenie týchto rovníc pomocou Z transformácie je diskrétnou analógiou rešení diferenciálnych rovníc pomocou Laplaceovej transformácie.

Example 173 $y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = 0$, $y_0 = y_1 = 1$.*(homogénna diferenčná rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami)*

Solution 174 *Riešme diferenčnú rovnicu:*
$(y_n)_{n=0}^{\infty} \mathrel{\hat{=}} Y(z)$, $(y_{n+1})_{n=0}^{\infty} \mathrel{\hat{=}} z[Y(z) - y_0] = z(Y(z) - 1)$,
$(y_{n+2})_{n=0}^{\infty} \mathrel{\hat{=}} z^2 [Y(z) - y_0 - y_1 z] = z^2 \left[Y(z) - 1 - \frac{1}{z}\right] = z^2Y(z) - z^2 - z.\square$
Riešime transformáciu rovnice:
$z^2Y(z) - z^2 - z + 2zY(z) - 2z + Y(z) = 0 \Longrightarrow Y(z)(z^2 + 2z + 1) = z^2 + 3z$.
$Y(z) = \frac{z^2+3z}{(z+1)^2}$.
Urobíme inverznú transformáciu:
$n \geq 1$, $y_n = res_{-1} \left[\frac{z^2+3z}{(z+1)^2} z^{n-1}\right] = \lim_{z\to -1} [(n+1)z^n + 3nz^{n-1}] =$
$= (n+1)(-1)^n + 3n(-1)^{n-1} = (-1)^n(1-2n)$.

Potom $(y_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 1, -3, 5, ...)$. *V mnohých prípadoch dáva takýto výpočet lepšiu predstavu než numerický výpočet, v ktorom sa hromadia zaokrouhľovacie chyby.*$\square$

Example 175 *Riešme diferenčnú rovnicu* $y_{n+2} = \frac{10}{3}y_{n+1} - y_n$, $y_0 = 1, y_1 = \frac{1}{3}$.

Solution 176 $(y_n)_{n=0}^{\infty} \circeq Y(z),\ \ (y_{n+1})_{n=0}^{\infty} \circeq z[Y(z)-y_0] = z(Y(z)-1),$
$(y_{n+2})_{n=0}^{\infty} \circeq z^2\left[Y(z)-y_0-y_1 z\right] = z^2\left[Y(z)-1-\frac{1}{3}\frac{1}{z}\right] = z^2Y(z)-z^2-\frac{1}{3}z.$
Riešime transformáciu rovnice:
$z^2[Y(z)-1-\frac{1}{3}\frac{1}{z}] = \frac{10}{3}z[Y(z)-1]-Y(z) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow Y(z)(z^2-\frac{10}{3}z+1) = z^2+\frac{z}{3}-\frac{10z}{3} = z^2-3z,$
$Y(z) = \frac{(z^2-3z)}{(z-3)(z-\frac{1}{3})} = \frac{z}{(z-\frac{1}{3})} \circeq ((\frac{1}{3})^n)_{n=0}^{\infty}.$
Ak urobíme numerický výpočet na tri platné číslice dostaneme nezmyselné výsledky: $y_0 = 1, y_1 = 0,333, ...,$
$y_6 = -0,092, ..., y_{10} = -5,65.$

Example 177 *Fibonanciho čísla. Fibonanci v diele Liber Abaci (1212). Úloha o populácii králikov: každý pár sa zreprodukuje po dvoch mesiacoch:* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233. *Postupnosť sa riadi zákonom:*

$$\overbrace{y_{n+2}}^{\textit{čo bude}} = \overbrace{y_{n+1}}^{\textit{čo je}} + \overbrace{y_n}^{\textit{prírastok}},\, y_0 = y_1 = 1.$$

Solution 178 *Transformácia rovnice:* $z^2\left[Y(z)-1-\frac{1}{z}\right] = z[Y(z)-1]+Y(z) \Longrightarrow$ $(z^2-z-1)Y(z) = z^2 \Longrightarrow Y(z) = \frac{z^2}{z^2-z-1}$
Inverzia: $\frac{z^2}{z^2-z-1} = z\frac{z}{z^2-z-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}z\left(\frac{z}{z-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{z}{z-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)\Delta$
$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$
Binet (1786-1856). Kombinácia dvoch geometrických radov, jeden z nich mizne v nekonečne:
$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. = 1,61803$ *súvisí s pomerom zlatého rezu.*$\square$

Example 179 *Riešme diferenčnú rovnicu* $\Delta^2 y_n + y_n = 0,\ y_0 = 1, \Delta y_0 = 0.$

Solution 180 $\Delta(y_n)_{n=0}^{\infty} \circeq (z-1)Y(z)-z,$
$\Delta^2(y_n)_{n=0}^{\infty} = (z-1)[(z-1)Y(z)-z]-0 = (z-1)^2Y(z)-z(z-1)$
$[(z-1)^2+1]Y(z) = z(z-1) \Longrightarrow Y(z) = \frac{z(z-1)}{(z-1)^2+1} = \frac{z^2-z}{z^2-2z+2} = z\frac{z-1}{(z-1-i)(z-1+i)} =$ $\frac{1}{2}z\left(\frac{1}{z-1-i}+\frac{1}{z-1+i}\right).$
$y_n = \frac{1}{2}[(1+i)^n+(1-i)^n] = \mathrm{Re}(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^n = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}.\square$

Example 181 *Riešme diferenčnú rovnicu* $\Delta^2 y_n = 2,\ \ y_0 = 0, \Delta y_0 = 1.$

Solution 182 $\Delta^2(y_n)_{n=0}^{\infty} = (z-1)^2Y(z)-z \Longrightarrow Y(z)(z-1)^2 = 2\frac{z}{z-1}+z.$
$Y(z) = 2\frac{z}{(z-1)^3}+\frac{z}{(z-1)^2} \Longrightarrow res_1\frac{z^n}{(z-1)^3} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{2}(z^n)^{(2)} = \frac{1}{2}n(n-1)$
$y_n = n(n-1)+n = n^2.\square$

Example 183 *Rovnica s konvolučným jadrom* $y_{n+2}+\sum_{k=0}^{n}2^k y_{n-k} = 1,\ \ y_0 = y_1 = 0.$

Solution 184 $z^2Y(z)+\frac{z}{z-2}Y(z) = \frac{z}{z-1} \Longrightarrow Y(z) = \frac{z-2}{(z-1)^3} \Longrightarrow y_n = res_1\frac{(z-2)z^{n-1}}{(z-1)^3} =$ $\lim_{z\to 1}\frac{1}{2}(z^n-2z^{n-1})^{(2)} =$
$= \frac{1}{2}n(n-1)-(n-1)(n-2) = (n-1)\left[2-\frac{n}{2}\right].\square$

Example 185 *Vyjadrime vzorcom riešenie diferenčnej rovnice* $y_{n+1} - 2y_n = a_n$, *kde* $y_0 = 0$ *a* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *je ľubovoľná postupnosť zo* Z_0.

Solution 186 *Transformácia:* $zY(z) - 2Y(z) = F(z)$, *kde* $F(z) = Z\left((a_n)_{n=0}^{\infty}\right)$.
$Y(z) = \frac{F(z)}{z-2} \circeq (\mathbf{1}(n-1)2^{n-1})_{n=0}^{\infty} * (a_n)_{n=0}^{\infty}$.
Pre $n \geq 1$ $\quad y_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} a_{n-k}$.$\square$

Example 187 *Riešme diferenčnú rovnicu* $y_{n+3} + y_n = a_n$, $y_0 = y_1 = y_2 = 0$.

Solution 188 *Transformácia:* $z^3Y(z) + Y(z) = F(z)$, *kde* $F(z) = Z\left((a_n)_{n=0}^{\infty}\right)$.
$Y(z) = \frac{F(z)}{z^3+1}$, $\frac{1}{z^3+1} = \frac{1}{z^3}\frac{1}{1+\frac{1}{z^3}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{z^{3(n+1)}} \circeq (0,0,0,1,0,0,-1,0,0,1,0,0,-1,...)$
$y_n = a_{n-3} - a_{n-6} + a_{n-9} - ...$$\square$

Example 189 *Pomocou diferenčných rovníc určte súčet* $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}$.

Solution 190 $y_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}$. *Teda* $\quad y_{n+1} - y_n = \frac{n+1}{2^{n+1}}$, $y_0 = 0$.
$(\frac{n}{2^n})_{n=0}^{\infty} \circeq \frac{2z}{(2z-1)^2} = \frac{1}{2}\frac{z}{(z-\frac{1}{2})^2}$,
$\left(\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)_{n=0}^{\infty} \circeq \frac{1}{2}\frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})^2}$, $\quad zY(z) - Y(z) = \frac{1}{2}\frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})^2} \Longrightarrow Y(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)}\frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})^2}$
$res_1 \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)}\frac{z^{n+1}}{(z-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = 2.$ $\quad res_{\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-1)}\frac{z^{n+1}}{(z-\frac{1}{2})^2} = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{z^{n+1}}{z-1}\right)^{(1)} =$
$= \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{(n+1)z^n(z-1) - z^{n+1}}{(z-1)^2}\right) = 2\left[\frac{n+1}{2^n}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2^{n+1}}\right] = -\frac{n+1}{2^n} - \frac{1}{2^n}.$
$y_n = 2 - \frac{n+1}{2^n} - \frac{1}{2^n}$$\square$

Cvičenia.

V úlohách nájdite Z-obrazy nasledujúcich postupností $(a_n)_{n=0}^{\infty}$

1. $(a_n)_{n=0}^{\infty} = \left(e^{-n} + 2^{\frac{n}{2}}\right)_{n=0}^{\infty}$.
   $\left[\frac{ez}{ez-1} + \frac{z}{z-\sqrt{2}}\right]$
2. $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (3^n \cos 2n)_{n=0}^{\infty}$.
   $\left[\frac{z(z-3\cos 2)}{z^2-6z\cos 2+9}\right]$
3. $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (n2^n)_{n=0}^{\infty}$. $\left[\frac{2z}{(z-2)^2}\right]$
4. $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (3^{n+1})_{n=0}^{\infty}$. $\left[\frac{3z}{z-3}\right]$
5. $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (n+2)_{n=0}^{\infty}$.
   $\left[\frac{z(2z-1)}{(z-1)^2}\right]$

   Nájdite postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$, ktorej obraz je vyjadrený predpisom:
6. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$.
   $[a_0 = 0, a_n = 3^{n-1} - 2^{n-1}, n \in \boldsymbol{N}]$
7. $\frac{z}{z^2+1}$. $\left[\left(\sin \frac{n\pi}{2}\right)_{n=0}^{\infty}\right]$
8. $\frac{z+1}{z(z^2+2z+2)}$. $\left[a_0 = 0, a_n = \left(\frac{1}{2} - i\right)(1+i)^{n-1} + \left(\frac{1}{2} + i\right)(1-i)^{n-1}, n \in \boldsymbol{N}\right]$
9. $\frac{z}{(z^4-1)}$. $\left[\frac{1+(-1)^{n-1}}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{2}.\right]$

   Riešme ZÚ pre diferenčné rovnice:
10. $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 0,\ y_0 = 1, y_1 = 4.$ $\left[\left(2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{2} + 3\sin\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n=0}^{\infty}\right]$
11. $y_{n+2} + 3y_{n+1} - 4y_n = e^n,\ y_0 = 0, y_1 = 1.$ $\left[\frac{e-2}{5(e-1)} + \frac{e^n}{e^2+3e+4} - (-4)^n\,\frac{3+e}{5(e+4)}\right]$
12. $y_{n+1} + 2y_n = a_n,\ y_0 = 0, a_n = \begin{cases} n, & \text{ak } n < 4 \\ 0, & \text{ak } n \geq 4 \end{cases}$.
    $\left[y_0 = y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 0, y_n = 3\,(-2)^{n-4}, n > 3.\right]$

BIBLIOGRAPHY

[1] Galanová, J., Gatial, J., Kaprálik, P.: Lineárna algebra, STU Bratislava, 2002

[2] Marko Ľ.: Matematická analýza online, 2001, http://www.aladin.elf.stuba.sk/~marko

[3] Stroud,K.A.: Engineering Mathematics, Macmillan Presss LTD, Hong Kong, 1993

[4] Šulka, R., Moravský, L., Satko, L.: Matematická analýza I, Alfa, SNTL, Bratislava 1986

[5] Glyn, J.: Modern engineering mathematics, Addison Wesley, 2008

[6] Fisher S.D.: Complex Variables, (second edition), Wadsworth&Brooks/Cole, London, 1990