# Matematika 3

Ľ. Marko

November 12, 2019

# CONTENTS

# PREDHOVOR

Tento učebný text z funkcií komplexnej premennej som vytvoril po novej akreditácii pre študijné odbory AM, ENE, ET, JFI počas zimného semestra školského roku 2018/2019. Nemožno ho považovať za konečnú verziu. Pretože predmet "Matematika 3E" sa vyučuje prvý krát, budem text dopĺňať a adaptovať aj v priebehu zimného semestra školského roku 2019/20. Ľ. Marko

## Krivkové integrály

### Cesty a krivky.

Nech $\boldsymbol{c} : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ je spojitá funkcia. Pre každé $t \in \langle a, b\rangle$ existuje $\boldsymbol{c}(t) \in \boldsymbol{R}^n$. Môžme predpokladať, že $t$ reprezentuje čas a $\mathbf{c}(t)$ je polohu pohybujúceho sa bodu v čase $t$. Ako sa mení $t \in \langle a, b\rangle$, tak pohybujúci sa bod vytvára krivku.

**Definition 1** *Spojitú funkciu* $\boldsymbol{c} : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ *nazývame cestou, jej obraz - množinu* $C = \mathbf{c}(\langle a, b\rangle)$ *nazývame krivkou.*

*Ak je funkcia* $\mathbf{c}$ *injektívna na* $\langle a, b\rangle$ *, cestu (krivku) nazývame jednoduchou.*

*Bod* $\boldsymbol{c}(a)$ *nazývame začiatočný bod krivky, bod* $\boldsymbol{c}(b)$ *nazývame koncový bod krivky.*

*Ak je* $\boldsymbol{c}$ *injektívna na* $\langle a, b)$ *a* $\boldsymbol{c}(a) = \boldsymbol{c}(b)$*, potom* $\boldsymbol{c}$ *nazývame jednoduchá uzavretá cesta.*

*Ak* $\boldsymbol{c} \in C^1$*, potom* $\boldsymbol{c}$ *nazývame* $C^1$ *cestou.*

*Ak* $\mathbf{c} \in C^1$ *a* $\boldsymbol{c}'(t) \neq \mathbf{0}$, $\forall t \in \langle a, b\rangle$ *potom* $\mathbf{c}$ *nazývame hladkou cestou.*

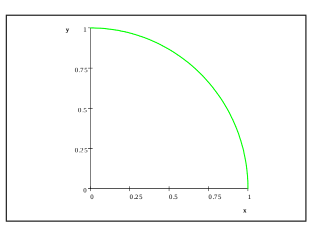
*Funkciu* $\boldsymbol{c}(t)$ *nazývame parametrizácia, alebo parametrické rovnice krivky* $C$*.*

*Cesty majú orientáciu - krivka sa vykresľuje v smere rastúceho* $t$*.*

Všimnime si, že krivka nie je grafom funkcie $\boldsymbol{c}$, ale jej obrazom. Injektívnosť funkcie $\boldsymbol{c}$ znamená, že krivka je jednoduchá t.j. taká, ktorá sama seba nepretína, t.j. nemá vlastné priesečníky.

**Example 2** *Nech* $C = [\boldsymbol{c}]$, $\boldsymbol{c} : \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{c}(t) = (\cos t, \sin t)$*. Zistite, či* $\boldsymbol{c}$ *je cesta, ak áno načrtnite jej obraz.*

**Solution 3** *Funkcia* $\boldsymbol{c}$ *je spojitá,* $\boldsymbol{c} \in C^1$, $\boldsymbol{c}'(t) \neq \mathbf{0}$, $\forall t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ *,je to hladká cesta, jej obrazom je hladká krivka* $C = \boldsymbol{c}\left(\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle\right)$*, t.j. štvrťkružnica v prvom kvadrante v* $\boldsymbol{R}^2$*. Krivka* $C$ *sa vykresľuje od bodu* $[1, 0]$ *po bod* $[0, 1]$*.*



$\square$

Dôležitým pojmom je dĺžka cesty.

**Definition 4** *Nech* $\boldsymbol{c} : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ *je cesta. Pre ľubovoľné delenie intervalu* $\langle a, b\rangle$

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b\}$$

*označme*

$$S(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{m} \|\boldsymbol{c}(t_i) - \boldsymbol{c}(t_{i-1})\| \,.$$

*Cesta* $\boldsymbol{c}$ *sa nazýva rektifikovateľná, ak sú všetky sumy* $S(\mathcal{P})$ *ohraničené zhora a dĺžka oblúka (cesty)* $\boldsymbol{c}$ *je definovaná*

$$L_{\boldsymbol{c}} = \sup\left\{S(\mathcal{P});\ \mathcal{P} \ \text{ je delenie } \ \langle a, b\rangle\right\}.$$

Intuitívne vieme, že dĺžka cesty by sa mala dať aproximovať sumou dĺžok lomenej čiary cez body $\boldsymbol{c}(t_1), \boldsymbol{c}(t_2), \ldots, \boldsymbol{c}(t_m)$.

**Theorem 5** *Ak* $\boldsymbol{c}$ *je hladká cesta, potom*

$$L_{\boldsymbol{c}} = \int_a^b \|\boldsymbol{c}\,'(t)\|\, dt.$$

**Example 6** *Vypočítajte dĺžku cesty* $\boldsymbol{c} : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{c}(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}\right)$, *t.j. dĺžku oblúka paraboly.*

**Solution 7** *Máme*

$$L_{\boldsymbol{c}} = L_{\boldsymbol{c}} = \int_0^1 \|\boldsymbol{c}\,'(t)\|\, dt = \int_0^1 \|(1, t)\|\, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right). \square$$

Ak $\boldsymbol{c} : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ je cesta a ak $u \in (a, b)$, potom „rozrezaním" cesty $\boldsymbol{c}$ na dve časti dostávame dve cesty:

$$\boldsymbol{c}^{(1)} : \langle a, u\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n,$$

$$\boldsymbol{c}^{(2)} : \langle u, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n.$$

Ľahko sa dá ukázať, že $\boldsymbol{c}$ je rektifikovateľná $\Longleftrightarrow$ ak obe cesty $\boldsymbol{c}^{(1)}$ aj $\boldsymbol{c}^{(2)}$ sú rektifikovateľné. Niekedy potrebujeme spojiť dve krivky do jedinej krivky. Predpokladáme, že jedna krivka končí v bode $P$ a druhá v bode $P$ začína. Ak chceme definovať novú krivku ako jednu krivku môžme tak urobiť pomocou reparametrizácie krivky.

**Definition 8** *Nech* $\boldsymbol{c} : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ *je cesta a nech* $\Phi : \langle \alpha, \beta\rangle \longrightarrow \langle a, b\rangle$ *je spojitá bijekcia. Potom zložená funkcia* $\boldsymbol{c} \circ \Phi : \langle \alpha, \beta\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ *sa nazýva reparametrizácia cesty* $\boldsymbol{c}$.

**Theorem 9** *Nech* $\boldsymbol{c} : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ *je cesta a nech* $\Phi : \langle \alpha, \beta\rangle \longrightarrow \langle a, b\rangle$ *je spojitá bijekcia. Potom pre reparametrizáciu cesty* $\boldsymbol{c}$: $\boldsymbol{c} \circ \Phi : \langle \alpha, \beta\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ *platí:* $C = [\boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{c} \circ \Phi]$.

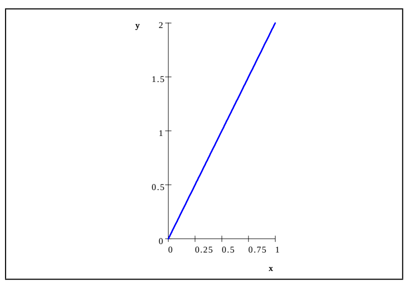
Pretože funkcia $\Phi$ je buď ostro rastúca, alebo ostro klesajúca na $\langle \alpha, \beta \rangle$, krivka sa teraz vykresľuje buď v tom istom smere ako predtým, alebo v opačnom smere. Hovoríme, že $\Phi$ zachováva orientáciu krivky ak $(\boldsymbol{c} \circ \Phi)(\alpha) = \boldsymbol{c}(a)$ a $(\boldsymbol{c} \circ \Phi)(\beta) = \boldsymbol{c}(b)$ a $\Phi$ mení orientáciu na opačnú ak $(\boldsymbol{c} \circ \Phi)(\alpha) = \boldsymbol{c}(b)$ a $(\boldsymbol{c} \circ \Phi)(\beta) = \boldsymbol{c}(a)$. Body $\boldsymbol{c}(a)$, $\boldsymbol{c}(b)$ nazývame krajné body krivky $C$. Podľa predchádzajúcej definície dvojica krajných bodov krivky nezávisí od reparametrizácie a je jednoznačne určená. Od reparametrizácie závisí len voľba začiatočného a koncového bodu krivky.

**Remark 10** *Tvrdenie vety implikuje, že jedna krivka môže mať (aj nekonečne) mnoho rôznych parametrizácií.*

**Example 11** *Ak* $\boldsymbol{c} : \langle a, b \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ *je cesta, potom* $\boldsymbol{c}_1 : \langle 0, 1 \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{c}_1(t) = \boldsymbol{c}((1-t)\, a + tb)$ *je orientáciu zachovávajúca reparametrizácia cesty* $\boldsymbol{c}$.

**Example 12** *Nech* $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d} : \langle 0, 1 \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{c}(t) = (t, 2t)$, $\boldsymbol{d}(t) = (1-t, 2-2t)$. *Zistite, či* $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ *sú cesty ak áno načrtnite zodpovedajúce krivky v* $\boldsymbol{R}^2$.

**Solution 13** *Cesta* $\boldsymbol{c}$ *je úsečka spájajúca začiatočný bod* $[0, 0]$ *s koncovým bodom* $[1, 2]$. *Cesta* $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{c} \circ \Phi$, $\Phi : \langle 0, 1 \rangle \longrightarrow \langle 0, 1 \rangle$, $\Phi(t) = 1 - t$ *je jej reparametrizácia, ktorá mení orientáciu na opačnú.*




□

Nech teraz $\boldsymbol{c}^{(1)} : \langle a, b \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ a $\boldsymbol{c}^{(2)} : \langle a, b \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ sú dve cesty také, že $\boldsymbol{c}^{(1)}(b) = \boldsymbol{c}^{(2)}(a)$. Potom ich môžme zložiť do jednej cesty

$$\boldsymbol{c} : \langle a, b \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{c}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{c}^{(1)}(2t - a), & t \in \left\langle a, \frac{a+b}{2} \right\rangle \\ \boldsymbol{c}^{(2)}(2t - b), & t \in \left\langle \frac{a+b}{2}, b \right\rangle \end{cases}.$$

Zloženú krivku $C$ zvykneme zapisovať $C = C^{(1)} \cup C^{(2)}$, pričom $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ sú zúženia krivky $C$, ktoré nazývame čiastočné krivky. V tomto procese možno pokračovať konečný počet krát. Ak každá časť výslednej cesty je hladká cesta, hovoríme o po častiach hladkej ceste, t.j. jej derivácie sú spojité a rôzne od $\mathbf{0}$ s výnimkou konečného počtu bodov. Je zrejmé, že dĺžka po častiach hladkej cesty je suma dĺžok jednotlivých hladkých častí, ktoré vieme vypočítať.

**Example 14** *Nech* $C$ *je trojuholník s vrcholmi* $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$. *Obvod trojuholníka* $OAB$ *je po častiach* $C^1$ *krivka, nájdime jej parametrizáciu.*

**Solution 15** *Označme*

$$\overrightarrow{OA} = C^{(1)} : \boldsymbol{c}^{(1)} : \langle 0,1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^3,\ \boldsymbol{c}^{(1)}(t) = (t,0)\,,$$
$$\overrightarrow{AB} = C^{(2)} : \boldsymbol{c}^{(2)} : \langle 0,1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^3,\ \boldsymbol{c}^{(2)}(t) = (1-t,t)\,,$$
$$\overrightarrow{BO} = C^{(3)} : \boldsymbol{c}^{(3)} : \langle 0,1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^3,\ \boldsymbol{c}^{(3)}(t) = (0,1-t)\,,$$

*potom krivka* $C = C^{(1)} \cup C^{(2)} \cup C^{(3)}$ *sa dá parametrizovať funkciou:* $\boldsymbol{c} : \langle 0,3\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^3,\ \boldsymbol{c}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{c}^{(1)}(t) & \text{pre} \quad t \in \langle 0,1\rangle \\ \boldsymbol{c}^{(2)}(t-1) & \text{pre} \quad t \in \langle 1,2\rangle \\ \boldsymbol{c}^{(3)}(t-2) & \text{pre} \quad t \in \langle 2,3\rangle \end{cases}$ .□

Nech teraz $\boldsymbol{c}$ je hladká cesta. Potom $\boldsymbol{c}\,'(t)$ sa nazýva dotykový vektor ku krivke $C$ v bode $\boldsymbol{c}(t)$. Skutočne priamka v $\boldsymbol{R}^n$

$$\frac{\boldsymbol{c}(t+h) - \boldsymbol{c}(t)}{h}$$

je rovnobežná so sečnicou spájajúcou body $\boldsymbol{c}(t)$ a $\boldsymbol{c}(t+h)$, teda ak predpokladáme, že limita $lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{c}(t+h)-\boldsymbol{c}(t)}{h}$ existuje je dotyčnicou ku krivke $C$ v bode $\boldsymbol{c}(t)$.Ak $\boldsymbol{c}(t)$ interpretujeme ako krivku vykreslenú z pohybujúcich sa bodov, $\boldsymbol{c}\,'(t)$ sa nazýva vektor rýchlosti $\boldsymbol{c}\,'(t)$ udáva smer pohybu a $s\,'(t) = \|\boldsymbol{c}\,'(t)\|$ je rýchlosť. Zrýchlenie je $\boldsymbol{c}\,''(t)$. Jednotkový dotykový vektor ku krivke $C$ v bode $\boldsymbol{c}(t)$ definujeme

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\boldsymbol{c}\,'(t)}{\|\boldsymbol{c}\,'(t)\|},$$

ktorý je definovaný pre každé $t$ také, že $\boldsymbol{c}\,'(t) \neq \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{T}$ má smer, v ktorom je krivka popísaná ak $t$ rastie. $\|\boldsymbol{T}(t)\| = 1$.

Nech $C = [\boldsymbol{c}]\,,\ \boldsymbol{c} : \langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ je krivka a nech jej rýchlosť nie je rovná nule pre žiadne $t$. Potom

$$\boldsymbol{T}(t) \cdot \boldsymbol{T}(t) = \|\boldsymbol{T}(t)\|^2 = 1$$

odkiaľ po derivácii dostávame

$$\boldsymbol{T}(t) \cdot \boldsymbol{T}'(t) = 0,$$

t.j. $\boldsymbol{T}'(t)$ je normála ku dotykovému vektoru. (Pre $C^2$ krivku možno definovať v $\boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{T}\,'(t)}{\|\boldsymbol{T}\,'(t)\|}$ v bode $\boldsymbol{c}(t)$.)

Krivkové integrály.

Výsledky tohto odseku budú platné v Euklidovských priestoroch ľubovoľnej dimenzie, pretože pri odvodzovaní budeme používať iba skalárny súčin. V ďalšom texte budeme predpokladať, že $C = [\boldsymbol{c}]\,,\ \boldsymbol{c} : \langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ je jednoduchá $C^1$ krivka.

**Definition 16** *Nech* $C = [\boldsymbol{c}]\,,\ \boldsymbol{c} : \langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ *je jednoduchá, hladká (JH) krivka a* $f : D(f)\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je spojitá skalárna funkcia, ktorej definičný obor obsahuje* $C$; $C \subset D(f)$. *Krivkový integrál zo skalárnej funkcie* $f$ *po krivke* $C$ *definujeme*

$$\int_C f(s)\,ds = \int_a^b f(\boldsymbol{c}(t))\,\|\boldsymbol{c}\,'(t)\|\,dt.$$

*Ak* $C = \bigcup_{i=1}^m C^{(i)}$ *je jednoduchá po častiach hladká (JPČH) krivka, t.j. čiastočné krivky* $C^{(i)}$ *sú jednoduché hladké krivky, definíciu krivkového integrálu zo skalárnej funkcie rozšírime takto:* $\int_C f(s)\,ds = \sum_{i=1}^m \int_{C^{(i)}} f(s)\,ds$.

Integrál zo skalárnej funkcie nazývame tiež neorientovaný krivkový integrál.

**Theorem 17** *Nech* $C = [\boldsymbol{c}]$, $\boldsymbol{c} : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ *je jednoduchá hladká krivka a nech* $\Phi : \langle \alpha, \beta\rangle \longrightarrow \langle a, b\rangle$ *je bijektívna* $C^1$ *funkcia, teda* $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{c} \circ \Phi : \langle \alpha, \beta\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ *je reparametrizácia krivky* $C$*. Potom*

$$\int_C f(s)\, ds = \int_a^b f(\boldsymbol{c}(t)) \left\|\boldsymbol{c}\,'(t)\right\| dt = \int_\alpha^\beta f(\boldsymbol{p}(\tau)) \left\|\boldsymbol{p}'(\tau)\right\| d\tau.$$

**Remark 18** *Teda pre ľubovoľnú reparametrizáciu aj pre opačnú orientáciu sa zmení znamienko* $\boldsymbol{c}\,'(t)$*, čo však nevplýva na znamienko* $\left\|\boldsymbol{c}\,'(t)\right\|$*. To znamená, že hodnota krivkového integrálu zo skalárneho poľa nezávisí od parametrizácie ani od orientácie krivky.*

**Example 19** *Vypočítajme* $\int_C (x^2 + y^2)\, ds$*,ak* $C$ *je trojuholník s vrcholmi* $O = (0, 0), A = (1, 0), B = (0, 1)$.

**Solution 20** *Pretože krivkový integrál zo skalárneho poľa nezávisí od orientácie krivky môžme parametrizovať obvod trojuholníka* $OAB$ *tak ako v príklade. Potom*

$$\boldsymbol{c}^{(1)\,\prime}(t) = (1, 0) \quad a \quad \left\|\boldsymbol{c}^{(1)\,\prime}(t)\right\| = 1,\ \boldsymbol{c}^{(2)\,\prime}(t) = (-1, 1) \quad a \quad \left\|\boldsymbol{c}^{(2)\,\prime}(t)\right\| = \sqrt{2},$$

$$\boldsymbol{c}^{(3)\,\prime}(t) = (0, -1) \quad a \quad \left\|\boldsymbol{c}^{(3)\,\prime}(t)\right\| = 1.$$

$$\int_C \left(x^2 + y^2\right) ds = \int_{C_1} \left(x^2 + y^2\right) ds + \int_{C_2} \left(x^2 + y^2\right) ds + \int_{C_3} \left(x^2 + y^2\right) ds =$$

$$= \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 \left((2-t)^2 + (t-1)^2\right) \sqrt{2} dt + \int_2^3 (3-t)^2\, dt = \frac{2}{3}\left(1 + \sqrt{2}\right). \square$$

**Example 21** *Vypočítajte* $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$*, ak* $C$ *je kružnica* $x^2 + y^2 = a^2$*,* $a > 0$.

**Solution 22** *Parametrizujme* $C$ *nasledovne:*

$$C : \boldsymbol{c}(t) = (a \cos t, a \sin t),\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle, \quad \textit{potom} \quad \boldsymbol{c}\,'(t) = (-a \sin t, a \cos t),$$

$$\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} \left\|\boldsymbol{c}\,'(t)\right\| dt = \int_0^{2\pi} a^2 dt = 2\pi a^2. \square$$

**Example 23** *Vypočítajte* $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$*, ak* $C$ *je kružnica* $x^2 + y^2 = ax$*,* $a > 0$.

**Solution 24** *Parametrizovať* $C$ *môžme rôznymi spôsobmi. My použijeme nasledujúcu parametrizáciu:*

$$C : \boldsymbol{c}(t) = \left(a \cos^2 t, a \cos t \sin t\right),\ t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle, \boldsymbol{c}\,'(t) = \left(-2a \cos t \sin t, a\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)\right),$$

*a pretože*

$$\left\|\boldsymbol{c}\,'(t)\right\| = \sqrt{4a^2 \cos^2 t \sin^2 t + a^2\left(\cos^4 t - 2\cos^2 t \sin^2 t + \sin^4 t\right)} = a,$$

*potom*

$$\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^4 t + a^4 \cos^2 t \sin^2 t} \left\|\boldsymbol{c}\,'(t)\right\| dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos t dt = 2a^2. \square$$

Nech teraz $\boldsymbol{F} : D(\boldsymbol{F})\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ je spojitá vektorová funkcia. Budeme definovať integrál z vektorovej funkcie (orientovaný krivkový integrál) po krivke $C$.

**Definition 25** *Nech $C = [\boldsymbol{c}]$, $\boldsymbol{c} : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ je jednoduchá, hladká (JH) krivka a $\boldsymbol{F}$ je spojitá vektorová funkcia $\boldsymbol{F} : D(\boldsymbol{F})\,(\subset \boldsymbol{R}^n) \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$, ktorej definičný obor obsahuje $C$; $C \subset D(\boldsymbol{F})$. Potom krivkový integrál z vektorovej funkcie $\boldsymbol{F}$ po krivke $C$ je definovaný*

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_a^b \boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{c}\,(t)) \cdot \boldsymbol{c}\,'\,(t)\,dt.$$

*Ak $C = \bigcup_{i=1}^m C^{(i)}$ je jednoduchá po častiach hladká (JPČH) krivka, pričom čiastočné krivky $C^{(i)}$ sú jednoduché, hladké krivky, definíciu krivkového integrálu z vektorovej funkcie rozšírime takto: $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \sum_{i=1}^m \int_{C^{(i)}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$.*

Ak teda $\boldsymbol{c}\,'(t) \neq \boldsymbol{0}$ môžeme písať

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} &= \int_a^b \left(\boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{c}\,(t)) \cdot \frac{\boldsymbol{c}\,'(t)}{\|\boldsymbol{c}\,'(t)\|}\right) \|\boldsymbol{c}\,'(t)\|\,dt = \\ &= \int_a^b \boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{c}\,(t)) \cdot \boldsymbol{T}(t)\,\|\boldsymbol{c}\,'(t)\|\,dt = \int_C (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T})ds.\end{aligned}$$

Posledný výraz môžeme zapísať v tvare $\int_C (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T})ds$, čo sa dá chápať ako krivkový integrál zo skalárnej funkcie $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ po krivke $C$.Skalárny súčin $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ nazývame tangenciálna komponenta vektorového poľa $\boldsymbol{F}$. Funkcia $\boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{t})) \cdot \boldsymbol{T}(t)$ je dobre definovaná funkcia pre $t \in \langle a, b\rangle$ pre jednoduché hladké krivky. Ak má krivka $C$ samoprieniky, tak to nemusí platiť.

Orientovaný krivkový integrál nezávisí od parametrizácie, ale závisí od orientácie krivky.

**Theorem 26** *Nech $C = [\boldsymbol{c}]$, $\boldsymbol{c} : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ je jednoduchá hladká krivka a nech $\boldsymbol{p} : \langle \alpha, \beta\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ je reparametrizácia $C$. Potom pre spojité vektorové pole $\boldsymbol{F}$ platí*

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_C (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T})ds$$

*ak $\boldsymbol{p}$ zachováva orientáciu,*

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = -\int_C (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T})ds$$

*ak $\boldsymbol{p}$ mení orientáciu na opačnú.*

**Theorem 27** *Nech $\boldsymbol{F}$ je spojité vektorové pole, ktorého definičný obor obsahuje po častiach hladkú krivku $C$ s dĺžkou $L$. Nech $\boldsymbol{F}$ je ohraničená na $C$, $\|\boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{x})\| \leq M$, pre každé $\boldsymbol{x} \in C$. Potom*

$$\left|\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s}\right| \leq ML.$$

Bežné označenie, ktoré v $\boldsymbol{R}^2$ formálne píšeme $d\mathbf{s} = (dx, dy)$ nám umožňuje napísať $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s}$ pre spojité vektorové pole

$$\boldsymbol{F} : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}^2,\ \boldsymbol{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$$

v tvare

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_C F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy.$$

Ak máme parametrizáciu $\boldsymbol{c}(t) = (x(t), y(t))$, potom $\boldsymbol{c}'(t) = (x'(t), y'(t))$ a

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_C [F_1(x(t), y(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t))y'(t)]\, dt.$$

čo čiastočne vysvetľuje zámenu $x'(t)dt \longleftrightarrow dx$. Potom napríklad integrál

$$\int_C f dx \text{ je definovaný ako } \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad \text{kde } \boldsymbol{F} = (f, 0).$$

**Example 28** *Vypočítajte integrál* $\int_C (x - y, x + y) \cdot d\mathbf{s} = \int_C [(x - y)dx + (x + y)dy]$ *ak*

*a)* $C$ *je úsečka* $\overline{AB}, A = (2, 3), B = (3, 5),$ $A$ *je začiatočný bod,*

*b)* $C$ *je oblúk paraboly* $y = x^2$, *ktorého začiatočný bod je* $A = (0, 0)$ *a koncový bod* $B = (2, 4)$.

**Solution 29** *a) Budeme parametrizovať úsečku* $\overline{AB}$, *potom dostaneme*

$C : \boldsymbol{c}(t) = (2 + t, 3 + 2t), t \in \langle 0, 1\rangle$, *potom* $\boldsymbol{c}'(t) = (1, 2)$ *a my máme*

$\int_C (x-y, x+y) \cdot d\mathbf{s} = \int_C [(x - y)\, dx + (x + y)\, dy] = \int_0^1 (x(t) - y(t), x(t) + y(t)) \cdot \boldsymbol{c}'(t)\, dt =$

$= \int_0^1 (2 + t - 3 - 2t, 2 + t + 3 + 2t) \cdot (1, 2)\, dt = \int_0^1 (-1 - t, 5 + 3t) \cdot (1, 2)\, dt = \int_0^1 (5t + 9)\, dt = \frac{23}{2}$.

*b)* $C : y = x^2, \boldsymbol{c}(t) = (t, t^2), t \in \langle 0, 2\rangle, \boldsymbol{c}'(t) = (1, 2t)$ *potom* $\int_C (x - y, x + y) \cdot d\mathbf{s} = \int_C [(x - y)\, dx + (x + y)\, dy] = \int_0^2 (t - t^2, t + t^2) \cdot (1, 2t)\, dt =$

$= \int_0^2 [t - t^2 + 2t^2 + 2t^3]\, dt = \int_0^2 (t + t^2 + 2t^3)\, dt = \frac{38}{3}.\square$

Ak je $\boldsymbol{F}$ silové pole, potom $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s}$ je práca vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ pri pohybe častice s jednotkovou hmotnosťou po krivke $C$.

Vzťah medzi krivkovým a plošným integrálom.

Nech jednoduchá, po častiach hladká, uzavretá krivka $C$ je hranicou elementárnej oblasti $D$. Uvažujme jej orientáciu proti smeru pohybu hodinových ručičiek (kladná orientácia uzavretej krivky v $\boldsymbol{R}^2$). Pre elementárnu oblasť $D$ máme: $D = intC$.

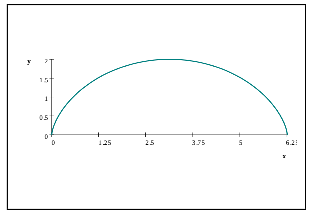
**Theorem 30** *(Greenova veta) Nech* $D$ *je oblasť ohraničená JPČHU kladne orientovanou krivkou* $C$ *a* $intC \subset D$ $\boldsymbol{F} : D \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ *je spojite diferencovateľná vektorová funkcia. Potom*

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_{intC} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

**Example 31** *Nájdite obsah plochy medzi osou $o_x$ a oblúkom cykloidy*

$$x = a\varphi - a\sin\varphi,\ y = a - a\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

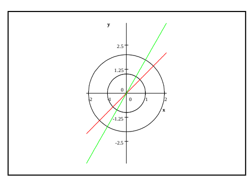
**Solution 32** *Obrázok .*



*Plocha*
$A = \iint_{intC} 1dxdy = \iint_{intC} \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) dxdy = \iint_{intC} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy =$
$= \frac{1}{2}\int_{C_1} -ydx + xdy + \frac{1}{2}\int_{C_2} -ydx + xdy,$
*na* $C_1$ *je* $y = 0,\ dy = 0,$ *teda aj* $\frac{1}{2}\int_{C_1} -ydx+xdy = 0,$ *na* $C_2$ *musíme orientáciu obrátiť.*
*Potom dostaneme:*
$A = \frac{1}{2}\int_{C_2} xdy{-}ydx = -\int_0^{2\pi} \left[(a\varphi - a\sin\varphi)\, a\sin\varphi - (a - a\cos\varphi)(a - a\cos\varphi)\right] d\varphi =$
$= -\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} [\varphi\sin\varphi + 2\cos\varphi - 2]\, d\varphi = 3\pi a^2.\square$

**Example 33** *Použitím Greenovej vety vypočítajte integrál* $\int_C \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}dx + \frac{2}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}dy,$ *kde* $C$ *je hranica oblasti* $1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \le y \le \sqrt{3}x,$ *ktorá je kladne orientovaná.*

**Solution 34** $1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \le y \le \sqrt{3}x 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \le y \le \sqrt{3}x$



$\int_C \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}dx + \frac{2}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}dy = \iint_{intC} \left(\frac{2}{y}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x}\right) dxdy =$
$= \iint_{intC} \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^2 \frac{1}{\varrho^2}\varrho d\varrho\right) d\varphi = \frac{1}{12}\pi \ln 2.\square$

## Cvičenia.

Vypočítajte krivkové integrály:

1. $\int_C \frac{1}{x-y} ds$, kde $C$ je úsečka od bodu $[0,-2]$ po bod $[4,0]$. $\left[\sqrt{5}\ln 2.\right]$

2. $\int_C x ds$, kde $C$ je časť paraboly $y = x^2$ medzi bodmi $[2,4]$ a $[1,1]$. $\left[\frac{17\sqrt{17}-5\sqrt{5}}{12}.\right]$

3. $\int_C x^2 ds$, kde $C$ je časť grafu $y = \ln x$, kde $1 \le x \le 2$. $\left[\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}.\right]$

4. $\int_C \sqrt{x^2+y^2} ds$, kde $C$ je kružnica $x^2+y^2 = x$. $[2.]$

5. $\int_C x^2 y ds$, kde $C$ je oblúk kružnice $x^2+y^2 = a^2$, s koncovými bodmi $[a,0]$ a $[0,a]$. $\left[\frac{a^4}{3}\right]$

6. $\int_C xy ds$, kde $C$ je obvod obdĺžnika ohraničený priamkami $x = 0, x = 4, y = 0, y = 2$. $[24]$

7. $\int_C \frac{x^2}{y} ds$, kde $C$ je časť paraboly $y^2 = 2x$, $y \in \left\langle \sqrt{2}, 2 \right\rangle$. $\left[\frac{5}{6}\sqrt{5} - \frac{1}{5}\sqrt{3}\right]$

8. $\int_C -dx + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dy$, kde $C$ sa skladá z oblúkov $\widehat{AB}$ a $\widehat{BA}$, pričom $\widehat{AB}$ je oblúk paraboly $y = x^2$, od bodu $A = (0,0)$, po bod $B = (1,1)$ a $\widehat{BA}$ je úsečka od bodu $B$ do bodu $A$. $\left[\frac{\pi}{4} - 1\right]$

9. $\int_C (x^2+y^2)\, dx + (x^2-y^2)\, dy$, kde $C$ je časť grafu funkcie $y = 1-|1-x|$, $0 \le x \le 2$, so začiatočným bodom $[0,0]$. $\left[\frac{4}{3}.\right]$

10. $\int_C (x^2-2xy)\, dx + (y^2-2xy)\, dy$, kde $C$ je krivka $y = x^2$, z bodu $[-1,1]$ po bod $[1,1]$. $\left[-\frac{14}{15}.\right]$

11. $\int_C y dx + x dy$, kde $C$ je časť kružnice $x = a\cos t, y = a\sin t$, $t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, kde $[a,0]$ je začiatočný bod. $[0.]$

12. $\int_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, kde $C$ je kružnica $x^2+y^2 = a^2$, kladne orientovaná. $[-2\pi]$

13. $\int_C \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, kde $C$ je úsečka z bodu $(1,-1)$ po bod $(4,0)$. $\left[4-\sqrt{2}\right]$

14. Vypočítajte integrál $\int_C \frac{x+y}{x^2+y^2} dx - \frac{x-y}{x^2+y^2} dy$, kde $C$ je oblúk $AB$ kružnice $x^2+y^2 = a^2$ od bodu $A = (a,0)$ cez bod $C = (0,a)$ po bod $B = (-a,0)$. $[-\pi]$

Použitím Greenovej vety vypočítajte integrály:

15. $\int_C y^2 dx + x dy$, ak $C$ je hranica štvorca ohraničená priamkami $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$, ktorá je kladne orientovaná. $[4.]$

16. $\int_C \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx + \frac{2}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dy$, kde $C$ je hranica oblasti $1 \le x^2+y^2 \le 4$, $x \le y \le \sqrt{3}x$, ktorá je kladne orientovaná. $\left[\frac{\pi}{12}\ln 2.\right]$

17. $\int_C (3x^2\cos y - y^3, x^3 - x^3\sin y)\, d\mathbf{s}$, kde $C$ je kladne orientovaná krivka daná vzťahom $x^2+y^2 = 1$. $\left[\frac{3}{2}\pi\right]$

18. $\int_C -dx + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dy$, kde $C$ je kladne orientovaná uzavretá krivka pozostávajúca z oblúka paraboly $y = x^2$, od bodu $A = (0,0)$, po bod $B = (1,1)$ a z úsečky z bodu $B = (1,1)$ po bod $A = (0,0)$. $\left[\frac{\pi}{4} - 1\right]$

19. $\int_C e^x (1 - \cos y)\, dx - e^x (1 - \sin y)\, dy$, kde $C$ je kladne orientovaná uzavretá krivka, ktorá je hranicou oblasti
$A = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\right\}$. $\left[\frac{e^\pi}{2} - \frac{1}{2}\right]$

20. $\int_C -e^x (1 - \cos y)\, dx + e^x (y - \sin y)\, dy$, kde $C$ je kladne orientovaná uzavretá krivka, ktorá je hranicou oblasti
$A = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\right\}$. $\left[\frac{1}{5} e^\pi - \frac{1}{5}\right]$

# Part I

# Funkcie komplexnej premennej.

Mnohé fyzikálne a elektrotechnické aplikácie si vyžadujú, aby študenti rozumeli základným pojmom z matematickej analýzy, integrálneho počtu, integračných metód, diferenciálneho aj integrálneho počtu funkcií viacerých premenných. Tieto poznatky nutne patria k "povinnej výbave" každého študenta FEI STU.

## Komplexné čísla a funkcie komplexnej premennej.

### Definícia komplexného čísla. Komplexné čísla a algebraické operácie s nimi.

.
V množine reálnych čísel $\boldsymbol{R}$ neexistuje číslo, ktoré by bolo riešením rovnice

$$x^2 + 1 = 0. \qquad ((1))$$

Aby sme odstránili tento defekt v systéme reálnych čísel zavedieme nový číselný systém.

**Definition 35** *Symbolom* $\boldsymbol{C}$ *označíme množinu* $\{z = x + iy : x,\, y \in \boldsymbol{R}\}$ *s nasledujúcimi operáciami:*

1. sčítanie: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$,
2. násobenie: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)\,,$ pre $z_1 = x_1 + iy_1,\, z_2 = x_2 + iy_2 \in \boldsymbol{C}$.

Čísla tvaru

$$z = x + iy,$$

kde $x,\, y \in \boldsymbol{R}$ sa nazývajú komplexné čísla. Takýto tvar komplexných čísel sa nazýva algebrický alebo kartézsky tvar komplexného čísla $z$. Symbol, ktorý označíme $i$ nazývame imaginárna jednotka. Toto komplexné číslo $i = 0 + 1i$ spĺňa základné zákony algebry: asociatívny, komutatívny a distributívny zákon a okrem toho rovnosť

$$i^2 = -1.$$

Potom rovnica (1) má v $\boldsymbol{C}$ dva korene $i$ a $-i$.

Násobenie komplexných čísel v algebrickom tvare je definované ako násobenie polynómov s použitím rovností $i^2 = -1$, $(i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ \ldots.)$

Terminológia: reálne číslo $x$ sa nazýva reálna časť komplexného čísla $z$, reálne číslo $y$ imaginárna časť komplexného čísla $z$, čo budeme označovať $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Ak $y = 0$ číslo $z$ nazývame rýdzo reálne číslo, ak $x = 0$ číslo $z$ nazývame rýdzo imaginárne číslo. Geometricky komplexné číslo $z = x + iy$ odpovedá bodu so súradnicami $(x,\, y)$ v rovine $Oxy$ alebo vektoru $\boldsymbol{r} = \overline{(x,\, y)}$, kde rýdzo reálne čísla ležia na osi $o_x$, ktorú nazývame reálna os a rýdzo imaginárne čísla ležia na osi $o_y$, ktorú nazývame imaginárna os.

Dve komplexné čísla $x + iy$ a $x - iy$ s rovnakými reálnymi časťami a opačnými imaginárnymi časťami sa nazývajú komplexne združené čísla. Komplexne združené číslo k číslu $z = x + iy$ budeme označovať $\overline{z} = x - iy$ a v rovine $Oxy$ sú to čísla symetrické podľa reálnej osi a platí $z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$. Pravidlá konjugovania:

$\overline{(\overline{z})} = z$,
$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,
$\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\overline{z}}{2}, \mathrm{Im}\, z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

Množinu všetkých komplexných čísel označíme $\boldsymbol{C}$ a množinu všetkých bodov $(x,\, y)$ v rovine $Oxy$, ktoré odpovedajú komplexným číslam $x+iy$ nazývame komplexná rovina. Existuje jednoznačné priradenie medzi $\boldsymbol{C}$ a množinou všetkých komplexných bodov v komplexnej rovine a odteraz nebudeme rozlišovať medzi týmito množinami.

Poloha komplexného čísla $z = x+iy$ sa dá určiť aj použitím polárnych súradníc $r,\, \varphi$. Kladné reálne číslo $r$ rovné vzdialenosti bodu $(x,\, y)$ odpovedajúceho bodu $z = x+iy$ od stredu súradnicového systému nazývame modul alebo absolútna hodnota komplexného čísla $z$ a definujeme:

$$\begin{aligned} || \quad &: \quad \boldsymbol{C} \longrightarrow \langle 0, \infty) \,,\; r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \text{tak máme } |z| \quad &= \quad |z \cdot \overline{z}|^{\frac{1}{2}} = |\overline{z}| = |z| \,,\; |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \,. \end{aligned}$$

Uhol medzi kladným smerom reálnej osi a vektorom $\overline{(x,\, y)}$ nazývame argument komplexného čísla $z = x+iy$. (Používa sa aj názov amplitúda).

$$\varphi = \mathrm{Arg}\ z.$$

Modul komplexného čísla $z$ je definovaný jednoznačne, ale pre argument máme

$$\mathrm{Arg}\ z = \{\arg z + 2k\pi,\ k = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \dots \} \,,$$

čo chápeme tak, že pre dané komplexné číslo $z \in \boldsymbol{C}$ vieme nájsť nekonečne mnoho hodnôt jeho argumentu, preto zavádzame funkciu

$$\arg : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow (-\pi,\, \pi\rangle \,, \tag{(2)}$$

ktorú nazývame hlavnou hodnotou (alebo hlavnou vetvou) argumentu $z$.

Pripomeňme si, že za predpokladu (2) má hlavná hodnota argumentu $\arg z$ nespojitosť na zápornej časti reálnej osi:

a) ak sa bod $z$ „blíži“ ku bodu na zápornej časti reálnej osi „zhora“ potom $\arg z$ sa „blíži“ k hodnote $\pi$,

b) ak sa bod $z$ „blíži“ ku bodu na zápornej časti reálnej osi „zdola“ potom $\arg z$ sa „blíži“ k hodnote $-\pi$.

Pre komplexné čísla $z = 0$ a $z = \infty$ (ktoré zavedieme neskôr) Arg $z$ nie je definovaná.

**Remark 36** *Niektorí autori zavádzajú funkciu hlavná hodnota argumentu $z$ takto:* $\arg : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \langle 0, 2\pi)$.

Ak $z$ je rýdzo reálne kladné číslo, potom arg $z = 0$. Ak $z$ je rýdzo reálne záporné číslo, potom $\arg z = \pi$. Ak $z$ je rýdzo imaginárne číslo s kladnou imaginárnou časťou, potom $\arg z = \frac{\pi}{2}$.Ak $z$ je rýdzo imaginárne číslo so zápornou imaginárnou časťou, potom $\arg z = -\frac{\pi}{2}$. Ľahko nahliadneme, že

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x} \text{ ak } x \neq 0,\ \mathrm{cotg}\,\varphi = \frac{x}{y} \text{ ak } y \neq 0. \tag{(3)}$$

**Example 37** *Nájdime vzťahy pre výpočet hlavnej hodnoty argumentu* $\arg z$.

**Solution 38** *Dostávame*

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{pre} \quad x > 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{pre} \quad x < 0,\ y \geq 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{pre} \quad x < 0,\ y < 0 \end{cases}.$$

*ak predpokladáme, že* $-\pi < \arg z \leq \pi$ *a* $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \leq \frac{\pi}{2}$.

Ľahko vidieť, že

$$|z| = |\overline{z}| \quad \text{a} \quad \arg \overline{z} = -\arg z.$$

Ak predpokladáme, že $\varphi = \arg z$, môžme definovať trigonometrický (goniometrický) tvar komplexného čísla $z$

$$z = x + iy = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

**Example 39** *Nájdime trigonometrický tvar komplexného čísla* $z = 1 - i$.

**Solution 40** *Použitím vzťahov (2) a (3) máme*

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad a \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{1} = -1,$$

*t.j.*

$$\arg z = -\frac{\pi}{4} \quad a \quad z = 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].\square$$

**Example 41** *Nájdime trigonometrický tvar nasledujúcich komplexných čísel:* $z_1 = 2$, $z_2 = -3$, $z_3 = 3i$, $z_4 = -2i$.

**Solution 42** *Priamo môžeme písať:*

$$|z_1| = 2,\ \arg z_1 = 0, \quad tak \ \ z_1 = 2 = 2(\cos 0 + i\sin 0),$$

$$|z_2| = 3,\ \arg z_2 = \pi, \quad tak \ \ z_2 = -3 = 3\left(\cos\pi + i\sin\pi\right),$$

$$|z_3| = 3,\ \arg z_3 = \frac{\pi}{2}, \quad tak \ \ z_3 = 3i = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

$$|z_4| = 2,\ \arg z_4 = -\frac{\pi}{2}, \quad tak \ \ z_4 = -2i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).\square$$

Použitím Eulerovej formuly (ktorú dokážeme neskôr)

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

môžeme definovať exponenciálny tvar komplexného čísla $z$

$$z = |z|\, e^{i\varphi}.$$

**Example 43** *Nájdime exponenciálny tvar komplexných čísel z predchádzajúcich príkladov.*

**Solution 44** *Máme*

$$z = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}},\ z_1 = 2e^{i0},\ z_2 = -3 = 3e^{i\pi},$$
$$z_3 = 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}},\ z_4 = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}.\square$$

Je jasné, že v množine komplexných čísel nemožno zaviesť usporiadanie ale je možné porovnávať moduly komplexných čísel. Napríklad $|10i| > |i|$ alebo $|2+3i| < |6+5i|$.

Ak $z_1$ a $z_2$ sú dané v trigonometrickom a v exponenciálnom tvare

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1e^{i\varphi_1} \text{ a } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2e^{i\varphi_2},$$

potom máme

$$z = z_1z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$
$$z = z_1z_2 = r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

čo implikuje

$$|z| = |z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|,$$
$$\text{Arg } z = \text{Arg}(z_1z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2.$$

Pretože $-\pi < \arg z \le \pi$ pre hlavné hodnoty dostaneme

$$\arg(z_1z_2) = \begin{cases} \arg z_1 + \arg z_2 & \text{pre} \quad \arg z_1 + \arg z_2 \in (-\pi,\, \pi\rangle \\ \arg z_1 + \arg z_2 - 2\pi & \text{pre} \quad \arg z_1 + \arg z_2 > \pi \\ \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi & \text{pre} \quad \arg z_1 + \arg z_2 < -\pi \end{cases}.$$

Delenie dvoch komplexných čísel $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ definujeme

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}.$$

Použitím

$$\frac{z_1}{z_2}z_2 = z_1$$

dostaneme

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

a pre trigonometrický a exponenciálny tvar:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$
$$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg } z_1 \setminus \text{Arg } z_2.$$

Pre hlavné hodnoty argumentu platia podobné pravidlá ako pre násobenie a čitateľ si ich iste odvodí aj sám.

Geometrický význam

**1.** sčítanie: $z, a \in \boldsymbol{C}$, potom $z + a$ reprezentuje posun bodu $z$ o vektor $a$,

**2.** násobenia: $za = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,|a|\,(\cos\psi + i\sin\psi) = |z|\,|a|\,(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$ znamená pootočenie o uhol $\psi$ a rovnoľahlosť so stredom v začiatku s koeficientom $|a|$,

**3.** delenia: odporúčame odvodiť čitateľovi.

**Example 45** *Daný je trojúholník s vrcholmi $1+i,\ i,\ -1+2i$. Otočte tento trojúholník o pravý uhol vzhľadom k počiatku.*

**Solution 46** *Pootočené vrcholy: $i(1+i) = -1+i,\ i^2 = -1,\ i(-1+2i) = -2-i$, alebo ďalšia možnosť: $(-i)\,(1+i) = 1-i,\ (-i)\,i = 1,\ (-i)\,(-1+2i) = 2+i$*

Modul rozdielu dvoch komplexných čísel $z_1,\ z_2$ je rovný vzdialenosti bodov $(x_1,\ y_1)$ a $(x_2,\ y_2)$ t.j.

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}.$$

Overte platnosť nasledujúcich nerovností:

**1.** $|\mathrm{Re}\,z|\,, |\mathrm{Im}\,z| \le |z|\,,$

**2.** $|z+w| \le |z| + |w|$ (trojuholníková nerovnosť)

**3.** $|z+w| \ge ||z| - |w||\,,$

**4.** $|z| \le |\mathrm{Re}\,z| + |\mathrm{Im}\,z|\,.$

**Example 47** *Aké geometrické útvary v rovine reprezentujú nasledujúce popisy:*
$\{z \in \boldsymbol{C} : |z-a| = r\} = S(a, r),\ r > 0, a \in \boldsymbol{C}$ *je kružnica v komplexnej rovine* $\boldsymbol{C}$ *so stredom v bode* $z = a$ *a s polomerom* $r$,
$\{z \in \boldsymbol{C} : |z-a| < r\} = K(a, r)\,,\ r > 0, a \in \boldsymbol{C}$ *je vnútro kruhu so stredom v bode* $z = a$ *s polomerom* $r$,
$\{z \in \boldsymbol{C} : |z-a| > r\} = \boldsymbol{C} \setminus \overline{K(a, \rho)},\ r > 0, a \in \boldsymbol{C}$ *je množina všetkých vonkajších bodov kruhu so stredom v bode* $z = a$ *a s polomerom* $r$,
$[z_1, z_2] = \{z_1 + t(z_2 - z_1) : t \in \langle 0, 1\rangle\}$ *je úsečka,*
$\{z \in \boldsymbol{C} : \mathrm{Re}\,z \ge 5\}$ *je polrovina,*
$\left\{z \in \boldsymbol{C} : \frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{3\pi}{4}\right\}$ *je uhol s vrcholom v bode* $0$ *a s ramenami* $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$,
$\{z \in \boldsymbol{C} : |z-a| = |z-b|\}\,, a \ne b$, *je os úsečky* $[a, b]\,.$

Mocnina komplexného čísla.
Ak $n$ je prirodzené číslo, potom aplikáciou pravidla pre násobenie komplexných čísel ľahko odvodíme, že ak $z = re^{i\varphi}$, potom

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi},$$

čo pre trigonometrický tvar dáva

$$z^n = r^n \left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right).$$

Posledná rovnosť implikuje tzv. Moivreovu formulu:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi),$$

odkiaľ napríklad pre $n = 2$ máme

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,\ \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

a pre $n = 3$ dostaneme

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi,\ \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$$

Odmocnina komplexného čísla.
Nech $z(\neq 0, \infty)$ je komplexné číslo a $n$ je prirodzené číslo. Hľadáme všetky riešenia binomickej rovnice

$$w^n = z \tag{(4)}$$

Nech $z = re^{i\varphi}$ a $w = \rho e^{i\Theta}$. Potom máme

$$\rho^n e^{in\Theta} = re^{i\varphi},$$

čo implikuje

$$\rho^n = r \ \text{ a } \ n\Theta = \varphi + 2k\pi,\ \text{ pre } \ k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots \tag{(5)}$$

a (5) definuje jediné kladné riešenie $\rho$ a množinu hodnôt $\Theta$:

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \Theta = \Theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}. \tag{(6)}$$

Ak položíme $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ v druhej rovnici (6) dostaneme $n$ rôznych hodnôt $\Theta_k$ :

$$\Theta_0 = \frac{\varphi}{n},\ \Theta_1 = \frac{\varphi + 2\pi}{n},\ \Theta_2 = \frac{\varphi + 4\pi}{n},\ \ldots,\ \Theta_{n-1} = \frac{\varphi + 2\,(n-1)\,\pi}{n},$$

takých že ďalšie hodnoty $\Theta_k$ pre $k = \ldots,\ -n,\ -(n-1),\ \ldots,\ -2,\ -1,\ n,\ n+1,\ \ldots$ sa líšia od týchto hodnôt iba o násobok čísla $2\pi$. Tak rovnice (5) definujú iba $n$ rôznych hodnôt

$$w_k = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}},\quad \text{pre } \ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1, \tag{(7)}$$

ktoré sú riešeniami rovnice (4). Ak komplexné číslo $z$ zapíšeme v trigonometrickom tvare $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$, a korene rovnice (4) napíšeme tiež v trigonometrickom tvare:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad \text{pre} \;\; k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1. \qquad ((8))$$

Formula (6) implikuje, že každá z rôznych hodnôt $w_k$ má ten istý modul $\sqrt[n]{|z|}$ a ich argumenty sa líšia iba o hodnotu $\frac{2\pi}{n}$, čo znamená, že každé riešenie $w_k$ rovnice (4) leží na kružnici $S\left(0,\; \sqrt[n]{|z|}\right)$. a argument prvej hodnoty ($k = 0$) sa rovná $\frac{\varphi}{n}$. Túto hodnotu

$$w_0 = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

nazývame hlavnou vetvou n-tej odmocniny z komplexného čísla $z$.

Pre hodnoty $z = 0$ a $z = \infty$ definujeme jediné hodnoty odmocnín $w = 0$ a $w = \infty$.

**Example 48** *Nájdime všetky riešenia rovnice* $z^3 = 1 + i$.

Pretože

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

dostaneme

$$z_k = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right), \; k = 0,\, 1,\, 2$$

Teda máme

$$k = 0,\; z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$k = 1,\; z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}\right),$$

$$k = 2,\; z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right).\square$$

## Cvičenia.

1. Nájdite modul, hlavnú hodnotu argumentu a zobrazte v komplexnej rovine nasledujúce komplexne čísla:

   (a) $1-\sqrt{3}i$, $\left[2,\ -\frac{\pi}{3}.\right]$

   (b) $-2+2i$, $\left[2\sqrt{2},\ \frac{3\pi}{4}.\right]$

   (c) $-4$, $[4,\ \pi.]$

   (d) $i^5$. $\left[1, \frac{\pi}{2}.\right]$

2. Zapíšte nasledujúce čísla v trigonometrickom a exponenciálnom tvare:

   (a) $1+\sqrt{3}i$, $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right), 2e^{i\frac{\pi}{3}}.\right]$

   (b) $2+2i$, $\left[2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right), 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.\right]$

   (c) $-2$, $[2\left(\cos\pi+i\sin\pi\right), 2e^{i\pi}.]$

   (d) $-i^3$. $\left[\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right), e^{i\frac{\pi}{2}}.\right]$

3. Vypočítajte a napíšte v algebrickom tvare:

   (a) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^3$, $[-8.]$

   (b) $\frac{(1-i)^2}{1+i}$. $[-1-i.]$

4. Nájdite všetky korene rovníc a zobrazte ich v komplexnej rovine

   (a) $z^3=i$, $\left[w_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, w_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, w_3=-i.\right]$

   (b) $z^4=-1$, $\left[w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, w_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, w_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i, w_4=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i.\right]$

   (c) $z^4=1-\sqrt{3}i$,
   $$\left[\begin{array}{c} w_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right), w_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right), \\ w_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right), w_4=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right) \\ \text{alebo}\ \ w_4=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right). \end{array}\right]$$

   (d) $z^4=1$, $[w_1=1, w_2=i, w_3=-1, w_4=-i.]$

   (e) $z^3=-1$. $\left[w_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, w_2=-1, w_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.\right]$

## Základné pojmy analýzy v $\boldsymbol{C}$.

### Okolia, oblasti.

Základom analýzy je pojem limity, preto zopakujeme pojem okolia bodu, ktoré sme zaviedli už pre reálne funkcie viacerých premenných. Nech $a \in \boldsymbol{C}$, $a \neq \infty$. Množina

$$O_\varepsilon(a) = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-a| < \varepsilon\}$$

sa nazýva $\varepsilon$-okolie bodu $a$. Množinu

$$O_\varepsilon^\circ(a) = O_\varepsilon(a) \setminus \{a\} = \{z \in \boldsymbol{C} : 0 < |z-a| < \varepsilon\}$$

nazývame $\varepsilon$-prstencovým okolím bodu $a$.

### Nekonečno.

Ku množine všetkých konečných komplexných čísel pridáme jedno nekonečné komplexné číslo, ktoré označíme $\infty$ a nazývame nekonečno. Pre $\infty$ nemá zmysel definovať argument a modul definujeme takto: $|\infty| = +\infty$. Označíme $\overline{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$.

Rozšírená aritmetika: $\forall a \in \boldsymbol{C} : -\infty = \infty,\ a \pm \infty = \infty,\ a.\infty = \infty,\ \frac{a}{\infty} = 0,\ \frac{a}{0} = \infty$ pre $\quad a \neq 0$.

Množinu $O_\varepsilon(\infty) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| > \frac{1}{\varepsilon}\}$ nazývame $\varepsilon$-okolím bodu $\infty$, definujeme $O_\varepsilon(\infty) = O_\varepsilon^\circ(\infty)$.

**Rozšírená rovina komplexných čísel a Riemannova sféra.**

Riemannova sféra $S : x^2 + y^2 + \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, alebo $x^2 + y^2 + u^2 = u$. Nech $\Phi : \boldsymbol{C} \longrightarrow S \setminus N$, kde $N = [0,0,1]$. Pre $z = x + iy$ je $\Phi(z)$ priesečník priamky spájajúci $z$ a $N$ so sférou $S$. $\Phi$ je vzájomne jednoznačné zobrazenie $\boldsymbol{C}$ na $S \setminus N$

Analytické vyjadrenie stereografickej projekcie: priamka $[0,0,1] + t\,[(x,y,0) - (0,0,1)] = [tx, ty, 1-t]$. Po dosadení do rovnice sféry:

$$\begin{aligned} t^2x^2 + t^2y^2 + (1-t)^2 &= 1 - t \Longrightarrow t^2\left(1 + x^2 + y^2\right) - t = 0 \Longrightarrow t = \frac{1}{1+x^2+y^2} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad \Phi(x+iy) = \left[\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right]. \end{aligned}$$

Na čo sa zobrazia rovnobežky v $\boldsymbol{C}$? Sú to kružnice so stredom v začiatku

Na čo sa zobrazí guľový vrchlík z $S$? Je to vonkajšok kruhu so stredom v začiatku.

Aké útvary v $\boldsymbol{C}$ sa zobrazia na kružnice na $S$ ? Každá kružnica je prienik $S$ s rovinou $ax + by + cu = d$. Tak pre zložky $\Phi$ musí platiť:

$a\frac{x}{1+x^2+y^2} + b\frac{y}{1+x^2+y^2} + c\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} = d \Longrightarrow (c-d)\left(x^2+y^2\right) + ax + by = d \Longrightarrow$ ak $c \neq d$ je to rovnica kružnice, ak $c = d$, potom je to rovnica priamky (práve ak prechádzame cez severný pól). Teda kružnica na $S \longleftrightarrow$ zovšeobecnenej kružnici v $\boldsymbol{C}$.

Klaudios Ptolemaios (100-160 n.l.)

Ptolemaiova veta: Každá kružnica na guľovej ploche, ktorá neprechádza jej severným pólom, sa pri stereografickej projekcii zobrazí na kružnicu.

**Definition 49** *Nech $E \subset \boldsymbol{C}$. Bod $a \in E$ sa nazýva vnútorný bod množiny $E$, ak $\exists\ \varepsilon > 0$ tak, že $O_\varepsilon(a) \subset E$.*

*Bod $a \in \boldsymbol{C}$ sa nazýva hraničným bodom množiny $E$ ak pre každé $\varepsilon > 0$ $O_\varepsilon(a)$ obsahuje ako body z množiny $E$, tak aj body, ktoré neležia v množine $E$, teda $\forall O_\varepsilon(a)$ platí $O_\varepsilon(a) \cap E \neq \emptyset \wedge O_\varepsilon(a) \cap (\boldsymbol{C} \setminus E) \neq \emptyset$,*

*Bod $a \in \boldsymbol{C}$ sa nazýva vonkajším bodom množiny $E$ ak $\exists\ \varepsilon > 0$ tak, že $O_\varepsilon(a) \cap E = \emptyset$.*

*Množinu všetkých vnútorných (hraničných, vonkajších) bodov množiny $E$ nazývame vnútrom (hranicou, vonkajškom) množiny $E$ a označujeme $intE$ $(\partial E, extE)$.*

*Bod $a \in \boldsymbol{C}$ sa nazýva hromadný bod množiny $E$ ak $\forall \varepsilon > 0$ je $O_\varepsilon^\circ(a) \cap E \neq \emptyset$.*

*Množina $E$ sa nazýva otvorená, ak $E = intE$, uzáverom $\overline{E}$ množiny $E$ nazývame $\overline{E} = E \cup \partial E$. Množinu nazývame uzavretá, ak platí $\overline{E} = E$ ($E$ je uzavretá $\Longleftrightarrow \boldsymbol{C} \setminus E$ je otvorená $\Longleftrightarrow \partial E \subset E$), $\emptyset$ je otvorená množina.*

**Definition 50** *Množina $D \subset \boldsymbol{C}$ taká, že*

*1. $D$ obsahuje len vnútorné body (je otvorená),*

*2. ľubovoľné dva body z $D$ možno spojiť spojitou čiarou, ktorá celá leží v $D$,*

*sa nazýva oblasť. Množinu bodov pozostávajúcu z oblasti $D$ a jej hranice $\partial D$ nazveme uzavretou oblasťou a značíme $\overline{D} = D \cup \partial D$.*

**Example 51** *Množiny bodov Nech $\{z \in \boldsymbol{C} : |z-a| < \varepsilon\}$ a $\{z \in \boldsymbol{C} : |z-a| > \varepsilon\}$. sú oblasti, ale $\{z \in \boldsymbol{C} : |z-a| = \varepsilon\}$ oblasťou nie je, pretože nie je otvorená.*

**Example 52** *Nech $H = \{z \in \boldsymbol{C} : (\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z) > 0 \wedge |z| < R\}$. Zistite, či je množina $H$ oblasť?*

**Solution 53** *$H$ nie je oblasť, pretože $0 \notin H$, t.j. $H$ nesplňa podmienku 2.* □

Ďalším dôležitým pojmom je rád súvislosti.

**Definition 54** *Počet navzájom nespojených (neprepojených) častí, z ktorých pozostáva hranica oblasti sa nazýva rád súvislosti oblasti. Oblasť ohraničená jednou spojitou uzavretou čiarou sa nazýva jednoducho súvislá oblasť, oblasť ohraničená dvomi nepretínajúcimi sa uzavretými čiarami sa nazýva dvojnásobne súvislá oblasť, ...*

**Definition 55** *Za kladný smer obchádzania oblasti budeme považovať taký smer, pri ktorom oblasť zostáva vždy po ľavej strane.*

Postupnosti komplexných čísel.

**Definition 56** *Zobrazenie $f : \boldsymbol{N} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ nazývame postupnosťou komplexných čísel a označujeme symbolom $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pre každé $n \in \boldsymbol{N}$ máme*

$$z_n = x_n + iy_n,$$

*t.j. definícia postupnosti komplexných čísel je ekvivalentná s definíciou dojice postupností reálnych čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Dôležíté nerovnice: pre $z_n = x_n + iy_n$ máme: $|z_n| = |x_n + iy_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leq |x_n| + |y_n|$ , $|x_n| \leq |z_n|$ , $|y_n| \leq |z_n|$ .

**Definition 57** *Postupnosť* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{C}$ *je ohraničená, ak pre každé* $n \in \boldsymbol{N}$ *platí* $|z_n| < M$, *kde* $M > 0$.

**Theorem 58** *Postupnosť* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{C}$ *je ohraničená* $\Longleftrightarrow$ *ak* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{R}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{R}$ *sú ohraničené.*

**Definition 59** *Postupnosť* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{C}$ *má limitu* $z \in \overline{\boldsymbol{C}}$, *ak pre každé okolie* $O_\varepsilon(z)$ *platí, že iba konečne mnoho členov postupnosti* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *neleží v* $O_\varepsilon(z)$ .

**Theorem 60** *1.* $\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = z \in \boldsymbol{C} \Longleftrightarrow$ *ak* $\lim_{n\longrightarrow\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z \wedge \lim_{n\longrightarrow\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$.

*2.* $\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = \infty \Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} |z_n| = \infty$.

Tvrdenie platí:

$\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = z \in \boldsymbol{C} \Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} |z_n - z| = 0 \wedge |\operatorname{Re}(z_n - z)|, |\operatorname{Im}(z_n - z)| \leq$
$\leq |z_n - z| \leq |\operatorname{Re}(z_n - z)| + |\operatorname{Im}(z_n - z)|$

**Example 61** *Nech* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{2n-1}{n} + i\left(1 - \frac{3}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ *.Nájdime* $\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n$.

**Solution 62** *Riešenie*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left[\frac{2n-1}{n} + i\left(1 - \frac{3}{n}\right)\right] = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{2n-1}{n} + i \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right) = 2 + i. \square$$

**Example 63** *Nech* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + i\cos\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *.Nájdime* $\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n$.

**Solution 64**

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + i\cos\frac{1}{n}\right] = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + i \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right) = e + i. \square$$

**Remark 65** $lim_{n\to\infty}(-1)^n n = \infty$. *Pozor! Táto limita v* $\boldsymbol{R}$ *neexistuje.*

Rady komplexných čísel.

**Definition 66** *Nech* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť komplexných čísel. Definujeme postupnosť* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *čiastočných súčtov takto:*

$s_1 = z_1,$
$s_2 = z_1 + z_2,$
$s_3 = z_1 + z_2 + z_3,$
$\ldots$
$s_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k.$

***Definition 67*** *Výraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + \dots$$

*používame na označenie toho, že členy postupnosti* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sčítavame. Každý takýto výraz nazývame radom komplexných čísel. Ak postupnosť čiastočných súčtov* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má konečnú limitu*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} s_n = s$$

*potom s nazývame súčtom radu a označujeme* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$, *hovoríme, že rad* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *konverguje. Ak postupnosť čiastočných súčtov nemá limitu, alebo konverguje k nekonečnu hovoríme, že rad* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *diverguje.*

**Theorem 68** *Rad* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $z_n = x_n + iy_n$ *konverguje vtedy a len vtedy ak konvergujú oba rady* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

**Lemma 69** *Ak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *konverguje, potom* $\lim_{n \longrightarrow \infty} z_n = 0$.

**Definition 70** *Hovoríme, že rad* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *je absolútne konvergentný ak rad*

$$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|,$$

*konverguje.*

Pretože absolútna konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ znamená konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ s reálnymi nezápornými členmi, môžme použiť všetky známe kritériá konvergencie.

**Example 71** *Zistite, či rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-in}{(2n+1)!}$ *konverguje alebo diverguje.*

**Solution 72** *Platí*

$$\left| \frac{3 - in}{(2n+1)!} \right| = \frac{\sqrt{9 + n^2}}{(2n+1)!}$$

*potom použitím d' Alembertovho kritéria máme:*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 + (n+1)^2}\,(2n+1)!}{\sqrt{9 + n^2}(2n+3)!} = 0 < 1$$

*teda rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-in}{(2n+1)!}$ *je absolútne konvergentný.* $\square$

**Theorem 73** *Rad* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, *absolútne konverguje vtedy a len vtedy ak absolútne konvergujú oba rady* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

## Cvičenia.

1. V úlohách 1 - 5 zistite, aká množina je určená daným vzťahom. Jej obraz načrtnite v komplexnej rovine.
2. $|z - z_0| = r,\ r > 0,\ z_0$ je pevný bod. [Kružnica so stredom $z_0$ a polomerom $r$]
3. $|z + i| + |z - i| < 4.$ $\left[\text{Vnútro elipsy } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1\right]$
4. $|z + 2| > 1.$ [Vonkajšok kružnice so stredom $S = (-2; 0)$ a polomerom $r = 1$]
5. $|z - 2| < |z|$. [Polrovina $\operatorname{Re} z > 1$.]
6. $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = 2.$ $\left[z \neq 0,\text{ kružnica so stredom } S = \left(0, -\frac{1}{4}\right) \text{ a polomerom } r = \frac{1}{4}\right]$
7. Zistite, či sú nasledujúce množiny oblasti. (Načrtnite ich v komplexnej rovine):
   (a) $|z| < 4$, [áno]
   (b) $1 \leq |z - 1| \leq 3$, [nie]
   (c) $\frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$, [nie]
   (d) $0 < |z - 2| < 3$, [áno]
   (e) $\operatorname{Re} z < 2$. [áno]
8. Nájdite limity postupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak
   (a) $z_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n + \frac{n+1}{3n-1} i$, $\left[\sqrt[3]{e} + \frac{1}{3} i\right]$
   (b) $z_n = 2n \sin \frac{1}{n} + \frac{4n+1}{5n-1} i$, $\left[2 + \frac{4}{5} i\right]$
   (c) $z_n = n \operatorname{tg} \frac{1}{2n} + \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n i$, $\left[\frac{1}{2} + i e^4\right]$
9. Zistite, či rady $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergujú, alebo divergujú
   (a) $z_n = \frac{\sin n + i \cos n}{n^3}$, [absolútne konverguje]
   (b) $z_n = \frac{1}{n(n+1)} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}} i$, [absolútne konverguje]
   (c) $z_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \frac{n}{3^n} i$,
   $\left[\text{diverguje, návod rad } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \text{ nespĺňa nutnú podmienku konvergencie}\right]$

## Funkcie komplexnej premennej.

**Definition 74** *Funkciou komplexnej premennej* $f : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $w = f\,(z)$ *rozumieme pravidlo, ktoré každému prvku* $z \in A$ *priradí jednu (jednoznačná funkcia) alebo viac hodnôt* $w \in \boldsymbol{C}$ *(môže byť aj* $\infty$*) (mnohoznačná funkcia) . Množinu* $A \subset \boldsymbol{C}$ *nazývame definičný obor funkcie* $f$.

**Example 75** *Funkcia* $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $w = z^2$ *je jednoznačná funkcia,* $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $w = \sqrt{z}$, *ktorá každému* $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *priradí dve hodnoty*
$\left\{w_1 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right), w_2 = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right)\right\}$

Možné interpretácie sú: ak napíšeme komplexné čísla $z$, $w \in \boldsymbol{C}$ v algebrickom tvare $z = x + iy$ a $w = u + iv$, potom môzeme písať:

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

kde

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), v(x, y) = \operatorname{Im} f(z),\ u, v : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}.$$

Ak $z = re^{i\varphi}$ a $w = u + iv$ dostaneme

$$w = f(z) = f\,(r, \varphi) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi).$$

$f(x + iy)$, $f\,(r, \varphi)$ je dvojica reálných funkcií teda vektorové pole. Funkciu $z \mapsto f(z)$ možno tiež chápať ako nejakú transformáciu roviny.

**Example 76** *Nájdite reálnu a imaginárnu časť funkcie* $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $w = z^2$.

**Solution 77** *Ak* $z = x + iy$ *a* $w = f(z) = f\,(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, *potom*

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy,$$

*odkiaľ*

$$u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy.\square$$

### Limita funkcie komplexnej premennej.

**Definition 78** *Nech* $f : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $w = f\,(z)$ *je funkcia komplexnej premennej. Nech* $z_0 \in \boldsymbol{C}$ *je hromadný bod množiny* $A$. *Ak pre každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *také, že pre každé* $z \in A$, $0 < |z - z_0| < \delta$ *máme* $|f(z) - a| < \varepsilon$ *hovoríme, že funkcia* $f(z)$ *má limitu* $a$ *ak sa* $z$ *blíži ku* $z_0$ *čo zapisujeme*

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = a.$$

Ak $a = b + ic$, $f(z) = f\,(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ a $z_0 = x_0 + iy_0$ potom platí nasledujúca veta:

**Theorem 79** *Limita funkcie*

$$\lim_{z\longrightarrow z_0} f(z) = a = b + ic$$

*vtedy a len vtedy ak*

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} u(x,y) = b \quad a \quad \lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} v(x,y) = c.$$

Predchádzajúca veta implikuje nasledujúci dôsledok:

**Lemma 80** *Ak* $\lim_{z\longrightarrow z_0} f(z) = a$, *potom* $\lim_{z\longrightarrow z_0} |f(z)| = |a|$ *a ak* $a \neq 0, \infty$, *potom aj* $\lim_{z\longrightarrow z_0} \arg f(z) = \arg a$.

Vety o limitách rozšíme prirodzeným spôsobom na nasledujúce limity:

**Theorem 81** *Nech pre* $f, g : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *platí*

$$\lim_{z\longrightarrow z_0} f(z) = a_1,\ \lim_{z\longrightarrow z_0} g(z) = a_2.$$

*Potom*

$$\lim_{z\longrightarrow z_0} (f \pm g)(z) = a_1 \pm a_2,$$

$$\lim_{z\longrightarrow z_0} (fg)(z) = a_1 a_2,$$

$$ak\ g(z) \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ \lim_{z\longrightarrow z_0} \left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{a_1}{a_2}.$$

**Definition 82** *Hovoríme, že*

$$\lim_{z\longrightarrow\infty} f(z) = a,\ a \neq \infty,$$

*ak pre každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $N(\varepsilon) > 0$, *také že* $|z| > N(\varepsilon) \Longrightarrow |f(z) - a| < \varepsilon$.

**Definition 83** *Hovoríme, že*

$$\lim_{z\longrightarrow z_0} f(z) = \infty,$$

*ak pre každé* $N > 0$ *existuje* $\delta > 0$, *také že* $0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z)| > N$.

**Example 84** *Vypočítajme:* $\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}$, $\lim_{z\to\infty} z^2$, $\lim_{z\to 0} \frac{1}{z}$ .

***Solution 85*** $\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}$ *neexistuje,* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \nexists \wedge \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-2xy}{x^2+y^2} \nexists$
$\lim_{z\to\infty} z^2 = \infty$,
$\lim_{z\to 0} \frac{1}{z} = \infty$, *na rozdiel od limity v reálnom obore !!!*

**Spojitosť funkcie komplexnej premennej.**

Nech funkcia $w = f(z)$ je definovaná na nejakom okolí $O(z_0)$ bodu $z_0$.

**Definition 86** *Hovoríme, že funkcia $f : O(z_0) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je spojitá v bode $z_0$ ak*

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0), \ \textit{pričom}\ f(z_0) \neq \infty.$$

**Theorem 87** *Funkcia komplexnej premennej $f : O(z_0) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ je spojitá v bode $z_0 = x_0 + iy_0$ vtedy a len vtedy ak sú obe funkcie $u : O(x_0, y_0) \left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $v : O(x_0, y_0) \left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ spojité v bode $(x_0, y_0)$.*

**Example 88** *Funkcia $f(z) = \arg z$ je spojitá v $\{\boldsymbol{C} \setminus \{0\}\} \setminus \boldsymbol{R}^-$. Prechodom cez zápornú časť reálnej osi dostávame skok $2\pi$.*

## Cvičenia.

1. V úlohách 1 a 2 nájdite definičný obor funkcie $f$ :
2. $f(z) = \frac{3iz-12z+i}{iz^2+1-i}$. $\left[D(f) = \boldsymbol{C} \setminus \left\{\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}},\ \sqrt[4]{2}e^{i\frac{9\pi}{8}}\right\}\right]$
3. $f(z) = \frac{\overline{z}}{(z^3-2i)(|z|-3)}$.
   $\left[D(f) = \boldsymbol{C} \setminus \left(\{z \in \boldsymbol{C};\ |z| = 3\} \cup \left\{\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{2}}{2},\ -\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{2}}{2},\ -i\sqrt[3]{2}\right\}\right)\right]$
   V úlohách 3 - 5 vypočítajte funkčnú hodnotu funkcie $f$ v čísle $z_0$ :
4. $f(z) = \frac{\overline{z}}{(z^3-2i)(|z|-3)}$, $z_0 = i$. $\left[-\frac{1}{6}\right]$
5. $f(z) = z + \overline{z}^2 - \operatorname{Re}(z\overline{z}) - \operatorname{Im}(z\overline{z})$, $z_0 = 8 - 6i$. $[-64 + 90i]$
6. $f(z) = \arg z$
   (a) $z_0 = 8 - 6i$. $\left[-\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)\right]$
   (b) $z_0 = -1 + 2i$. $[\pi - \operatorname{arctg} 2]$
   (c) $z_0 = -1 - i$. $\left[-\frac{3\pi}{4}\right]$
7. Vyjadrite reálnu a imaginárnu časť funkcie:
   (a) $f(z) = z^2 - z + 1$,
   $[\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 - x + 1, \operatorname{Im} f(z) = 2xy - y]$
   (b) $f(z) = \frac{1}{z}$,
   $\left[\operatorname{Re} f(z) = \frac{x}{x^2+y^2}, \operatorname{Im} f(z) = -\frac{y}{x^2+y^2}\right]$
   (c) $f(z) = |z| + \operatorname{Re} z$.
   $\left[\operatorname{Re} f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} + x, \operatorname{Im} f(z) = 0\right]$.

   V úlohách 7 - 12 vypočítajte limity:
8. $\lim_{z \longrightarrow 2i} \frac{z+3}{z^2+2iz}$. $\left[-\frac{3+2i}{8}\right]$
9. $\lim_{z \longrightarrow i} \frac{z^2-iz+z-i}{3iz^2+3z}$. $\left[-\frac{1+i}{3}\right]$
10. $\lim_{z \longrightarrow 2+i} \frac{3iz-6i+3}{2iz^2-4iz+2z}$. $\left[\frac{6-3i}{10}\right]$
11. $\lim_{z \longrightarrow i} \frac{z^2+(2-i)z-2i}{z^2+1}$. $\left[\frac{1}{2} - i\right]$
12. $\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{z^3}{|z|^2}$. $[0]$
13. $\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{z^2}{|z|^2}$.
    [Návod:vyjadrite reálnu a imaginárnu časť funkcie, potom ukážte, že limita neexistuje.]
    V úlohách 13 - 15 vyšetrite spojitosť funkcie $f$ :
14. $f(z) = \frac{1}{1-z}$. [Spojitá v $\boldsymbol{C} \setminus \{1\}$]

15. $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. [Spojitá v $\boldsymbol{C} \setminus \{-i, i\}$]

16. $f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$. [Spojitá v $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$]

V úlohách 16 - 17 zistite, či je možné dodefinovať funkciu $f$ v bode $z_0$ tak, aby bola spojitá v tomto bode:

17. $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0, 1+i\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{z^3 - z^2 - iz^2 + iz - i + 1}{z^2 - z - iz}$, $z_0 = 1 + i$.

$\left[\text{Je možné, ak } f(1+i) = \frac{3}{2}(1+i)\right]$

18. $f : \boldsymbol{C} \setminus \{4+i\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{z^2 - (3+2i)z - 6 + 7i}{z - 4 - i}$, $z_0 = 4 + i$.

[Nie je možné, lebo $f \lim_{z \longrightarrow 4+i} f(z) = \infty$]

Rady funkcií komplexnej premennej.
Rad

$$u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) + \ldots, \tag{(1)}$$

kde $u_k : A \longrightarrow \boldsymbol{C}$ sú funkcie komplexnej premennej sa nazýva rad funkcií komplexnej premennej. Pre pevnú hodnotu $z = z_0 \in A$ z (1) dostaneme rad komplexných čísel

$$u_1(z_0) + u_2(z_0) + \cdots + u_n(z_0) + \ldots \tag{(2)}$$

Ak je rad (2) konvergentný, potom bod $z = z_0$ nazývame bodom konvergencie radu (1). Množinu všetkých bodov konvegrencie nazývame obor konvergencie radu (1). Označme obor konvergencie $K$ $(K \subset A)$. Ak označíme

$$s_n(z) = \sum_{k=1}^{n} u_k(z)$$

čiastočný súčet radu (1), potom v každom bode z oboru konvergencie radu (1) existuje

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} s_n(z) = f(z)$$

kde $f : K \longrightarrow \boldsymbol{C}$ nazývame súčtom radu (1). Nech $R_n(z)$ je zvyšok po n-tom čiastočnom súčte radu (1)

$$R_n(z) = f(z) - s_n(z).$$

Potom v každom bode z oboru konvergencie radu (1) máme

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} R_n(z) = 0.$$

**Definition 89** *Nech je rad (1) konvergentný v každom bode $z \in K(\subset A)$, t.j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje číslo $N(\varepsilon, z)$ také, že $n > N \Longrightarrow |R_n(z)| < \varepsilon$. Potom hovoríme, že rad (1) bodovo konverguje ku $f$ na množine $K$.*

**Definition 90** *Hovoríme, že rad (1) rovnomerne konverguje k funkcii $f : K \longrightarrow \boldsymbol{C}, w = f(z)$ v oblasti $K \subset A$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje číslo $N(\varepsilon)$ také, že*

$$n > N \Longrightarrow |f(z) - s_n(z)| = |R_n(z)| < \varepsilon,$$

*pre každé $z \in K$.*

Rovnomernú konvergenciu radu (1) možno zistiť pomocou nasledujúcej postačujúcej podmienky:

**Theorem 91** *(Weierstrassovo kritérium.) Ak*

$$|u_n(z)| \leq a_n,$$

*kde $u_n : A(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, pre každé $z \in A$ a rad s nezápornými členmi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný, potom je rad (1) absolútne a rovnomerne konvergentný v oblasti $A$.*

**Theorem 92** *Nech $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, kde $u_n : A(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, je rovnomerne konvergentný rad v oblasti $A$ a nech $u_n(z)$ sú spojité funkcie pre každé $n = 1, 2, 3, \ldots$. Potom súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = f(z)$ je funkcia spojitá v oblasti $A$.*

Mocninové rady.

**Definition 93** *Rad tvaru*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{(3)}$$

*kde $a, c_0, c_1, c_2, \ldots$ sú dané pevné komplexné čísla a $z \in \boldsymbol{C}$ nazývame mocninový rad so stredom v bode $a$.*

Pretože (3) je zvláštnym prípadom radu (1), všetky výsledky platné pre rady funkcií komplexnej premennej zostávajú v platnosti aj pre mocninové rady.

Označme:

- kruh so stredom v bode $a$ s polomerom $r$

$$K(a, R) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z-a| < r\},$$

- uzavretý kruh so stredom v bode $a$ s polomerom $r$

$$\overline{K(a, R)} = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z-a| \leq r\}.$$

**Theorem 94** *(Abelova) Ak mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ konverguje v bode $z = z_0 \neq a$, potom tento rad absolútne konverguje v kruhu $K(a, |z_0 - a|)$. V každom uzavretom kruhu $\overline{K(a, r)}$, $r < |z_0 - a|$ rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ rovnomerne konverguje.*

Ak (3) diverguje v bode $z = z_1$, potom diverguje na množine

$$\boldsymbol{C} \setminus \overline{K(a, |z_1 - a|)} = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z-a| > |z_1 - a|\}$$

**Definition 95** *Nech je mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ konvergentný v $K(a, R)$ a divergentný v $\boldsymbol{C} \setminus \overline{K(a, R)}$, potom množinu $K(a, R)$ nazývame kruh konvergencie a $R$ polomer konvergencie radu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$.*

Kruh a polomer konvergencie radu (3) môžme určiť nasledovne: použijeme vhodné kritérium konvergencie (napr. D' Allembertovo alebo Cauchyho) pre rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |z-a|^n, \tag{(4)}$$

ktorý je radom s nezápornými člemni a zároveň aj majorantným radom k radu (3). Ak rad (4) konverguje pre nejaké $z_0 \in \boldsymbol{C}$, potom v kruhu $K(a, |z_0 - a|)$ konverguje aj rad (3).

**Example 96** *Nájdite kruh konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^3}{n} z^n$.*

**Solution 97** *Použijeme D' Allembertovo kritérium. Máme $a_n = \left|\frac{(-1)^3}{n}\right| |z|^n$*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{\frac{(-1)^3}{n+1} z^{n+1}}{\frac{(-1)^3}{n} z^n}\right| = |z| < 1,$$

*teda rad je absolútne konvergentný v kruhu $K(0, 1)$ a rovnomerne konvergentný v kruhu $K(0, \rho)$, kde $\rho < 1$.*$\square$

**Lemma 98** *Mocninové rady* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n (z-a)^{n-1}$ *konvergujú v tom istom kruhu konvergencie. (t.j. majú taký istý polomer konvergencie.)*

**Example 99** *Nájdite kruh konvergencie radu* $\sum_{n=0}^{\infty} n! (z-a)^n$.

**Solution 100** *Máme* $a_n = |n!(z-a)^n|$.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{(n+1)!\,(z-a)^{n+1}}{n!\,(z-a)^n}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty}(n+1)\,|z-a| = \begin{cases} 0 & ak \quad z=a \\ \infty & ak \quad z\neq a \end{cases}.$$

*teda rad* $\sum_{n=0}^{\infty} n! (z-a)^n$ *konverguje iba v bode* $a$. $\square$

**Example 101** *Nájdite kruh konvergencie radu* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

**Solution 102** *Máme* $a_n = \left|\frac{z^n}{n!}\right|$.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = |z| \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{1}{(n+1)!}\right| = 0 < 1,$$

*ak* $z \in \boldsymbol{C}$, *teda rad* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *absolútne konverguje v každom bode* $z \in \boldsymbol{C}$. $\square$

**Example 103** *Nájdite kruh konvergencie radu* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} (z-1)^n$.

**Solution 104** *Máme* $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} |z-1|^n$.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}|z-1|^n} = |z-1| \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= |z-1|\, e < 1, \Longrightarrow |z-1| < \frac{1}{e},$$

*teda rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} (z-1)^n$ *absolútne konverguje na kruhu* $K\left(1, \frac{1}{e}\right)$. $\square$

**Example 105** *Nájdite kruh konvergencie radu* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

**Solution 106** *Použijeme podielové kritérium konvergencie nekonečného radu. Máme*

$$a_n = \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{\frac{z^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| = |z|^2 \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{1}{(2n+3)\,(2n+2)}\right| = 0 < 1, \forall z \in \boldsymbol{C}$$

*teda rad* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *absolútne konverguje v každom bode komplexnej roviny.* $\square$

Chovanie radu (3) na kružnici

$$S\left(a,R\right)=\left\{z\in\boldsymbol{C};\;\left|z-a\right|=R\right\}$$

je potrebné skúmať v každom jej bode osobitne.

Abelova veta implikuje, že rad (3) rovnomerne konverguje v každom uzavretom kruhu $\overline{K\left(a,r\right)}$, kde $r\in(0,R)$ a $R$ je polomer konvergencie radu (3).

Skúmajme rady so zápornými mocninami $(z-a)$.

$$\frac{b_1}{(z-a)}+\frac{b_2}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{b_k}{(z-a)^k}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\left(z-a\right)^n} \tag{(5)}$$

Ak zavedieme substitúciu

$$\frac{1}{z-a}=\eta \tag{(6)}$$

dostaneme rad

$$b_1\eta+b_2\eta^2+\cdots+b_k\eta^k+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\eta^n. \tag{(7)}$$

Nech polomer konvergencie radu (7) je $\rho$ t.j. rad (7) konverguje v $K(0,\rho)$ a diverguje na množine $\boldsymbol{C}\backslash\overline{K(0,\rho)}$. Potom substitúcia (6) implikuje, že rad (5) konverguje na $\boldsymbol{C}\setminus\overline{K\left(a,\frac{1}{\rho}\right)}$ a diverguje v $K\left(a,\frac{1}{\rho}\right)$.

Budeme teraz uvažovať rad

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\left(z-a\right)^n=\cdots+\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{(z-a)}+\\&+c_0+c_1(z-a)+\cdots+c_n(z-a)^n+\dots\end{aligned} \tag{(8)}$$

Rad (8), ktorý pozostáva z dvoch radov je konvergentný vtedy a len vtedy ak oba rady t.j.

$$c_0+c_1(z-a)+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-a\right)^n \tag{(9)}$$

$$\cdots+\frac{c_{-n}}{\left(z-a\right)^n}+\frac{c_{-n+1}}{\left(z-a\right)^{n-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{(z-a)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{\left(z-a\right)^n} \tag{(10)}$$

konvergujú. Ak rad (9) konverguje v nejakom kruhu $K\left(a,R\right)$ a (10) je konvergentný v $\boldsymbol{C}\backslash\overline{K\left(a,r\right)}$. Ak platí $r<R$, potom oba rady konvergujú v prstenci pozostávajúcom z dvoch koncentrických kružníc so stredom v bode $z=a$ a s polomermi $r,R$, ktorý nazývame medzikružie konvergencie a označujeme $P(a,r,R)$, kde

$$P\left(a,r,R\right)=\left\{z\in\boldsymbol{C};\;r<\left|z-a\right|<R\right\},$$

kde $0\le r<R\le\infty$.

**Example 107** *Nájdite obor konvergencie radu*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{(n+2)(n+3)}\left(\frac{1+2i}{z-i}\right)^n. \tag{(11)}$$

**Solution 108** *Riešenie Nech* $\frac{1}{z-i} = \eta$. *Potom dostaneme rad*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+2)(n+3)} (1+2i)^n \eta^n. \tag{(12)}$$

*pre ktorý dostaneme:* $a_n = |\eta|^n |1+2i|^n \frac{(n+1)}{(n+2)(n+3)}$,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |\eta| \, |1+2i| \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{(n+2)^2(n+3)}{(n+1)(n+3)(n+4)} = |\eta|\sqrt{5} < 1,$$

*teda kruh konvergencie radu (12) je* $K\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ *a rad (11) konverguje na množine* $\boldsymbol{C} \setminus \overline{K\left(i, \sqrt{5}\right)}$. $\square$

## Cvičenia.

1. Nájdite obor konvergencie mocninového radu:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$. $[K(0,1) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < 1\}]$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$. [konverguje len v strede $a = 0$]

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$. $[K(0,e) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < e\}]$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n-1}}{1+in} z^n$. $[K(0,1) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < 1\}]$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$. $[K(0,2) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < 2\}]$

   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{2n}$. $\left[K\left(0,\sqrt{2}\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < \sqrt{2}\right\}\right]$

   (g) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in)\, z^n$. $\left[K\left(0,\frac{1}{e}\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < \frac{1}{e}\right\}\right]$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{2n}} (z-1+i)^n$.
   $\left[K\left(1-i,\frac{1}{3}\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ |z-1+i| < \frac{1}{3}\right\}\right]$

   (i) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2} (z-2i)^n$.
   $[K(2i,e^2) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z-2i| < e^2\}]$

   (j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+in}{2^n} (z+i)^n$. $[K(-i,2) = \{\, z \in \boldsymbol{C};\ |z+i| < 2\}]$

   (k) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{5}\right)^n$ $[K(1,5) = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-1| < 5\}]$

   (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2i)^n}{(n+1)(n+3)} (z+3i)^n$,
   $\left[K\left(-3i,\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C} : |z+3i| < \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}\right]$

   (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} \left(\frac{z-1+i}{1-3i}\right)^n$,
   $\left[K\left(1-i,\sqrt{10}\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C} : |z-1+i| < \sqrt{10}\right\}\right]$

   (n) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{5}\right)^n$ $[K(1,5) = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-1| < 5\}]$

## Elementárne transcendentné funkcie komplexnej premennej.

V predchádzajúcich častiach matematiky sme definovali funkcie $e^x$, $\cos x$, $\sin x$, $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\sinh x$, $\cosh x$, ... Ak miesto $x$ zavedieme komplexnú premennú $z$ potom definície týchto funkcií strácajú zmysel. Budeme preto znova definovať elementárne funkcie komplexnej premennej tak aby boli rozšírením elementárnych funkcií reálnej premennej.

### Mocninová funkcia s prirodzeným exponentom.

**Definition 109** *Nech $n \in \boldsymbol{N}$. Funkciu $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = z^n$ nazývame mocninovou funkciou komplexnej premennej s prirodzeným exponentom.*

Mocninová funkcia je pre $n = 1$ identita t.j. bijektívna funkcia. Ukážeme, že pre $n > 2$ mocninová funkcia nie je injektívna funkcia a nájdeme množinu, na ktorej bude funkcia $f(z) = z^n$ injektívnou funkciou. Nech $z_1 \neq z_2$

$$z_1 = |z_1| \left(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1\right) \quad \text{a} \quad z_2 = |z_2| \left(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2\right),$$

potom

$$z_1^n = |z_1|^n \left(\cos n\varphi_1 + i \sin n\varphi_1\right) \quad \text{a} \quad z_2 = |z_2|^n \left(\cos n\varphi_2 + i \sin n\varphi_2\right).$$

Nech by

$$z_1^n = z_2^n,$$

platí to vtedy a len vtedy, ak

$$|z_1|^n = |z_2|^n \quad \text{a} \quad n\varphi_1 = n\varphi_2 + 2l\pi,\ l \in \boldsymbol{Z}$$

$l = mn+k$, kde $m \in \boldsymbol{Z}$ a $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Tak implikácia $z_1 \neq z_2 \Longrightarrow z_1^n = z_2^n$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak

$$|z_1| = |z_2| \quad \text{a} \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{2k\pi}{n} + 2m\pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \quad \text{a} \quad m \in \boldsymbol{Z}.$$

Tak sme ukázali, že $f(z) = z^n$ nie je injektívna funkcia. Z predošlých úvah vidíme, že $f(z) = z^n$ bude injektívnou funkciou na každej množine, ktorú dostaneme tak, že $\boldsymbol{C}$ rozdelíme na výseky s vrcholom v bode 0, ramená ktorých zvierajú uhly $\frac{2\pi}{n}$. Jednou z týchto množín je napríklad množina:

$$V_0 = \left\{ z \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}\,;\, -\frac{\pi}{n} < \arg z \leq \frac{\pi}{n} \right\} \cup \{0\}.$$

Nech $w \in \boldsymbol{C}$ je ľubovoľné číslo. Ak $w = 0$, potom mu odpovedá číslo $z = 0 \in V_0$. Ak $w \neq 0$ potom z rovnice $z^n = w$ dostávame čísla

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \left( \cos \frac{\arg w + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg w + 2k\pi}{n} \right), \quad \text{pre} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

a pre $k = 0$ potom máme

$$z_0 = \sqrt[n]{|w|} \left( \cos \frac{\arg w}{n} + i \sin \frac{\arg w}{n} \right).$$

Pretože je $w \neq 0$, tak $-\pi < \arg w \leq \pi$ t.j. $-\frac{\pi}{n} < \frac{\arg w}{n} \leq \frac{\pi}{n}$, t.j. $z_0 \in V_0$. Ukázali sme, že funkcia $f_0 : V_0 \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f_0(z) = z^n$ je bijekcia a $f_0$ má inverznú funkciu.

Hlavná vetva n-tej odmocniny.

**Definition 110** *Nech $n \geq 2$ je prirodzené číslo. Potom inverznú funkciu k funkcii $f_0 : V_0 \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f_0(z) = z^n$ nazývame hlavnou vetvou n-tej odmocniny a označujeme $f_0^{-1}(z) = (\sqrt[n]{z})_0$, $z \in \boldsymbol{C}$.*

**Remark 111** *Niektorí autori množinu všetkých riešení rovnice $w^n = z$ označujú symbolom*

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \right\}$$

*a nazývajú ju n-tou odmocninou z komplexného čísla $z$, ktorú uvažujú ako viacznačnú funkciu.*

**Definition 112** *Funkciu*

$$P_n : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ P_n(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_n,$$

*kde $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \boldsymbol{C}$ sú komplexné čísla a $n \in \boldsymbol{N}$ nazývame polynóm n-tého stupňa komplexnej premennej $z$.Podiel dvoch polynómov nazývame racionálna funkcia.*

Exponenciálna funkcia, funkcie sínus a kosínus.

**Definition 113** *Definujeme funkcie* $\exp, \cos, \sin : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$,

$$\exp z = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{(1)}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{(2)}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{(3)}$$

Rady (1), (2), (3) konvergujú absolútne v $K(0, \infty) = \boldsymbol{C}$. Čitateľ sa iste o tom presvedčí. Ak si uvedomíme, že pre absolútne konvergentné rady ľubovoľné prerovnanie takéhoto radu má ten istý súčet skúmaním $e^{iz}$ dostaneme formulu

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{i^2 z^2}{2!} + \cdots + \frac{i^n z^n}{n!} + \cdots =$$

$$= \left( 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \right) +$$

$$+ i \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \right) = \cos z + i \sin z,$$

ktorú nazývame Eulerova formula.

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{(4)}$$

Ak zameníme $z$ za $-z$ dostaneme

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \tag{(5)}$$

a nakoniec použitím (4) a (5) dostávame

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{(6)}$$

Uvedieme niektoré známe identity (bez dôkazu):

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2},\ \forall z_1, z_2 \in \boldsymbol{C}$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$
$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2.$$

Vlastnosti exponenciálnej funkcie.
Ukážeme, že $e^z \neq 0$ pre každé $z \in \boldsymbol{C}$, $z = x + iy$, $x, y \in \boldsymbol{R}$. Platí

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Nech by existovalo $z \in \boldsymbol{C}$ také, že $e^z = 0$. To znamená:

$$e^x \cos y = 0 \wedge e^x \sin y = 0$$

a pretože $e^x \neq 0$, tak

$$\cos y = 0 \wedge \sin y = 0,$$

odkiaľ plynie, že také reálne číslo $y$ neexistuje. To znamená, že obor hodnôt je $R(\exp) = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$.

Ukážeme za akých predpokladov je funkcia exp bijekcia.
Exponenciálna funkcia nie je injekcia, má periodu $2\pi i$ :

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^z, \quad \text{pre každé} \quad z \in \boldsymbol{C}.$$

T.j. definičný obor exponenciálnej funkcie $D(\exp) = \boldsymbol{C}$ môžme rozdeliť na „pásy“

$$P_k = \{z \in \boldsymbol{C};\ (2k-1)\pi < \operatorname{Im} z \leq (2k+1)\pi\},\ k \in \boldsymbol{Z} \tag{(7)}$$

pre každé $k \in \boldsymbol{Z}$ je funkcia

$$\exp_k : P_k \longrightarrow \boldsymbol{C} \setminus \{0\},\ \exp_k(z) = e^z \tag{(8)}$$

injekcia.

Nech $z = x + iy \in P_k$, $w = u + iv \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ a $e^z = w$. Tak dostaneme

$$e^x \cos y = u \wedge e^x \sin y = v$$

odkiaľ

$$x = \frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2),\ y = \operatorname{arccotg} \frac{u}{v}, \quad \text{ak} \quad v \neq 0$$

alebo

$$x = \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2),\ y = \operatorname{arctg}\frac{v}{u},\ \text{ ak }\ u \neq 0$$

t.j.

$$x = \ln|w|\,,\ y = \arg w + 2k\pi,\ \text{ ak }\ w \neq 0 \tag{(9)}$$

Teda $\exp_k$ je surjekcia.

To znamená, že pre každé $k \in \boldsymbol{Z}$ je funkcia

$$\exp_k : P_k \longrightarrow \boldsymbol{C}\setminus\{0\}\,,\ \exp_k(z) = e^z \tag{(10)}$$

bijekcia

**Logaritmická funkcia.**

**Definition 114** *Inverznú funkciu k bijekcii*

$$\exp_0 : P_0 \longrightarrow \boldsymbol{C}\setminus\{0\}\,,\ \exp_0(z) = e^z$$

*nazývame hlavnou vetvou logaritmu a označujeme*

$$\ln : \boldsymbol{C}\setminus\{0\} \longrightarrow P_0, \ln z = w \Leftrightarrow z = \exp_0(w) = e^w.$$

Ak

$$\ln z = w \Longleftrightarrow w = \ln z = \ln|z| + i\arg z,\ \forall z \in \boldsymbol{C}\setminus\{0\} \tag{(11)}$$

**Remark 115** *Logaritmická funkcia sa dá definovať ako inverzia ku každej bijekcii (10). Niektorí autori namiesto hlavnej vetvy logaritmu definujú viacznačnú funkciu*

$$\operatorname{Ln}(z) = \{\ln z + 2k\pi i, k \in \boldsymbol{Z}\}\,,$$

*ktorá je množinou všetkých riešení rovnice $e^z = w$. Každá z týchto hodnôt leží na priamke $u = \ln|z|$ a líši sa od ostatných hodnôt iba aditívnou konštantou $2k\pi i$.*

**Example 116** *Nájdime* $\operatorname{Ln}(-3)$.

**Solution 117** *Pretože* $|-3| = 3$ *a* $\arg(-3) = \pi$, *potom*

$\operatorname{Ln}(-3) = \{\ln 3 + i(2k+1)\pi,\ k = 0, \pm1, \pm2, \dots\}$

*a hlavná hodnota* $\ln(-3) = \ln 3 + \pi i.\square$

**Example 118** *Nájdite všetky riešenia rovnice $e^z = 1 + i$.*

**Solution 119** *Pretože* $|1+i| = \sqrt{2}$ *a* $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$, *potom*

$$\operatorname{Ln}(1+i) = \left\{\frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k = 0, \pm1, \pm2, \dots\right\}.\square$$

**Vlastnosti funkcií sínus a kosínus.**

Podobným spôsobom ako pre exponenciálnu funkciu sa dá ukázať, že platí

$$\sin z = 0 \Longleftrightarrow z = k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z} \tag{(13)}$$

$$\cos z = 0 \Longleftrightarrow z = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \boldsymbol{Z} \tag{(14)}$$

t.j. ako v reálnej analýze. Ukážeme, že pre každé komplexné číslo $z = x + iy$, $x, y \in \boldsymbol{R}$, $y \neq 0$ platí

$$\sin z \neq 0 \wedge \cos z \neq 0 \tag{(15)}$$

Máme

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy)$$

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)$$

Pretože

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} \neq 0,\ \sin(iy) = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i} \neq 0 \tag{(16)}$$

a $\sin x$ a $\cos x$ nemôžu byť rovné nule naraz pre to isté číslo $x \in \boldsymbol{R}$ tak platí (15).

Funkcie $\sin z$ a $\cos z$ sú periodické s periodou $2\pi$. Chceme zistiť, či pre $z_1 \neq z_2$ je

$$\sin z_1 = \sin z_2,\ \cos z_1 = \cos z_2$$

Ak platí prvá z rovností, potom

$$\sin z_1 = \sin z_2 \Longrightarrow \sin z_1 - \sin z_2 = 0 \Longrightarrow 2\sin\frac{z_1 - z_2}{2}\cos\frac{z_1+z_2}{2} = 0$$

t.j.

$$\sin z_1 = \sin z_2 \Longleftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi \quad \text{alebo} \quad z_1 + z_2 = (2k+1)\pi$$

podobne sa dá ukázať, že

$$\cos z_1 = \cos z_2 \Longleftrightarrow z_1 - z_2 = (2k+1)\pi \quad \text{alebo} \quad z_1 + z_2 = (2k+1)\pi$$

Teda funkcie sin a cos nie sú injektívne funkcie. Sformulujume vetu:

**Theorem 120** *Nech*

$$Q_k = \left\{ z \in \boldsymbol{C};\ -\frac{\pi}{2} + k\pi < \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\},\ k \in \boldsymbol{Z} \tag{(17)}$$

$$S_k = \left\{ z \in \boldsymbol{C};\ k\pi < \operatorname{Re} z \leq (k+1)\pi \right\},\ k \in \boldsymbol{Z} \tag{(18)}$$

*potom zúžené funkcie:*

$$\sin|_{Q_k} : Q_k \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \sin|_{Q_k}(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \tag{(19)}$$

$$\cos|_{S_k} : S_k \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \cos|_{S_k}(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \tag{(20)}$$

*sú bijekcie pre každé* $k \in \boldsymbol{Z}$.

Podobne ako pre reálne premenné môžme definovať ostatné trigonometrické funkcie. My sa v krátkosti zmienime o funkciách tg a cotg.

$$\begin{array}{l} \operatorname{tg} : \boldsymbol{C} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}\right\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \\ \operatorname{cotg} : \boldsymbol{C} \setminus \{k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\} \longrightarrow \boldsymbol{C}, \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\operatorname{tg} z} \end{array} \tag{(21)}$$

Použitím vzťahov (6) a (21) dostaneme

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,\ \operatorname{tg} z \operatorname{cotg} z = 1.$$

Podobne ako pre funkcie sin a cos sa dá ukázať:

$$\operatorname{tg} z = 0 \Longleftrightarrow z = k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}, \operatorname{cotg} z = 0 \Longleftrightarrow z = (2k+1)\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(z+\pi), \operatorname{cotg} z = \operatorname{cotg}(z+\pi)$$

$$\operatorname{tg} z_1 = \operatorname{tg} z_2 \Longleftrightarrow z_1 = z_2 + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

$$\operatorname{cotg} z_1 = \operatorname{cotg} z_2 \Longleftrightarrow z_1 = z_2 + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

Ak označíme

$$Q_k^0 = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ -\frac{\pi}{2} + k\pi < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} + k\pi\right\},\ k \in \boldsymbol{Z}$$

$$S_k^0 = \{z \in \boldsymbol{C};\ k\pi < \operatorname{Re} z < (k+1)\pi\},\ k \in \boldsymbol{Z}$$

potom podobne ako pre sin a cos môžme dokázať, že funkcie

$$\operatorname{tg}|_{Q_k^0} : Q_k^0 \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \operatorname{tg}|_{Q_k^0}(z) = \frac{\sin z}{\cos z},$$

$$\operatorname{cotg}|_{S_k^0} : S_k^0 \longrightarrow \boldsymbol{C}, \operatorname{cotg}|_{S_k^0}(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$$

sú bijekcie pre každé $k \in \boldsymbol{Z}$.

**Hyperbolické funkcie.**

Definujeme funkcie:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

pre ktoré platí

$$\cos(iz) = \frac{e^{iiz} + e^{-iiz}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z,$$

$$\sin(iz) = \frac{e^{iiz} - e^{-iiz}}{2i} = i\frac{e^z - e^{-z}}{2} = i \sinh z,$$

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z,$$

$$\sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \sin z.$$

**Inverzné funkcie k trigonometrickým a hyperbolickým funkciám.**

Inverzné funkcie k trigonometrickým a hyperbolickým funkciám komplexnej premennej sú definované podľa tých istých pravidiel ako odpovedajúce inverzné funkcie k trigonometrickým a hyperbolickým funkciám pre reálnu premennú. Nebudeme sa im venovať podrobnejšie. Tak dostaneme:

- bijekcia $\sin|_{Q_0}$ má inverznú funkciu

$$\arcsin : \boldsymbol{C} \longrightarrow Q_0 = \left\{ z \in \boldsymbol{C};\, -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2} \right\},\ \arcsin z = w \Longleftrightarrow z = \sin w,$$

- bijekcia $\cos|_{S_0}$ má inverznú funkciu

$$\arccos : \boldsymbol{C} \longrightarrow S_0 = \{ z \in \boldsymbol{C};\, 0 < \operatorname{Re} z \leq \pi \},\ \arccos z = w \Longleftrightarrow z = \cos w,$$

- bijekcia $\operatorname{tg}|_{Q_0^0}$ má inverznú funkciu

$$\operatorname{arctg} : \boldsymbol{C} \longrightarrow Q_0^0 = \left\{ z \in \boldsymbol{C};\, -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} \right\},\ \operatorname{arctg} z = w \Longleftrightarrow z = \operatorname{tg} w,$$

- bijekcia $\operatorname{cotg}|_{S_0^0}$ má inverznú funkciu

$$\operatorname{arccotg} : \boldsymbol{C} \longrightarrow S_0^0 = \{ z \in \boldsymbol{C}; 0 < \operatorname{Re} z < \pi \},\ \operatorname{arccotg} z = w \Longleftrightarrow z = \operatorname{cotg} w.$$

Pre tieto funkcie dostaneme

$$\arcsin z = -i \ln\left( iz + \sqrt{1 - z^2} \right), \quad \text{pre každé} \quad z \in \boldsymbol{C},$$

$$\arccos z = -i \ln\left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right), \quad \text{pre každé} \quad z \in \boldsymbol{C},$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{i}{2} \ln \frac{i + z}{i - z}, \quad \text{pre každé} \quad z \in \boldsymbol{C},$$

$$\operatorname{arccotg} z = \frac{i}{2} \ln \frac{z - i}{z + i}, \quad \text{pre každé} \quad z \in \boldsymbol{C}.$$

**Mocninová funkcia so všeobecným exponentom.**

**Definition 121** *Nech $a, z \neq 0$ sú komplexné čísla. Funkciu $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \exp_0(a \ln z)$ nazývame hlavná vetva (hodnota) mocniny so všeobecným exponentom..*

**Example 122** *Nájdite $1^{\sqrt{2}}$.*

**Solution 123** *Máme*

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln 1} = e^0 = 1. \square$$

**Example 124** *Nájdite $2^{1-i}$.*

**Solution 125** *Máme*

$$2^{1-i} = e^{(1-i) \ln 2} = 2(\cos(\ln 2) - i \sin(\ln 2)). \square$$

## Cvičenia.

1. Vypočítajte funkčné hodnoty:

   (a) $\ln(-1)$, $[i\pi]$
   (b) $\ln(-i)$, $\left[-\frac{1}{2}i\pi\right]$
   (c) $\ln\left(1-\sqrt{3}i\right)$. $\left[\frac{1}{2}\ln 4-\frac{1}{3}i\pi\right]$
   (d) $\ln(-3)$ $[\ln 3+i\pi]$
   (e) $\ln(5i)$ $\left[\ln 5+i\frac{\pi}{2}\right]$
   (f) $\ln(2)$ $[\ln 2]$
   (g) $\ln(e)$ $[1]$
   (h) $\ln(2+2i)$ $\left[\ln\left(\sqrt{8}\right)+i\frac{\pi}{4}\right]$
   (i) $\ln(-2+2i)$ $\left[\ln\left(\sqrt{8}\right)+i\frac{3\pi}{4}\right]$
   (j) $\ln(-2-2i)$ $\left[\ln\left(\sqrt{8}\right)+i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$
   (k) $\ln(2-2i)$ $\left[\ln\left(\sqrt{8}\right)-i\frac{\pi}{4}\right]$
   (l) $\ln(3+4i)$ $\left[\ln 5+i\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right]$
   (m) $\ln(-3-4i)$ $\left[\ln 5+i\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)-\pi\right)\right]$
   (n) $\ln(3-4i)$ $\left[\ln 5-i\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right]$
   (o) $\ln(1-i)$ $\left[\frac{1}{2}\ln 2-i\frac{\pi}{4}\right]$
   (p) $\ln(-\sqrt{3}-i)$ $\left[\ln 2-i\frac{5\pi}{6}\right]$
   (q) $\ln(1-i\sqrt{3})$ $\left[\ln 2-i\frac{\pi}{3}\right]$
   (r) $\ln(-8+15i)$ $\left[\ln 17+i\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{15}{8}\right)\right]$
   (s) $\ln\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$ $\left[i\frac{\pi}{4}\right]$
   (t) $\ln\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$ $\left[\ln\sqrt{3}+i\frac{\pi}{6}\right]$

2. Nájdite všetky riešenia $z$ rovníc:

   (a) $e^z=-1$, $[\mathrm{Ln}(-1)=\{i\pi(1+2k),\ k\in\boldsymbol{Z}\}]$
   (b) $e^z=-i$, $\left[\mathrm{Ln}(-i)=\left\{i\pi\left(-\frac{1}{2}+2k\right),\ k\in\boldsymbol{Z}\right\}\right]$
   (c) $e^z=1-\sqrt{3}i$. $\left[\mathrm{Ln}\left(1-i\sqrt{3}\right)=\left\{\frac{1}{2}\ln 4-\frac{1}{3}i\pi+2k\pi i,\ k\in\boldsymbol{Z}\right\}\right]$

3. Vypočítajte hodnoty:

   (a) $e^{2+i\frac{\pi}{2}}$, $[ie^2]$
   (b) $e^{2+i}$, $[e^2\cos 1+ie^2\sin 1]$
   (c) $i^i$. $\left[e^{-\frac{1}{2}\pi}\right]$
   (d) $(-3i)^{2i}$ $[e^{\pi}[\cos(\ln 9)+i\sin(\ln 9)]]$
   (e) $i^{1+i}$ $\left[ie^{-\frac{\pi}{2}}\right]$
   (f) $i^{\frac{3}{4}}$ $\left[\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right]$

(g) $(1-i)^{2+i}$ $\left[2e^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)\right)-i\cos\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)\right)\right]$

(h) $(1+i)^{\frac{1}{2}}$ $\left[\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\right]$

(i) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{2-i}$ $\left[4e^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\ln 2\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\ln 2\right)\right)\right]$

4. Vypočítajte hodnoty:

(a) $\sin i$, $[i\sinh 1]$

(b) $\cos(1-i)$. $[\cos 1\cosh 1+i\sin 1\sinh 1]$

(c) $\sin(2-3i)$

$$\left[\frac{\sin 2\left(e^{3}+e^{-3}\right)}{2}-i\frac{\cos 2\left(e^{3}-e^{-3}\right)}{2}=\sin 2\cosh 3-i\cos 2\sinh 3\right]$$

(d) $\cos i$ $\left[\frac{e^{-1}+e}{2}=\cosh 1\right]$

(e) $\cos(4+i)$ $[\cos 4\cosh 1-i\sin 4\sinh 1]$

(f) $\operatorname{tg}(2-i)$ $\left[\frac{e^{2}\sin 4+i\left(1-e^{2}\cos 4\right)}{e^{2}\cos 4+1+ie^{2}\sin 4}\right]$

(g) $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-i\ln 2\right)$ $\left[\frac{8+15i}{17}\right]$

# Diferenciálny počet funkcií komplexnej premennej.

## Derivácia funkcie komplexnej premennej.

**Definition 126** *Nech $f : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je jednoznačná funkcia komplexnej premennej, $A$ je otvorená, $a \in A$. Ak existuje konečná limita $\lim_{z\longrightarrow a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$, potom túto limitu nazývame derivácia funkcie $f$ v bode $a$, označujeme $f'(a)$ a hovoríme, že funkcia $f$ je diferencovateľná v bode $a$. Ak je funkcia $f$ diferencovateľná v každom bode z $A$, hovoríme, že $f$ je diferencovateľná funkcia a funkciu*

$$f' : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f'(a) = \lim_{z\longrightarrow a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

*nazývame deriváciou funkcie $f$.*

Pretože definícia derivácie funkcie komplexnej premennej v bode je taká istá ako pre funkciu reálnej premennej, platia všetky pravidlá, ktoré platili pre derivovanie funkcií reálnej premennej, ako aj všetky vety o diferencovateľnosti, napríklad diferencovateľnosť funkcie komplexnej premennej $f(z)$ v nejakom bode z definičného oboru implikuje spojitosť funkcie $f$ v tomto bode.

**Example 127** *Nájdite deriváciu funkcie*

$$f : \boldsymbol{C} \setminus \left\{\frac{4}{3}i\right\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \frac{z-2i}{3iz+4}.$$

**Solution 128** *Funkcia $f$ je spojitá na celom definičnom obore a máme*

$$f' : \boldsymbol{C} \setminus \left\{\frac{4}{3}i\right\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f'(z) = \frac{-2}{(3iz+4)^2}.\square$$

**Example 129** *Nájdite deriváciu funkcie*

$$f : \boldsymbol{C} \setminus \left\{-\frac{2+i}{3}\right\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \ln(2+i+3z).$$

**Solution 130** *Pretože funkcia $\ln z$ nie je spojitá na množine reálnych záporných čísel, derivácia $f'(z)$ pre tieto hodnoty neexistuje. Ak $z = x+iy$, potom*

$$2+i+3z = 2+3x+i(1+3y)$$

*a toto číslo je reálne záporné vtedy a len vtedy ak $y = -\frac{1}{3}$ a $x < -\frac{2}{3}$, to znamená, že $f$ nie je spojitá na množine*

$$A_1 = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ \operatorname{Re} z < -\frac{2}{3} \wedge \operatorname{Im} z = -\frac{1}{3}\right\},$$

*teda $f$ je diferencovateľná na množine*

$$M = \boldsymbol{C} \setminus \left[A_1 \cup \left\{-\frac{2+i}{3}\right\}\right] = \boldsymbol{C} \setminus \left\{z \in \boldsymbol{C};\ \operatorname{Re} z \le -\frac{2}{3} \wedge \operatorname{Im} z = -\frac{1}{3}\right\},$$

*a jej derivácia je*

$$f' : M \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f'(z) = \frac{3}{2+i+3z}.\square$$

Cauchyho - Riemannove rovnice.

V tejto časti budeme formulovať nutné a postačujúce podmienky pre diferencovateľnosť funkcie komplexnej premennej, ktorú vyjadríme v tvare:

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)\,.$$

**Theorem 131** *(Nutná a postačujúca podmienka) Funkcia* $f : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, *(*$A$ *je otvorená) je diferencovateľná v bode* $a = a_1 + ia_2$ *vtedy a len vtedy ak sú funkcie* $u(x,y)$ *a* $v(x,y)$ *diferencovateľné v bode* $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ *a platia podmienky*

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{a})}{\partial x} = \frac{\partial v(\boldsymbol{a})}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(\boldsymbol{a})}{\partial y} = -\frac{\partial v(\boldsymbol{a})}{\partial x} \tag{(1)}$$

*potom*

$$f'(a) = \frac{\partial u(\boldsymbol{a})}{\partial x} + i\,\frac{\partial v(\boldsymbol{a})}{\partial x} = \frac{\partial v(\boldsymbol{a})}{\partial y} - i\,\frac{\partial u(\boldsymbol{a})}{\partial y}.$$

Rovnice (1) nazývame Cauchyho - Riemannove rovnice.

**Example 132** *Nájdite deriváciu funkcie* $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i\,(3x^2y - y^3)$.

**Solution 133** *Máme*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \; \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \; \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy, \; \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2.$$

*Parciálne derivácie sú spojité pre každé* $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$ *a spĺňajú Cauchyho - Riemannove rovnice. Teda* $f$ *má deriváciu v každom bode* $z \in \boldsymbol{C}$ *a*

$$f' : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}, \; f'(z) = 3x^2 - 3y^2 + i6xy.$$

*Ak chceme funkciu* $f$ *zapísať ako funkciu premennej* $z$ *musíme použiť vzťahy*

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad a \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

*Aplikáciu týchto vzťahov dostaneme*

$$f'(z) = 3z^2. \square$$

**Example 134** *Vyšetrite, v ktorých bodoch je funkcia* $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = |z^2|$ *diferencovateľná.*

**Solution 135** *Nech* $z = x + iy$, *potom* $f(z) = |x+iy|^2 = x^2 + y^2$ *a*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \; \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \; \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

*Odtiaľ plynie, že Cauchyho - Riemannove rovnice sú splnené v jedinom bode* $(x,y) = (0,0)$, *teda* $f$ *je diferencovateľná iba v bode* $0$ *a* $f'(0) = 0. \square$

Analytické funkcie.

**Definition 136** *Nech $f : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, ($A$ otvorená) je funkcia komplexnej premennej. Hovoríme, že $f$ je*

*a) analytická v oblasti $M \subset A$ ak $f'(z)$ existuje v každom bode $z \in M$,*

*b) analytická v bode $a \in A$ ak existuje okolie $O(a) \subset A$ také, že v každom bode $z \in O(a)$ existuje $f'(z)$.*

**Remark 137** *Diferencovateľnosť a analytickosť funkcie v oblasti sú zhodné pojmy. Analytickosť funkcie v bode je silnejšia vlastnosť než diferencovateľnosť funkcie v bode.*

**Example 138** *Napríklad funkcia $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = |z^2|$ z príkladu 134 má deriváciu v bode $a = 0$, ale nie je analytická v tomto bode, pretože jej derivácia $f'(z)$ neexistuje v žiadnom bode z ľubovoľného okolia bodu $a = 0$.*

**Remark 139** *Niektorí autori namiesto pojmu analytická funkcia používajú pojem holomorfná funkcia.*

**Definition 140** *Body komplexnej roviny $\boldsymbol{C}$ v ktorých je funkcia analytická nazývame regulárne body funkcie. Body v ktorých funkcia nie je analytická (teda aj tie, v ktorých funkcia nie je definovaná) nazývame singulárne body.*

**Example 141** *Ukážte, že funkcia $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0, i\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{1}{z^2 - iz}$ je analytická.*

**Solution 142** *Vypočítajme deriváciu funkcie v bode a*

$$f'(a) = -\frac{2a - i}{(a^2 - ia)^2}$$

*existuje v každom bode $a \in \boldsymbol{C} \setminus \{0, i\}$.* □

Z predchádzajúcej kapitoly o elementárnych funkciách plynie, že

mocninová funkcia s prirodzeným exponentom, polynomická funkcia, exponenciálna funkcia, trigonometrické a hyperbolické funkcie sú analytické funkcie. Hlavná hodnota (vetva) logaritmu a všeobecnej mocniny, sú analytické na množine všetkých komplexných čísel s výnimkou nuly a záporných reálnych čísel. Je to z toho dôvodu, že tieto funkcie sú definované pomocou logaritmickej funkcie.

Použitím vety 131 vieme nájsť analytickú funkciu, ak je daná iba jej reálna časť alebo iba jej imaginárna časť.

**Example 143** *Nájdite analytickú funkciu $f : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ ak je daná $v : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $v(x, y) = 2xy + 3x$.*

**Solution 144** *Pretože hľadáme analytickú funkciu $f$, mala by byť diferencovateľná v každom bode oblasti $A$, t.j. podľa vety 131 funkcie $u$, $v$ musia byť diferencovateľné v oblasti $A$ a musia spĺňať Cauchyho - Riemannove rovnice:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \forall (x, y) \in A \qquad ((3))$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y - 3, \forall (x, y) \in A \tag{(4)}$$

*Rovnica (3) implikuje*

$$u(x, y) = \int 2x dx = x^2 + \Phi(y),$$

*teda*

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \Phi'(y) = -2y - 3,$$

*čo dáva*

$$\Phi(y) = -y^2 - 3y + k, \ k \in \boldsymbol{R}.$$

*a*

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - 3y + k.$$

*Funkcie $u$, $v$ sú diferencovateľné v $A = \boldsymbol{R}^2$, teda*

$$f : A (= \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}, \ f(z) = x^2 - y^2 - 3y + k + i(2xy + 3x) = \frac{z^2 + \overline{z}^2}{2} + 3iz + k$$

*je analytická funkcia.* □

**Remark 145** *V ďalšej kapitole ukážeme, že analytická funkcia má v oblasti, v ktorej je analytická derivácie všetkých rádov.*

**Remark 146** *Okrem použitia Cauchyho - Riemannových vzťahov existuje aj iný spôsob rekonštrukcie analytickej funkcie, ak poznáme iba jej reálnu alebo imaginárnu zložku.*

Tento spôsob nevyžaduje riešenie dvoch parciálnych diferenciálnych rovníc, jeho hlavnou myšlienkou je metóda reflexie analytickej funkcie od reálnej osi. Ak je definovaná funkcia

$$f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}, \ w = f(z),$$

jej reflexia od reálnej osi je definovaná:

$$\widehat{f} : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}, \ \widehat{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}.$$

**Remark 147** *Ak je funkcia $f(z)$ analytická (holomorfná) na otvorenej množine $U \subset \boldsymbol{C}$, potom je $\widehat{f}(z)$ analytická (holomorfná) na otvorenej množine $U' \subset \boldsymbol{C}$, ktorá je reflexiou $U$ od reálnej osi.*

**Theorem 148** *Nech $f(z)$ je analytická (holomorfná) na okolí začiatku $\boldsymbol{C}$ taká, že*

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

*Potom*

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - \overline{f(0)} = 2iv\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) + \overline{f(0)}.$$

**Example 149** *Rekonštruujte analytickú funkciu* $f : A(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ *ak je daná* $v : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ u(x,y) = x^2 - y^2$.

**Solution 150** *Podľa predchádzajúcej vety máme:*

$$f(z) = 2\left[\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(\frac{z}{2i}\right)^2\right] - \overline{f(0)},$$

*t.j.*

$$f(z) = z^2 - \overline{f(0)}.$$

*V bode* $z = 0$ *dostaneme:*

$$f(0) = 0^2 - \overline{f(0)} \Longrightarrow f(0) + \overline{f(0)} = 0 \Longrightarrow \operatorname{Re} f(0) = 0.$$

*Potom*

$$f(z) = z^2 + i\beta,\ \beta \in \boldsymbol{R}.\square$$

Ak je funkcia $f(z)$ analytická v okolí nejakého bodu $a \in \boldsymbol{C}$, potom platí nasledujúca veta:

**Theorem 151** *Nech* $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ *je analytická (holomorfná) v okolí bodu* $a \in \boldsymbol{C}$. *Potom*

$$f(z) = 2u\left(\frac{z+\overline{a}}{2}, \frac{z-\overline{a}}{2i}\right) - \overline{f(a)} = 2iv\left(\frac{z+\overline{a}}{2}, \frac{z-\overline{a}}{2i}\right) + \overline{f(a)}.$$

Harmonické a harmonicky združené funkcie.

**Definition 152** *Reálna funkcia* $u : A\left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *sa nazýva harmonická funkcia ak*

*a) u má spojité parciálne derivácie druhého rádu v oblasti* $A$,
*b)* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, *pre každé* $(x,y) \in A$

Poslednú rovnicu nazývame Laplaceova rovnica, ktorá sa často zapisuje v nasledújúcej forme

$$\Delta u = 0,$$

kde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

je Laplaceov operátor.

**Theorem 153** *Nech* $f : A \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ *je analytická funkcia a funkcie* $u$ *a* $v$ *sú dvakrát spojite diferencovateľné. Potom* $u$, $v$ *sú harmonické funkcie v oblasti* $A$.

**Remark 154** *Opačné tvrdenie k predchádzajúcej vete neplatí, pretože dve harmonické funkcie v oblasti A nemusia byť časťami analytickej funkcie (nemusia spĺňať Cauchyho - Riemannove rovnice).*

**Definition 155** *Nech* $u, v : A\left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *sú harmonické funkcie. Ak* $u$, $v$ *spĺňajú Cauchyho - Riemannove rovnice v oblasti* $A$, *potom hovoríme, že* $u$, $v$ *sú harmonicky združené funkcie.*

**Lemma 156** *Reálna aj imaginárna časť každej analytickej funkcie* $f : A \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f = u + iv$, $A \subset \boldsymbol{C}$, *sú harmonicky združené funkcie v oblasti* $A$, *pričom funkcie* $u$ *a* $v$ *sú dva razy spojite diferencovateľné.*

**Remark 157** *Použitím Cauchyho - Riemannových rovníc na ľubovoľnú harmonickú funkciu* $u : A\left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$, *môžme nájsť harmonicky združenú funkciu* $v : A\left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *tak, že funkcie* $f = u + iv$ *alebo* $g = v + iu$ *sú analytické v oblasti* $A$.

**Example 158** *Nech* $u : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $u(x, y) = x^2 - y^2$. *Nájdite harmonicky združenú funkciu* $v : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *takú, že* $v(0,0) = 0$.

**Solution 159** *Pretože platí* $\Delta u = 0$, $u$ *je harmonická funkcia v* $A = \boldsymbol{R}^2$. *Platí*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y.$$

*Použitím Cauchyho - Riemannových rovníc dostaneme*

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

*odkiaľ*

$$v(x, y) = \int 2x dy = 2xy + \varphi(x)$$

*čo implikuje*

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x),$$

*teda*

$$2y = 2y + \varphi'(x) \quad \textit{alebo} \quad \varphi'(x) = 0 \implies \varphi(x) = k,$$

*kde* $k \in \boldsymbol{R}$ *je ľubovoľná konštanta. Potom*

$$v(x, y) = 2xy + k$$

*a pretože*

$$v(0,0) = 0, \quad \textit{potom} \quad k = 0 \quad \textit{a} \quad v(x, y) = 2xy \quad \textit{a} \quad f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$$

*je analytická funkcia a* $u$, $v$ *sú harmonicky združené funkcie.* $\square$

**Example 160** *Nech* $u : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $u(x, y) = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - 2x - y$, $A = \{(x, y) ; y > 0, x > 0\}$. *Nájdite harmonicky združenú funkciu* $v : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *takú, že* $v(1, 1) = -1$.

**Solution 161** *Pretože platí* $\Delta u = 0$, *u je harmonická funkcia v A. Platí*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x}{x^2+y^2} - 1.$$

*Použitím Cauchyho - Riemannových rovníc dostaneme*

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2,\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} + 1$$

*odkiaľ*

$$v(x,y) = \int \left(\frac{2y}{x^2+y^2} - 2\right) dy = \ln\left(x^2+y^2\right) - 2y + \varphi(x)$$

*čo implikuje*

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} + \varphi'(x),$$

*teda*

$$\varphi'(x) = 1 \implies \varphi(x) = x + k,$$

*kde* $k \in \boldsymbol{R}$ *je ľubovoľná konštanta. Potom*

$$v(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right) - 2y + x + k$$

*a pretože*

$$-1 = v(1,1) = \ln 2 - 2 + 1 + k,$$

*potom*

$$k = -\ln 2 \quad a \quad v(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right) - 2y + x - \ln 2,$$

$$f(z) = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} - 2x - y + i\left[\ln\left(x^2+y^2\right) - 2y + x - \ln 2\right]$$

*je analytická funkcia a* $u$, $v$ *sú harmonicky združené funkcie na A.* $\square$

Geometrický význam derivácie.

Nech $w = f(z)$ je analytická funkcia v oblasti $D \subset \boldsymbol{C}$, ktorá zobrazuje $D$ do oblasti $G \subset \boldsymbol{C}$. Nech $z_0 \in D$ a $w_0 = f(z_0) \in G$ a nech $f'(z_0) \neq 0$. Nech $l$ je ľubovoľná krivka prechádzajúca bodom $z_0$, ktorá má dotyčnicu v bode $z_0$. Funkcia $f$ zobrazí krivku $l$ na krivku $L \in G$. Potom

$$f'(z_0)) = \lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0}$$

čo implikuje

$$\arg f'(z_0) = \lim_{z \longrightarrow z_0} \left[\arg(w - w_0) - \arg(z - z_0)\right]$$

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \longrightarrow z_0} \left|\frac{w - w_0}{z - z_0}\right|$$

Ak $\arg(z - z_0) = \alpha_1$ a $\arg(w - w_0) = \beta_1$, potom pre $z \longrightarrow z_0$ je $\alpha_1 \longrightarrow \alpha$ a $\beta_1 \longrightarrow \beta$ a my dostaneme

$$\arg f'(z_0) = \beta - \alpha \ \text{ alebo } \ \beta = \arg f'(z_0) + \alpha.$$

Teda arg $f'(z_0)$ je uhol o ktorý musíme pootočiť dotyčnicu k $l$ v bode $z_0$ aby sme dostali dotyčnicu ku $L$ v bode $w_0$. Pretože

$$f'(z_0) = \lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0}$$

nezávisí od spôsobu aproximácie $z$ ku $z_0$, teda arg $f'(z_0)$ bude taký istý pre každú krivku prechádzajúcu bodom $z_0$ a arg $f'(z_0)$ sa nazýva uhol pootočenia dotyčnice v bode $z_0$ vzhľadom k zobrazeniu $w = f(z)$.

## Cvičenia.

1. Daná je funkcia $f(z) = \frac{iz-1}{iz^2+1+i}$. Nájdite:

   (a) definičný obor; $\left[\boldsymbol{C} \setminus \left\{\sqrt[4]{2}e^{\frac{3\pi}{8}i},\ \sqrt[4]{2}e^{\frac{11\pi}{8}i}\right\}\right]$

   (b) $f\,'$, $f\,'(i)$ $\left[f\,'(z) = \frac{z^2+2iz-1+i}{(iz^2+1+i)^2},\ f\,'(i) = -4+i\right]$

2. Zistite, či sú nasledujúce funkcie diferencovateľné, ak áno vypočítajte ich derivácie:

   (a) $f(z) = \frac{1}{z}$, $[f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \frac{1}{z}$ je analytická, $f\,'(z) = -\frac{1}{z^2}.]$

   (b) $f(z) = z^2 - 2iz$, $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = z^2 - 2iz$ je analytická, $f\,'(z) = 2z = 2i.]$

   (c) $f(z) = e^{iz}$, $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = e^{iz}$ je analytická, $f\,'(z) = ie^{iz}.]$

   (d) $f(z) = |z|$, $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = |z|$ nie je analytická, $f\,'(z) = \nexists.]$

   (e) $f(z) = \overline{z}$. $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \overline{z}$ nie je analytická, $f\,'(z) = \nexists.]$

3. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(z) = \frac{3i}{2i-z}$. $\left[D(f) = \boldsymbol{C} \setminus \{2i\} = D(f\,'),\ f\,'(z) = \frac{3i}{(2i-z)^2}\right]$

   V úlohách 4. - 9. pre funkciu $f$

   a. zistite, kde existuje derivácia,

   b. nájdite $f\,'$ v bodoch, kde existuje

   c. vyšetrite, kde je $f$ analytická (holomorfná)

4. $f(z) = x^2 + iy^2$. $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f\,'\text{existuje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z\}, \\ \text{b. } f\,'(z) = f\,'(x+iy) = 2x, \\ \text{c. nie je analytická v žiadnom bode} \end{array}\right]$

5. $f(z) = |z|$. $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f\,' \text{ neexistuje v žiadnom bode,} \\ \text{b. } f\,'(z) \nexists, \\ \text{c. nie je analytická v žiadnom bode.} \end{array}\right]$

6. $f(z) = z^3 + z$. $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f\,' \text{ existuje na } \boldsymbol{C}, \\ \text{b. } f\,'(z) = 3z^2 + 1, \\ \text{c. je analytická na } \boldsymbol{C}. \end{array}\right]$

7. $f(z) = z \operatorname{Re} z$. $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f\,' \text{ existuje len v bode } z = 0, \\ \text{b. } f\,'(0) = 0, \\ \text{c. nie je analytická v žiadnom bode} \end{array}\right]$

8. $f(z) = f(x+iy) = (2xy + 2x - 1) + i(y^2 - x^2 + 2y)$.

   $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f\,' \text{ existuje na } \boldsymbol{C}, \\ \text{b. } f\,'(z) = f\,'(x+iy) = (2y+2) - i(2x), \\ \text{c. je analytická na } \boldsymbol{C}. \end{array}\right]$

9. $f(z) = (e^x \cos y) - i(e^x \sin y)$. $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f' \text{ neexistuje v žiadnom bode,} \\ \text{b. } f'(z) \nexists, \\ \text{c. nie je analytická v žiadnom bode.} \end{array}\right]$

V úlohách 10 - 33 nájdite na $A \subset \boldsymbol{C}$ analytickú (holomorfnú) funkciu $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, ak je daná jej jedna zložka a prípadne funkčná hodnota v jednom bode:

10. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2,\ f(i) = 0$.

    $[f(z) = f(x+iy) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3 + 1)]$

11. $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy,\ f(0) = 0$.

    $\left[f(z) = f(x+iy) = (x^2 - y^2 + xy) + i\left(2xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right)\right]$

12. $v(x,y) = x^2 - y^2 - 3x + 2xy,\ u(2,1) = 0$.

    $[u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy + 3y - 2]$

13. $v(x,y) = 2e^x \sin y,\ f(0) = 1$.

    $[f(z) = f(x+iy) = (2e^x \cos y - 1) + i(2e^x \sin y)]$

14. $v(x,y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$.

    $\left[\begin{array}{c} u(x,y) = -2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - y - 2x + k, \text{ alebo} \\ u(x,y) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - y - 2x + K \end{array}\right]$

15. $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$, pričom $f(0) = 0$. $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = ze^z]$

16. $u(x,y) = 2x^2 - 2y^2 - 6xy + x - y + 3$, pričom $f(i) = i$.

    $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ (z) = (2+3i)z^2 + (1+i)z + 3 + 3i.]$

17. $v(x,y) = 2xy + 3x$. $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = z^2 + 3iz + C.]$

18. $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$, pričom $f(0) = 0$. $\left[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \frac{2-i}{2}z^2.\right]$

19. $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - 2y$. $\left[f : \boldsymbol{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \frac{1}{z} + 2iz + C.\right]$

20. $v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$, pričom $f(2) = 0$. $\left[f : \boldsymbol{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{2}.\right]$

21. $u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$, pričom $f(0) = 0$. $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ (1-2i)z^3]$

22. $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$, pričom $f(0) = 0$. $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = ze^z]$

23. $u(x,y) = x\cos x\cosh y + y\sin x\sinh y$, pričom $f(2) = 0$. $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = z\cos z]$

24. $v(x,y) = y\cos y\cosh x + x\sin y\sinh x$, pričom $f(0) = 0$. $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = z\cosh z]$

25. $v(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$. $[f : \boldsymbol{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = 2i\ln z + C.]$

26. $u(x,y) = 4xy(y^2 - x^2)$.

27. $u(x,y) = e^x \cos y$.

28. $u(x,y) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos \frac{y}{x^2+y^2}$.

29. $u(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$.

30. $u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

31. $u(x,y) = \exp\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \cos \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

32. $u(x,y) = \frac{x^3-3xy^2}{(x^2+y^2)^3}$.

33. $u(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2n}} \cos\left[\frac{1}{n} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

34. Ukážte, že $u(x,y) = xy$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu.
$\left[f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = -\frac{1}{2}(x^2-y^2) + C\right]$

35. Ukážte, že $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $\left[f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = 2xy - \frac{1}{2}(x^2-y^2) + C\right]$

36. Ukážte, že $u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $\left[f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = -2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - y^3 + C.\right]$

37. Ukážte, že $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - x$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $\left[f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 - y + C\right]$

38. Ukážte, že $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu.
$\left[f : \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + C\right]$

39. Ukážte, že $u(x,y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $\left[f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = ye^x \cos y + xe^x \sin y + C\right]$

# Integrálny počet funkcií komplexnej premennej.

## Integrál funkcie komplexnej premennej.

Formálne je integrál funkcie komplexnej premennej definovaný takým istým spôsobom ako krivkový integrál vektorovej funkcie (orientovaný krivkový integrál ).

Komplexnú funkciu reálnej premennej

$$\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$$

môžme vyjadriť v tvare

$$\varphi(t) = x(t) + iy(t),$$

kde $x,\, y : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sú reálne funkcie reálnej premennej $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ . Hovoríme, že funkcia $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je spojitá ak sú funkcie $x, y : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ spojité.

**Definition 162** *Nech $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je spojitá funkcia. Množina $C = \varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$ sa nazýva krivka v komplexnej rovine.*

- funkciu $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}, \varphi(t) = x(t) + iy(t)$ nazývame parametrizáciou (parametrickou rovnicou) krivky $C$.
- daná krivka môže mať viac (aj nekonečne mnoho) parametrizácií.
- bod $\varphi(\alpha)$ sa nazýva začiatočný bod a $\varphi(\beta)$ koncový bod krivky $C$.
- ak $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je injektívna, potom hovoríme, že krivka $C$ je jednoduchá.
- ak $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ , potom krivku $C$ nazývame uzavretá.
- ak je krivka $C$ s parametrizáciou $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *jednoduchá a uzavretá*, nazývame ju Jordanova krivka.

**Remark 163** *Jordanova veta hovorí, že jednoduchá uzavretá krivka $C$ delí komplexnú rovinu na dve súvislé množiny, ktoré sa nepretínajú: ohraničenú (vnútro krivky - $IntC$ ) a neohraničenú (vonkajšok krivky - $ExtC$ ). Dôkaz tejto vety je náročný, preto ho nebudeme uvádzať, ale vetu budeme používať.*

**Example 164** *Funkcia*
*a) $\varphi : \langle 1, 10 \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = t + it^2$, je parametrizáciou oblúka paraboly*
*$C_1 : y = x^2$, pre $x \in \langle 1, 10 \rangle$ ,*
*b) $\varphi : \langle -1, 1 \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = t - 2it$, je parametrizáciou úsečky*
*$C_2 : y = -2x, x \in \langle -1, 1 \rangle$ ,*
*c) $\varphi : \langle 0, \pi \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = \cos 2t + 2i \sin t$, je parametrizácia časti paraboly*
*$C_3 : y^2 = -2x + 2$, pre $x \in \langle -1, 1 \rangle$ .*
*Platí napríklad $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ , teda krivka $C_3$ nie je jednoduchá.* □

**Example 165** *Nech $a, b \in \boldsymbol{C}$, potom $\varphi : \langle 0, 1 \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = a + t(b - a)$ je parametrizáciou jednoduchej krivky $C$ - úsečky spájajúcej body $a$ a $b$.* □

**Example 166** *Funkcia $\varphi : \langle 0, 2\pi \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = \cos t + i \sin t$ je parametrizácia jednoduchej uzavretej krivky $C$ - jednotkovej kružnice so stredom v začiatku súradnicovej sústavy. Všimnime si, že $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ .* □

**Example 167** *Funkcia* $\varphi : \langle 0, 4\pi \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = 2\cos t + 2i \sin t$ *je tiež parametrizáciou kružnice s polomerom* 2 *so stredom v začiatku súradnicovej sústavy. Táto krivka je tiež uzavretá* $\varphi(0) = \varphi(4\pi)$, *nie je však jednoduchá, pretože napríklad*

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi\left(\frac{5\pi}{2}\right). \square$$

**Definition 168** *Ak funkcia* $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je taká, že* $\forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ *je funkcia* $\varphi'(t)$ *spojitá a* $\varphi'(t) \neq 0$, *tak krivku* $C$ *nazývame hladká krivka.*

**Delenie krivky.** Nech $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je parametrizáciou krivky $C$. Nech $Q$ je delenie intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, $Q = \{\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p = \beta\}$. Potom každému bodu $t_k \in \langle \alpha, \beta \rangle$ odpovedá bod $\varphi(t_k) = z_k \in C$. Potom $P = \{z_k;\ k = 0, 1, 2, \ldots, p\}$ je delenie krivky $C$. Funkcie $\varphi_k : \langle t_{k-1}, t_k \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}, \varphi_k(t) = \varphi(t)$, $k = 1, 2, 3, \ldots, p$ sú parametrizáciami čiastočných kriviek $C_k$ so začiatočnými bodmi $\varphi_k(t_{k-1})$ a koncovými bodmi $\varphi_k(t_k)$, $k = 1, \ldots, p$ krivky $C$.

**Definition 169** *Nech* $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je po častiach hladká funkcia. Ak existuje delenie intervalu* $\langle \alpha, \beta \rangle$ - $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p = \beta\}$ *tak, že čiastočné krivky* $C_k$ *s parametrizáciami*

$$\varphi_k : \langle t_{k-1}, t_k \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}, \varphi_k(t) = \varphi(t), \ k = 1, 2, 3, \ldots, p$$

*sú hladké funkcie, potom sa krivka* $C$ *nazýva po častiach hladká krivka.*

Nech $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = x(t) + iy(t)$ je parametrizácia hladkej krivky. Definujeme číslo $d(C)$, ktoré nazývame dĺžka krivky $C$

$$d(C) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)| \, dt,$$

ak $C$ je po častiach hladká krivka potom

$$d(C) = \sum_{k=1}^{p} d(C_k).$$

Definícia integrálu.

**Definition 170** *Nech* $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je parametrizácia hladkej krivky* $C$ *a nech* $f : A (\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je spojitá funkcia, ktorej definičný obor obsahuje* $C$ $(C \subset A)$. *Potom integrál z funkcie* $f$ *po krivke* $C$ *je definovaný*

$$\int_C f(z) \, dz = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt.$$

*Ak* $C$ *je po častiach hladká krivka a* $f : A (\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je spojitá funkcia, ktorej definičný obor obsahuje* $C$ $(C \subset A)$, *potom integrál z funkcie* $f$ *po krivke* $C$ *je definovaný*

$$\int_C f(z) \, dz = \sum_{k=1}^{p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt.$$

**Vlastnosti integrálu.**

1. Ak $c_1, c_2 \in \boldsymbol{C}$ sú ľubovoľné komplexné čísla, $C$ je po častiach hladká krivka a $f_1, f_2$ sú funkcie spojité na $C$. Potom
$$\int_C [c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)]\, dz = c_1 \int_C f_1(z)\, dz + c_2 \int_C f_2(z)\, dz.$$

2. Nech $\varphi_1 : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi_2 : \langle \beta, \gamma \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ sú parametrizácie po častiach hladkých kriviek $C_1$ a $C_2$, pričom platí $\varphi_1(\beta) = \varphi_2(\beta)$ a ak definujeme parametrizáciu
$$\varphi : \langle \alpha, \gamma \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{ak} \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle \\ \varphi_2(t) & \text{ak} \quad t \in \langle \beta, \gamma \rangle \end{cases}$$
krivky $C = C_1 + C_2$, potom ak $f$ je funkcia spojitá na $C$
$$\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz.$$

3. Nech $C$ je po častiach hladká krivka a $f$ je spojitá funkcia na $C$. Nech $d(C)$ je dĺžka krivky $C$. Potom
$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq d(C) \sup_{z \in \boldsymbol{C}} |f(z)|.$$

4. Ak $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je po častiach hladká parametrizácia krivky $C$ a funkcia $\varphi^- : \langle -\beta, -\alpha \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, taká, že $\varphi^-(t) = \varphi(-t)$, potom hovoríme, že krivka $C^-$ je opačná ku krivke $C$. Ak $f$ je spojitá na $C$. Potom
$$\int_{C^-} f(z)\, dz = -\int_C f(z)\, dz.$$

**Example 171** *Vypočítajte integrál* $\int_C (\overline{z})^2\, dz$ *ak parametrizácia krivky* $C$ *je daná:*
*a)* $\varphi : \langle 0, 1 \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = t(1+i)$,
*b)* $\varphi : \langle 0, 1 \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) = 2t & \text{ak} \quad t \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \varphi_2(t) = 1 + (2t-1)\, i & \text{ak} \quad t \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle \end{cases}$.

**Solution 172** *a) Pre krivku* $C$ $\varphi : \langle 0, 1 \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = t(1+i)$ *máme* $\varphi'(t) = 1 + i$ *odkiaľ potom dostaneme*
$$\int_C (\overline{z})^2\, dz = \int_0^1 [t(1-i)]^2 (1+i)\, dt = (1-i)^2 (1+i) \int_0^1 t^2 dt =$$
$$= 2(1-i) \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}(1-i).$$

*b) Teraz máme* $C = C_1 + C_2$, *kde* $\varphi_1 : \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_1(t) = 2t$ *a* $\varphi_1'(t) = 2$, $\varphi_2 : \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_2(t) = 1 + i(2t-1)$ *a* $\varphi_2'(t) = 2i$, *potom*
$$\int_C (\overline{z})^2\, dz = \int_{C_1} (\overline{z})^2\, dz + \int_{C_2} (\overline{z})^2\, dz = \int_0^{\frac{1}{2}} 8t^2 dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - i(2t-1))^2\, 2i dt =$$

$$= \left[8\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} + i\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-2i)(2t-1) - (2t-1)^2\, dt = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}i. \square$$

**Remark 173** *Pretože jedna krivka môže mať viac parametrizácií, napríklad:*

$$\varphi_1 : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_1(t) = t + it^2$$

*a*

$$\varphi_2 : \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_2(t) = \sin t + i\left(1 - \cos^2 t\right)$$

*sú parametrizácie tej istej krivky $C$ - časti grafu paraboly $y = x^2$, $x \in \langle 0, 1\rangle$. Prirodzená otázka je či integrál $\int_C f(z)\, dz$ nezávisí od parametrizácie (t.j. od funkcie $\varphi$). Aj pre všeobecné predpoklady odpoveď znie: integrál nezávisí od parametrizácie krivky. Keby sme chceli urobiť dôkaz, musíme sa obrátiť na časti matematiky, ktoré pojednávajú o krivkových integráloch a Greenovej funkcii.*

**Example 174** *Vypočítajte integrál $\int_C \operatorname{Im} z dz$ kde $C$ je obvod trojuholníka s vrcholmi $z_1 = 0$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = i$ od bodu $z_1$ cez $z_2$ a $z_3$ späť do bodu $z_1$.*

**Solution 175** *Máme $C = C_1 + C_2 + C_3$, kde*
$C_1 : \varphi_1 : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_1(t) = (2 + i)t$ *a* $\varphi_1'(t) = 2 + i$,
$C_2 : \varphi_2 : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_2(t) = (2 - 2t) + i$ *a* $\varphi_2'(t) = -2$,
$C_3 : \varphi_3 : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}, \varphi_3(t) = i(1 - t)$ *a* $\varphi_3'(t) = -i$, *potom*
$\int_C \operatorname{Im} z dz = \int_{C_1} \operatorname{Im} z dz + \int_{C_2} \operatorname{Im} z dz + \int_{C_3} \operatorname{Im} z dz =$
$= \int_0^1 (2 + i)\, t dt + \int_0^1 (-2)\, 1 dt + \int_0^1 (1 - t)(-i)\, dt = -1. \square$

## Cvičenia.

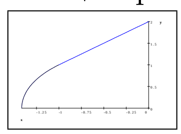
1. Načrtnite krivku $C$, ktorá je daná parametrizáciou:

   (a) $\varphi : \langle -2, 2\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = 1 + t(1+i)$,
   $\left[\text{Úsečka z bodu } -1-2i \text{ do bodu } 3+2i.\right]$

   (b) $\varphi : \langle 0, \pi\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = i + \frac{1}{2}e^{it}$,
   $\left[\text{Polkružnica so stredom v bode } i \text{ a s polomerom } \frac{1}{2} \text{ od bodu } \frac{1}{2}+i \text{ po bod } -\frac{1}{2}+i.\right]$

   (c) $\varphi : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = \begin{cases} -\sqrt{2}e^{-it} & \text{ak} \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right\rangle \\ (-1+i) + \left(t - \frac{\pi}{4}\right)(1+i) & \text{ak} \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}+1\right\rangle \end{cases}$,

   [ Štvrtina kružnice so stredom v bode 0 a polomerom $\sqrt{2}$ od bodu $-\sqrt{2}$po bod $-1+i$ a priamka od bodu $-1+i$ po bod $2i$.

   
   ]

2. Nájdite parametrizáciu nasledujúcich kriviek:

   (a) $C = \{z \in \boldsymbol{C} : |z - 1 + i| = 3\} \oplus$.
   [ $C$ je kružnica so stredom v bode $1-i$ a s polomerom 3
   $C : \varphi : \langle 0, 2\pi\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = 1 - i + 3e^{it}$. ]

   (b) $C = \left\{z \in \boldsymbol{C} : \arg z = 0 \vee \arg z = -\frac{3\pi}{4} \vee \arg z = \frac{\pi}{4}, |z| < \sqrt{2},\ \text{začiatočný bod } -1-i\right\}$.
   [ $C$ je úsečka od bodu $-1-i$ po bod $1+i$
   $C : \varphi : \langle -1, 1\rangle \longrightarrow \mathbf{C},\ \varphi(t) = (1+i)t$. ]

   (c) $C$ je kladne orientovaná hranica oblasti $\{z \in \boldsymbol{C} : |z+i| < 2, \operatorname{Re} z > 0\}, \oplus$

   [ $C$ je časť kružnice so stredom v bode $-i$, s polomerom 2 od bodu $\sqrt{2}$ po bod $-\sqrt{2}$,
   $C : \varphi : \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\rangle \longrightarrow \mathbf{C},\ \varphi(t) = -i + 2e^{it}$. ]

   (d) $C$ je kladne orientovaná krivka zložená z úsečky so začiatočným bodom 1, koncovým bodom $1+i$ a úsečka so začiatočným bodom $1+i$, koncovým bodom $i$ a štvrťkružnica $|z - 1 - i| = 1$ so začiatočným bodom $i$ a koncovým bodom 1. $\left[\begin{array}{c} C = C_1 + C_2 + C_3,\ \text{pričom} \\ C_1 : \varphi_1 : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \mathbf{C},\ \varphi_1(t) = 1 + it, \\ C_2 : \varphi_2 : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \mathbf{C},\ \varphi_2(t) = 1 + i - t, \\ C_3^- : \varphi_3 : \left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right\rangle \longrightarrow \mathbf{C},\ \varphi_3(t) = 1 + i + e^{it}. \end{array}\right]$

Vypočítajte integrály: ($\oplus$ je kladná orientácia, $\ominus$ je záporná orientácia krivky $C$.)

3. $\int_C z \sin z dz$, kde

   (a) $C$ je úsečka od bodu 0 po bod $i$. $[-ie^{-1}]$

   (b) oblúk paraboly $C : \varphi : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = t^2 - t + it$ so začiatočným bodom 0 a koncovým bodom $i$. $[i(\sinh 1 - \cosh 1).]$

4. $\int_C \operatorname{Re} z dz$, $C$ je úsečka

   (a) od bodu 0 po bod $1+i$. $\left[\frac{1}{2}+\frac{i}{2}.\right]$

   (b) od bodu $-1$ po bod $1+i$. $[0]$

   (c) polkružnica $|z|=1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$ so začiatočným bodom 1 a koncovým bodom $-1$, $\left[\frac{i\pi}{2}\right]$

   (d) kladne orientovaná kružnica $|z|=a$, $a>0$. $[ia^2\pi.]$

5. $\int_C (\overline{z})^2 \, dz$, $C: z(t) = t + i\frac{t}{3}$, $t \in \langle 0, 3\rangle$ orientovaná súhlasne s parametrickým vyjadrením. $\left[\frac{10(3-i)}{3}\right]$

6. $\int_C \frac{1}{z} dz$, $C$ je úsečka od bodu 1 po bod $1+i$. $\left[\ln\left(\sqrt{2}\right) + i\frac{\pi}{4}\right]$

7. $\int_C e^{\overline{z}} dz$, $C$ je lomená krivka, ktorá sa skladá z dvoch úsečiek: prvá so začiatočným bodom 0 a koncovým bodom $i$, druhá so začiatočným bodom $i$ a koncovým bodom $1+i$. $[1 + (e-2)(\cos 1 - i \sin 1)]$

8. $\int_C \frac{1}{z} dz$, $C: |z| = 2$, $\operatorname{Im} z \leq 0$ od bodu $-2$ po bod 2. $[i\pi]$

9. $\int_C |z| \, dz,$ kde

   (a) úsečka so začiatočným bodom 0 a koncovým bodom $2-i$, $\left[\sqrt{5} - i\frac{\sqrt{5}}{2}.\right]$

   (b) $C: |z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu $-1$ po bod 1. $[2.]$

   (c) $C: |z| = 2$, $\operatorname{Re} z \leq 0$ od bodu $-2i$ po bod $2i$. $[8i.]$

   (d) polkružnica $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ so začiatočným bodom $-1$ a koncovým bodom 1, $[2.]$

   (e) polkružnica $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \leq 0$ so začiatočným bodom $-i$ a koncovým bodom $i$, $[2i.]$

   (f) kladne orientovaná kružnica $|z| = a$, $a > 0$. $[0.]$

10. $\int_C \overline{z} \, |z| \, dz,$ kde $C: |z| = 1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$ od bodu $i$ po bod $-i$ a úsečka od bodu $-i$ po bod $i$. $[-i\pi]$

11. $\int_C \operatorname{Re} z dz,$ kde $C: |z| = 1$, $\ominus$. $[-i\pi]$

12. $\int_C z \operatorname{Im} z dz,$ kde $C: |z| = 2$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu $-2$ po bod 2. $\left[\frac{16i}{3}\right]$

13. $\int_C \frac{z}{\overline{z}} dz,$ kde $C: |z| = 2$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu 2 po bod $-2$ a úsečka od bodu $-2$ po bod $-1$ a $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu $-1$ po bod 1 a úsečka od bodu 1 po bod 2. $\left[\frac{4}{3}\right]$

14. Vypočítajte $\int_C z dz,$ kde $C$ je úsečka so začiatočným bodom 0 a koncovým bodom $3+4i$. $\left[-\frac{7}{2} + 12i.\right]$

15. Vypočítajte $\int_C \frac{1}{z} dz,$ kde $C$ je kladne orientovaná kružnica $|z| = a$, $a > 0$. $[2i\pi.]$

16. Vypočítajte $\int_C \frac{1}{1+z^2} dz,$ kde $C$ je:

(a) kladne orientovaná kružnica $|z| = 2$. [0.]

(b) kladne orientovaná elipsa $C : \varphi : \langle 0, 2\pi\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = \cos t + i\frac{\sin t}{2}$. [0.]

17. Vypočítajte $\int_C (z-a)^n \, dz$, $n \in \boldsymbol{Z}$, kde $C$ je:

(a) polkružnica $|z-a| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ so začiatočným bodom $a+R$ a koncovým bodom $a-R$, $\left[\begin{cases} \frac{R^{n+1}\left[(-1)^{n+1}-1\right]}{n+1} & \text{pre} \quad n \neq -1 \\ \pi i & \text{pre} \quad n = -1 \end{cases}\right]$

(b) kladne orientovaná kružnica $|z| = a$, $a > 0$. [0.]

(c) kladne orientovaný obvod štvorca so stredom v bode $a$ a stranami, ktoré sú rovnobežné so súradnicovými osami. $\left[\begin{cases} 0 & \text{pre} \quad n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{pre} \quad n = -1 \end{cases}.\right]$

18. Vypočítajte $\int_C e^{\overline{z}} dz$, kde $C$ je krivka zložená z dvoch úsečiek, ktorá má začiatočný bod $0$ a koncový bod $1+i$ ak spoločným bodom oboch úsečiek je:

(a) bod 1,
$$\left[\begin{array}{c} C = C_1 + C_2 \\ C_1 : \varphi_1 : \langle 0,1\rangle \longrightarrow \mathbf{C},\ \varphi_1(t) = t, \\ C_2 : \varphi_2 : \langle 0,1\rangle \longrightarrow \mathbf{C},\ \varphi_2(t) = 1 + it, \\ \int_C e^{\overline{z}} dz = \int_{C_1} e^{\overline{z}} dz + \int_{C_2} e^{\overline{z}} dz = \\ = \int_0^1 e^t dt + i \int_0^1 e^{1-it} dt = 2e - 1 - e\cos 1 + ie \sin 1 = \\ = 2e - 1 - e^{1-i}. \end{array}\right]$$

(b) bod $i$. $[1 - 2e^{-i} + e^{1-i}.]$

Cauchyho integrálna veta.
Hovoríme, že oblasť ohraničená jednou jednoduchou, spojitou, uzavretou krivkou sa nazýva jednoducho súvislá oblasť. Oblasť ohraničená dvomi jednoduchými, spojitými, uzavretými a nepretínajúcimi sa krivkami nazývame dvojnásobne súvislá oblasť, .... Hovoríme, že hranica oblasti je kladne orientovaná, ak pri pohybe po hranici v smere jej orientácie vnútro oblasti zostáva po našej ľavej ruke. Je možné dokázať nasledujúcu vetu:

**Theorem 176** *Nech $f$ je analytická funkcia v jednoducho súvislej oblasti $D$. Ak $C$ je jednoduchá, po častiach hladká uzavretá krivka v $D$, potom*

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

**Example 177** *Vypočítajte integrál*

$$\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1}dz,$$

*ak* $\varphi : \langle 0, 2\pi\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = \frac{1}{2}\cos t + i\frac{1}{2}\sin t.$

**Solution 178** *Krivka $C$ je uzavretá, hladká krivka, $C = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ |z| = \frac{1}{2}\right\}$. Nech $D = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ |z| = \frac{3}{4}\right\}$. $D$ je jednoducho súvislá a $C \subset D$. Funkcia $f(z) = \frac{2z^2-3z+4}{z+1}$ je analytická v oblasti $D$, teda $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1}dz = 0$.* $\square$

Cauchyho integrálna veta implikuje skutočnosť, že integrál z analytickej funkcie v jednoducho súvislej oblasti $D$ nezávisí od integračnej cesty. Nech $C_1$, $C_2$ sú dve jednoduché, po častiach hladké, nepretínajúce sa krivky s rovnakým začiatočným bodom $z_1$ aj rovnakým koncovým bodom $z_2$. Nech $C_1 \subset D$ a $C_2 \subset D$. Potom $C = C_1 + C_2^-$, kde $C_2^-$ má opačnú orientáciu ako $C_2$, je jednoduchá uzavretá, po častiach hladká krivka, ktorá spĺňa predpoklady vety 176, teda

$$0 = \int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2^-} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz,$$

teda

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

Tak sme dokázali tvrdenie.

**Lemma 179** *Ak je $f : D\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ analytická funkcia definovaná v jednoducho súvislej oblasti $D$, potom $\int_C f(z)\,dz$ v oblasti $D$ nezávisí od cesty.*

Ak $z_1$ je začiatočný bod a $z_2$ koncový bod krivky $C$, potom namiesto zápisu $\int_C f(z)\,dz$ môžme použiť zápis $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$.

**Remark 180** *Nech $f : D\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je analytická funkcia v jednoducho súvislej oblasti $D$ a nech $z_1, z_2 \in D$. Nech pre každé $z \in D$ platí $F'(z) = f(z)$, potom funkciu $F$ nazývame primitívnou funkciou k funkcii $f$ na $D$. Ak má analytická funkcia $f$ primitívnu funkciu $F$, potom*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz. = F(z_2) - F(z_1).$$

**Example 181** *Vypočítajte integrál*

$$\int_C z^2 dz$$

*kde*

*a) $C$ je úsečka spájajúca bod $z_1 = 0$ s bodom $z_2 = 1 + i$,*

*b) $C$ je krivka zložená z dvoch úsečiek spájajúcich body $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1+i$.*

**Solution 182** *a) Krivka $C$ sa dá parametrizovať takto $\varphi : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = t(1 + i)$. Potom $\varphi'(t) = 1 + i$, odkiaľ potom máme*

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \int_0^1 [t(1+i)]^2 (1+i)\, dt = (1+i)^3 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(-2+2i).$$

*Použitím poznámky tento výsledok dostaneme priamo: pretože je $\frac{z^3}{3}$ primitívna funkcia ku funkcii $z^2$, máme*

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{1+i} = \frac{1}{3}(-2+2i).$$

*b) Teraz máme $C = C_1 + C_2$, kde*

$$C_1 : \varphi_1 : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_1(t) = t \quad a \quad \varphi'(t) = 1,$$

$$C_2 : \varphi_2 : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_2(t) = 1 + it \ \ a\ \varphi'(t) = i,$$

*potom*

$$\int_C z^2 dz = \int_{C_1} z^2 dz + \int_{C_2} z^2 dz = \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1+it)^2\, i dt =$$

$$= \frac{1}{3} + \left[\frac{(1+it)^3}{3i}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(-2+2i).$$

*Porovnaním a) a b) vidíme, že náš integrál nezávisí od cesty. Ale tento výsledok sme očakávali, pretože funkcia $f(z) = z^2$ je analytická funkcia v celej komplexnej rovine $C$.* $\square$

Treba si uvedomiť, že funkcia $f(z) = (\overline{z})^2$ z príkladu 171 nie je analytická funkcia a preto $\int_C (\overline{z})^2\, dz$ závisí od integračnej cesty.

Cauchyho integrálna veta vo viacnásobne súvislých oblastiach.

**Theorem 183** *Nech je* $f : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je analytická funkcia a* $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ *sú jednoduché, po častiach hladké, uzavreté krivky orientované v jednom smere, ktoré spĺňajú podmienky:*

*a)* $\overline{IntC_i} \subset IntC_0$, *pre* $i = 1, 2, \ldots, n$

*b)* $\overline{IntC_i} \cap \overline{IntC_j} = \emptyset$, *pre každé* $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$

*c)* $\overline{IntC_0} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} IntC_i \subset A$. *Potom*

$$\int_{C_0} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(z)\,dz.$$

**Theorem 184** *(Veta o deformácii integračnej krivky.) Nech* $C_1$, $C_2$ *sú dve jednoduché uzavreté, po častiach hladké rovnako orientované krivky, ktoré sa nepretínajú a* $C_2 \subset IntC_1$. *Nech tieto krivky a množina bodov ležiacich medzi nimi ležia v oblasti* $D$. *Ak* $f : D\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je analytická funkcia, tak*

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

**Example 185** *Vypočítajte*

$$\int_C \frac{1}{z-a}dz,$$

*kde* $C$ *je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka komplikovaného tvaru, ktorá vo svojom vnútri obsahuje singulárny bod* $z = a$ *funkcie* $f(z) = \frac{1}{z-a}$.

**Solution 186** *Aplikujeme vetu 184 a dostaneme, že ak* $C_1$ *je krivka jednoduchého tvaru, jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná napríklad kružnica so stredom v bode* $z = a$ *a s polomerom* $R$, *krorá leží v* $IntC$, *tak dostaneme*

$$\int_C \frac{1}{z-a}dz = \int_{C_1} \frac{1}{z-a}dz.$$

*Pretože*

$$C_1 : \varphi_1 : \langle 0, 2\pi \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_1(t) = a + Re^{it},\ \varphi_1'(t) = iRe^{it},$$

*potom*

$$\int_C \frac{1}{z-a}dz = \int_{C_1} \frac{1}{z-a}dz = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{a + Re^{it} - a}dt = i[t]_0^{2\pi} = 2\pi i. \square$$

**Example 187** *Vypočítajte*

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n}dz,\ n \neq 1,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

*kde* $C$ *je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka, ktorá vo svojom vnútri obsahuje bod* $z = a$.

**Solution 188** *Aplikujeme tú istú metódu ako v predchádzajúcom príklade a dostaneme*

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n} dz = \int_{C_1} \frac{1}{(z-a)^n} dz = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{(a+Re^{it}-a)^n} dt =$$

$$= \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt = \frac{i}{R^{n-1}} \left[ \frac{e^{i(1-n)t}}{i(1-n)} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

*pričom sme použili*

$$e^{(1-n)2\pi i} = \cos((1-n)2\pi) + i \sin((1-n)2\pi) = 1,$$

*tak dostaneme*

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & \textit{pre} \quad n = 1 \\ 0 & \textit{pre} \quad n = 0, -1, \pm 2, \ldots \end{cases} . \square$$

Cauchyho integrálna formula.

**Theorem 189** *Nech $C$ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka a $f : IntC \cup C \longrightarrow \mathbf{C}$ je analytická funkcia. Potom pre každé $a \in IntC$*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Nasledujúcu vetu uvedieme bez dôkazu.

**Theorem 190** *Každá funkcia $f(z)$ analytická v uzavretej oblasti $\overline{D}$ má v tejto oblasti derivácie všetkých rádov a platí*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \; n = 1, 2, \ldots$$

*kde $C$ je uzavretá, kladne orientovaná, po častiach hladká krivka, ktorá leží so svojím vnútrom v $\overline{D}$.*

**Example 191** *Vypočítajte integrál $\int_C \frac{e^z}{z(z-i)} dz$, kde $C$ je kladne orientovaná kružnica so stredom v bode $z = i$ a s polomerom $\frac{1}{2}$.*

**Solution 192** *Pretože funkcia $f(z) = \frac{e^z}{z}$ je analytická vo vnútri kruhu $C$ a bod $z = i \in IntC$, potom*

$$\int_C \frac{e^z}{z(z-i)} dz = \int_C \frac{\frac{e^z}{z}}{z-i} dz = 2\pi i \left[ \frac{e^z}{z} \right]_{z=i} = 2\pi e^i. \square$$

**Example 193** *Vypočítajte integrál $\int_C \frac{\sin z}{(z-i)^4} dz$, kde $C$ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka obsahujúca bod $i$.*

**Solution 194** *Funkcia $\sin z$ je analytická funkcia v $\mathbf{C}$. Bod $z = i \in IntC$, potom*

$$\int_C \frac{\sin z}{(z-i)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} \left[ \frac{d^3(\sin z)}{dz^3} \right]_{z=i} = -\frac{\pi i}{3} \cos i = -\frac{\pi i}{3} \cosh 1. \square$$

## Cvičenia.

V príkladoch 1 - 5 pomocou Cauchyho integrálnej vety vypočítajte integrály po jednoduchých, po častiach hladkých, uzavretých, kladne orientovaných krivkách:

1. $\int_C \frac{1}{z^2+1} dz$, $C = \left\{ z \in \boldsymbol{C} : (\operatorname{Re} z)^2 + 4 (\operatorname{Im} z)^2 = 1 \right\}$. [0.]
2. $\int_C \frac{z+4}{z^2+2z+5} dz$, $C : |z| = 1$. [0.]
3. $\int_C \frac{z^2+5}{z^2+1} dz$, $C = \left\{ z \in \boldsymbol{C} : 4 (\operatorname{Re} z)^2 + 16 (\operatorname{Im} z)^2 = 1 \right\}$. [0.]
4. $\int_C \frac{e^z+1}{z+i} dz$, $C : |z| = \frac{1}{2}$. [0.]
5. $\int_C \frac{z+2}{z^2-2z+2} dz$, $C : |z+1| = 1$. [0.]

   V príkladoch 6 - 14 pomocou Cauchyho integrálnej vety, alebo Cauchyho integrálnej formuly vypočítajte integrály po jednoduchých, po častiach hladkých, uzavretých, kladne orientovaných krivkách:

6. $\int_C \frac{e^z \cos z}{(1+z^2) \sin z} dz$, $C : |z - 2 - i| = \sqrt{2}$. [0.]
7. $\int_C \frac{\sin z}{z+i} dz$, $C : |z - i| = 1$. [0.]
8. $\int_C \frac{1}{(z-2)(z+2i)} dz$, $C : |z| = 1$. [0.]
9. $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1} dz$, $C : |z| = \frac{1}{2}$. [0.]
10. $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1} dz$, $C : |z| = \frac{3}{2}$. [$18\pi i$.]
11. $\int_C \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz$, $C : |z - 2i| = \frac{3}{2}$. $\left[\frac{\pi}{e}.\right]$
12. $\int_C \frac{z}{z^4-1} dz$, $C : |z - a| = a$, $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 1$. $\left[i\frac{\pi}{2}.\right]$
13. $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1} dz$, $C : |z+1| = 1$. [$18\pi i$.]
14. $\int_C \frac{e^z+1}{z+i} dz$, $C : |z+i| = 2$. [$2\pi \sin 1 + 2i\pi (1 + \cos 1)$.]
15. $\int_C \frac{z^2}{(z-4)(z^2+4)} dz$, $C : |z - 1 + i| = 2$. $\left[-\frac{2\pi}{5} + i\frac{\pi}{5}.\right]$
16. $\int_C \frac{\sin z}{z^2+1} dz$, $C : |z+i| = 1$. [$i\pi \sinh 1$.]
17. $\int_C \frac{z+2}{z^2-2z+2} dz$,
    (a) $C : |z - 1 - 2i| = 2$. [$\pi (3 + i)$.]
    (b) $C : |z - 1 + 2i| = 2$. [$\pi (-3 + i)$.]
18. $\int_C \frac{1}{z^4-1} dz$, $C : |z - 1 - i| = \sqrt{2}$. $\left[\frac{\pi(-1+i)}{2}.\right]$

19. Vypočítajte $\int_C \frac{1}{z^2-i}dz,$ ak $C$ je jednoduchá, po častiach hladká, uzavretá, kladne orientovaná krivka, na ktorej neležia korene menovateľa. Vypočítajte všetky možnosti. $\left[\begin{array}{c} \text{korene menovateľa: } z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\,,\ z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\,. \\ \text{a. } z_0 \in IntC,\ z_1 \notin IntC\ \left[\frac{\pi\sqrt{2}}{2}(1+i)\,.\right] \\ \text{b. } z_0 \notin IntC,\ z_1 \in IntC\ \left[-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}(1+i)\,.\right] \\ \text{c. } z_0,\ z_1 \in IntC\ [0.] \\ \text{d. } z_0,\ z_1 \notin IntC\ [0.] \end{array}\right]$

Použitím Cauchyho integrálnej formuly vypočítajte integrály:

20. Vypočítajte $\int_C \frac{\sin z}{z}dz,$ kde $C$ je kladne orientovaná kružnica $|z| = 1.$ [0.]

21. Vypočítajte $\int_C \frac{\cos z}{z}dz,$ kde $C$ je kladne orientovaná kružnica $|z| = 1.$ $[2\pi i.]$

22. Vypočítajte $\int_C \frac{z^2}{z-2i}dz,$ kde $C$ je:
    (a) $|z| = 3,\ \oplus,$ $[-8\pi i.]$
    (b) $|z| = 1,\ \oplus.$ [0.]

23. Vypočítajte $\int_C \frac{\sin\left(\frac{\pi z}{4}\right)}{z^2-1}dz,$ kde $C$ je kladne orientovaná kružnica $|z-1| = 1.$ $\left[\frac{\pi i}{\sqrt{2}}.\right]$

24. Vypočítajte $\int_C \frac{1}{z^2+9}dz,$ kde $C$ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká kladne orientovaná krivka, pričom:
    (a) body $3i \in IntC,\ -3i \in ExtC,$ $\left[\frac{\pi}{3}.\right]$
    (b) body $-3i \in IntC,\ 3i \in ExtC,$ $\left[-\frac{\pi}{3}.\right]$
    (c) body $-3i,\ 3i \in IntC.$ [0.]

25. Vypočítajte $\int_C \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz,$ kde $C$ je kladne orientovaný obvod štvorca s vrcholmi v bodoch $1,\ 1+2i,\ -1+2i,\ -1.$ $[-\pi i\cosh 1.]$

26. Vypočítajte $\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz,$ kde $C$ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká kladne orientovaná krivka, pričom:
    (a) body $0 \in IntC,\ 1 \in ExtC,$ $[2\pi i.]$
    (b) body $1 \in IntC,\ 0 \in ExtC,$ $[-\pi ie.]$
    (c) body $0,\ 1 \in IntC.$ $[\pi i(2-e)\,.]$

## Taylorove a Laurentove rady.

### Analytickosť súčtu mocninového radu.

**Theorem 195** *Ak mocninový rad* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *má polomer konvergencie* $R > 0$*. Potom jeho súčet*

$$f : K(a,R) \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

*je analytická funkcia a platí*

$$f\,'(z) : K(a,R) \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f\,'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}.$$

**Theorem 196** *Ak má mocninový rad* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *polomer konvergencie* $R > 0$*, potom jeho súčet*

$$f : K(a,R) \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

*má derivácie všetkých rádov a platí*

$$f^{(k)} : K(a,R) \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) c_n (z-a)^{n-k}.$$

*a*

$$f^{(k)}(a) = k! c_k, \quad \text{alebo} \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

**Theorem 197** *Nech funkcionálny rad funkcií komplexnej premennej*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

*rovnomerne konverguje na* $C$*, kde* $C : \varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je jednoduchá, po častiach hladká krivka. Ak sú funkcie* $f_n(z)$*,* $n = 1, 2, 3, \dots$ *spojité na* $C$ *a ak* $f : C \longrightarrow \boldsymbol{C}$*,* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *je ich súčet, potom*

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(z)\,dz.$$

### Taylorove rady.

Z predchádzajúceho odseku vieme, že súčet mocninového radu, ktorý je konvergentný v kruhu $K(a,R)$ je analytická funkcia v tomto kruhu. Ukážeme, že platí aj obrátené tvrdenie.

**Definition 198** *Nech má funkcia komplexnej premennej* $f$ *v bode* $a \in \boldsymbol{C}$ *derivácie všetkých rádov. Potom mocninový rad*

$$f(a) + \frac{f\,'(a)}{1!}(z-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \quad ((1))$$

*nazývame Taylorovým radom funkcie* $f$ *v bode* $a$*.*

**Theorem 199** *Nech $f$ je analytická funkcia v oblasti $D$. Nech $a \in D$ a $K(a,R) \subset D$. Potom existuje mocninový rad*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

*taký, že*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad \text{pre} \quad \text{každé } z \in K(a,R),$$

*pričom*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi,$$

*kde $C$ je jednoduchá, po častiach hladká, uzavretá krivka, kladne orientovaná, ktorá leží v $K(a,R)$ tak, že $a \in IntC$.*

Veta 196 a veta 199 implikujú nasledujúcu vetu:

**Theorem 200** *Ak $f$ je analytická funkcia v oblasti $D$, potom $f$ má v každom bode z $D$ derivácie všetkých rádov. Ak $K(a,R) \subset D$, potom*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n, \text{ pre každé } \ z \in K(a,R).$$

**Example 201** *Nájdite Taylorov rozvoj funkcie $f : \boldsymbol{C} \setminus \{-1\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \ln(1+z)$ v bode $a = 0$ a jeho oblasť konvergencie.*

**Solution 202** *Funkcia $f$ je analytická funkcia v $\boldsymbol{C} \setminus \{z \in \boldsymbol{C}; \operatorname{Re} z \leq -1 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$, teda aj v bode $a = 0$ a platí*

$$f'(z) = \frac{1}{z+1},\ f''(z) = -\frac{1}{(z+1)^2}, \ldots,\ f^{(n)}(z) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(z+1)^n}$$

*odkiaľ*

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = -1, \ldots,\ f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

*Potom Taylorov rad má tvar*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

*a jednoduchou aplikáciou riešenia príkladu 96 konverguje v kruhu $K(0,1)$ a platí*

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, \quad \text{pre každé } \ z \in K(0,1). \square$$

**Example 203** *Nájdite Taylorov rozvoj funkcie $\exp : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = e^z$ v bode $a = 0$.*

**Solution 204** *Riešenie Funkcia $f$ je analytická funkcia v $\boldsymbol{C}$ a platí*

$$f^{(n)}(z) = e^z$$

*a my dostaneme rad*

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

*ktorý konverguje v kruhu $K(0, \infty) = \boldsymbol{C}$ a teda platí*

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \forall z \in \boldsymbol{C}. \square \tag{(2)}$$

Podobným spôsobom môžeme dostať Taylorove rady

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \forall z \in \boldsymbol{C}, \tag{(3)}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \ \forall z \in \boldsymbol{C}, \tag{(4)}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \ \forall \ z \in K(0,1) \ , \tag{(5)}$$

čo si čitateľ iste overí. Ak sa dá derivácia funkcie $f$ vyjadriť rekurentným vzťahom, potom pre takúto funkciu môžme nájsť Taylorov rad ihneď. Ak to nie je možné, použijeme na nájdenie Taylorovho radu danej funkcie $f$ algebrické rovnosti a Taylorove rady známych funkcií. Napríklad:

**Example 205** *Nájdite Taylorov rozvoj funkcie $f : \boldsymbol{C} \setminus \{-1\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{1}{1+z}$ v bode $a = i$.*

**Solution 206** *Máme*

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z-i+i+1} = \frac{1}{1+i} \frac{1}{1+\frac{z-i}{1+i}} = \frac{1}{1+i} \frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{1+i}\right)}.$$

*Ak budeme predpokladať, že*

$$\left| -\frac{z-i}{1+i} \right| = \left| \frac{z-i}{1+i} \right| < 1 \iff |z-i| < \sqrt{2},$$

*potom pomocou známeho Taylorovho radu (5) dostaneme*

$$f(z) = \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{z-i}{1+i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(1+i)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} (z-i)^n, \forall z \in K\left(i, \sqrt{2}\right). \square$$

**Example 207** *Nájdite Taylorov rozvoj funkcie* $f : \boldsymbol{C} \setminus \{3\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \frac{z}{(z-3)^2}$ *v bode* $a = 0$.

**Solution 208** *Máme*

$$\frac{z}{(z-3)^2} = z\,\frac{1}{(z-3)^2} = \frac{z}{9}\,\frac{1}{\left(\frac{z}{3}-1\right)^2} = \frac{z}{9}\,\frac{1}{\left(1-\frac{z}{3}\right)^2}$$

*Z Taylorovho radu (5) funkcie* $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,\ \forall\, z \in K(0,1)$, *derivovaním dostaneme:*

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^{n-1},\ \forall\, z \in K(0,1),$$

*potom ak* $\left[\left|\frac{z}{3}\right| < 1 \iff |z| < 3\right]$ *dostávame*

$$\frac{z}{9}\,\frac{1}{\left(1-\frac{z}{3}\right)^2} = \frac{z}{9}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{z}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{z^n}{3^{n+1}},\ \forall z \in K(0,3).\ \square$$

**Example 209** *Nájdite Taylorov rozvoj funkcie* $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = ze^{-z^2}$ *v bode* $a = 0$.

**Solution 210** *Funkcia* $f$ *je analytická funkcia v* $\boldsymbol{C}$ *a s použitím radu (2) platí*

$$f(z) = ze^{-z^2} = \left[\ ak\ \left|-z^2\right| < \infty \iff |z| < \infty\ \right] =$$

$$= z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-z^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,\frac{z^{2n+1}}{n!},\ \forall\, z \in \boldsymbol{C}.\ \square$$

## Cvičenia.

V úlohách 1 - 2 pomocou definície nájdite Taylorov rad funkcie $f$ so stredom v bode $a$ a vyšetrite jeho konvergenciu:

1. $f(z) = \sin^2 z$, $a = 0$.

   $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}, \text{ konverguje na } M = \boldsymbol{C}\right]$

2. $f(z) = \ln(iz + 2)$, $a = 1 + 2i$.

   $\left[i\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (z - 1 - 2i)^n, \text{ konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z - 1 - 2i| < 1\}\right]$

   V úlohách 3 - 9 vypočítajte Taylorov rad funkcie $f$ so stredom v bode $a$ a vyšetrite jeho konvergenciu:

3. $f(z) = \frac{z}{z+2}$, $a = 1$.

   $\left[\frac{1}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} (z - 1)^n, \text{ konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z - 1| < 3\}\right]$

4. $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$, $a = 0$.

   $\left[-1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n, \text{ konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z| < 1\}\right]$

5. $f(z) = \frac{z+2}{z^2+5z+4}$, $a = 1$.

   $\left[\begin{array}{c} \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(2 \cdot 5^{-n-1} + 2^{-n-1}\right)(z - 1)^n, \\ \text{konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z - 1| < 2\} \end{array}\right]$

6. $f(z) = \frac{z}{z^2+4z+3}$, $a = 2$.

   $\left[\begin{array}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \left(3 \cdot 5^{-n-1} - 3^{-n-1}\right)(z - 2)^n, \\ \text{konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z - 2| < 3\} \end{array}\right]$

7. $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z+5}$, $a = i$.

   $\left[\begin{array}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2-3i}{4}(1+i)^{-n-1} - \frac{2+3i}{4}(1-3i)^{-n-1}\right)(z - i)^n, \\ \text{konverguje na } M = \left\{z \in \boldsymbol{C} : |z - i| < \sqrt{2}\right\} \end{array}\right]$

8. $f(z) = \frac{z^2+i}{z^2+iz+2}$, $a = 1$.

   $\left[\begin{array}{c} \frac{2+i}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3}\left[\frac{(1+i)}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1+4i}{(1+2i)^{n+1}}\right](z - 1)^n, \\ \text{konverguje na } M = \left\{z \in \boldsymbol{C} : |z - 1| < \sqrt{2}\right\} \end{array}\right]$

9. $f(z) = e^{3z-2}$, $a = 1$. $\left[e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}(z - 1)^n, \text{ konverguje na } M = \boldsymbol{C}\right]$

Laurentove rady a singulárne body funkcií.

**Definition 211** *Nech* $\ldots, c_{-n}, \ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots, a$ *sú komplexné čísla. Potom rad*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \cdots + c_{-n} (z-a)^{-n} + \cdots + c_{-2} (z-a)^{-2} + c_{-1} (z-a)^{-1} + \\ + c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n (z-a)^n + \ldots \qquad ((1))$$

*nazývame Laurentov rad v bode* $a$.

Rad

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n = \cdots + c_{-n} (z-a)^{-n} + \cdots + c_{-2} (z-a)^{-2} + c_{-1} (z-a)^{-1}$$

sa nazýva hlavná časť radu (1),

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n (z-a)^n + \ldots$$

sa nazýva analytická (regulárna) časť radu (1).

**Definition 212** *Hovoríme, že Laurentov rad (1) konverguje (rovnomerne) na množine* $M \subset \boldsymbol{C}$ *ak jeho hlavná časť aj jeho analytická časť konverguje (rovnomerne) na množine* $M$. *Súčtom Laurentovho radu rozumieme súčet hlavnej a analytickej časti radu.*

**Theorem 213** *Pre každý Laurentov rad (1) existujú čísla (jediné)* $r$, $R$ $(0 \leq r \leq \infty,\ 0 \leq R \leq \infty)$ *také, že:*

*a) analytická časť radu (1) absolútne konverguje na otvorenom kruhu* $K(a,R)$, *rovnomerne konverguje na každom uzavretom kruhu* $\overline{K(a,R_1)}$, *kde* $R_1 < R$ *a diverguje na* $\boldsymbol{C} \setminus \overline{K(a,R)}$.

*b) hlavná časť radu (1) absolútne konverguje na* $\boldsymbol{C} \setminus \overline{K(a,r)}$, *rovnomerne konverguje na každej* $\boldsymbol{C} \setminus \overline{K(a,r_1)}$, *kde* $r_1 > r$ *a diverguje na* $K(a,r)$.

*c) Ak* $r < R$, *potom Laurentov rad (1) absolútne konverguje v množine* $P(a,r,R)$ *- medzikruží ohraničenom dvomi koncentrickými kružnicami s polomermi* $r$, $R$, *rovnomerne konverguje na* $\overline{P(a,r_1,R_1)}$, *kde* $r < r_1 < R_1 < R$ *a diverguje na* $\boldsymbol{C} \setminus \overline{P(a,r,R)}$.

**Theorem 214** *Nech*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

*je konvergentný na* $P(a,r,R)$. *Potom jeho súčet*

$$f: P(a,r,R) \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

*je analytická funkcia.*

**Theorem 215** *Nech $f : P(a,r,R) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je analytická funkcia. Potom existuje jediný Laurentov rad, ktorý na $P(a,r,R)$ konverguje ku funkcii $f(z)$. Koeficienty Laurentovho radu majú tvar*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{(2)}$$

*kde $C$ je ľubovoľná jednoduchá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka, ktorá leží v $P(a,r,R)$ tak, že $a \in IntC$.*

**Remark 216** *Rozvoj funkcie $f(z)$ do Laurentovho radu má jednu výhodu: $f$ môžeme rozvinúť do nekonečného radu v takom bode $z = a$, v ktorom $f$ nie je analytická (v tomto prípade rozklad funkcie do Taylorovho radu v bode $z = a$ nie je možný).*

Výpočet koeficientov Laurentovho radu použitím vzťahov (2) je nepraktický. Pri rozvoji funkcie do Laurentovho radu je výhodnejšie aplikovať znalosti Taylorových rozvojov známych funkcií.

**Example 217** *Nájdite Laurentov rad funkcie $f : \boldsymbol{C} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{1-2z}{1-z^2}$ na $P(1,0,2)$.*

**Solution 218** *Funkcia je analytická na $P(1,0,2)$ a platí*

$$f(z) = \frac{1-2z}{1-z^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{z-1+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)} \quad \left[nech\ 0 < \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n.$$

*Tak pre $0 < |z-1| < 2$ máme*

$$f(z) = \frac{1-2z}{1-z^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{2^{n+2}}(z-1)^n$$

*a hlavná časť radu vypočítaného Laurentovho radu má iba jeden člen $\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}$, ktorý „konverguje" na $\boldsymbol{C} \setminus \{1\}$. Analytická časť $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{2^{n+2}}(z-1)^n$ konverguje na $K(1,2)$. Teda (a) konverguje na $P(1,0,2)$.* $\square$

**Example 219** *Nájdite Laurentov rad funkcie $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ v bode $z = 0$.*

**Solution 220** *Funkcia je analytická na $P(0,0,\infty) = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ a platí*

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2}e^z\ [nech\ 0 < |z| < \infty] = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{n!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{n!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+2)!}$$

*a rad konverguje na $P(0,0,\infty)$.* $\square$

**Example 221** *Nájdite Laurentov rad funkcie* $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}}$ *na* $P(0, 0,\ \infty)$.

**Solution 222** *Funkcia je analytická na* $P(0, 0,\ \infty) = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ *a platí*

$$f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}} \quad \left[ nech \ \left| \frac{1}{z} \right| < \infty \implies |z| > 0 \right] =$$

$$= z^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{5-n}}{n!} = \sum_{n=-\infty}^{5} \frac{z^n}{(5-n)!}. \square$$

## Cvičenia.

V úlohách 1 - 20 nájdite Laurentov rad funkcie $f$ so stredom v bode $a$ pre medzikružie $P(a,r,R)=\{z\in \boldsymbol{C} : r<|z-a|<R\}$.

1. $f(z)=z^5e^{\frac{1}{z}},\ a=0,\ P(0,0,\infty)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{5-n}\right]$
2. $f(z)=\frac{1}{(z-2)^2},\ a=i,\ P\left(i,\sqrt{5},\infty\right)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(2-i)^n}{(z-i)^{n+2}}\right]$
3. $f(z)=\frac{1}{z(z^2+1)},\ a=0,\ P(0,0,1)$. $\left[\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n+1}\right]$
4. $f(z)=\frac{1}{z(z^2+1)},\ a=i,\ P(i,0,1)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1-2^{n+1}}{2(2i)^n}(z-i)^{n-1}\right]$
5. $f(z)=\frac{1}{z(z^2+1)},\ a=0,\ P(0,1,\infty)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-2n-3}\right]$
6. $f(z)=\frac{1}{z(1-z)},\ a=0,\ P(0,0,1)$. $\left[\sum_{n=-1}^{\infty}z^n\right]$
7. $f(z)=\frac{z+1}{z(z-1)},\ a=1,\ P(1,0,1)$. $\left[2(z-1)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n\right]$
8. $f(z)=\frac{1}{z^2+iz+2},\ a=-2i,\ P(-2i,3,\infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-1}(3i)^{-n-1}(z+2i)^{n-1}\right]$
9. $f(z)=\frac{1}{z^2-3iz-2},\ a=2i,\ P(2i,1,\infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{-n-1}i^{-n-1}(z-2i)^{n-1}\right]$
10. $f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2},\ a=1,\ P(1,0,1)$. $\left[(-1)\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n\right]$
11. $f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2},\ a=1,\ P(1,1,\infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-2}(z-1)^n\right]$
12. $f(z)=\frac{5z+11}{z^2+4z+3},\ a=-1,\ P(-1,0,2)$. $\left[3(z+1)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n}(z+1)^n\right]$
13. $f(z)=\frac{5z+11}{z^2+4z+3},\ a=-1,\ P(-1,2,\infty)$. $\left[5(z+1)^{-1}+\sum_{n=-\infty}^{-2}(-1)^{n+1}2^{-n}(z+1)^n\right]$
14. $f(z)=\frac{5z+11}{z^2+4z+3},\ a=-3,\ P(-3,0,2)$. $\left[2(z+3)^{-1}-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}(z+3)^n\right]$
15. $f(z)=\frac{5z+11}{z^2+4z+3},\ a=-3,\ P(-3,2,\infty)$. $\left[2(z+3)^{-1}+3\sum_{n=-\infty}^{0}2^{-n}(z+3)^n\right]$
16. $f(z)=\frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)},\ a=0,\ P(0,1,2)$. $\left[\left(-\frac{1}{12}\right)\sum_{n=0}^{\infty}4^{-n}z^{2n+1}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}z^{-2n-1}\right]$
17. $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)},\ a=2,\ P\left(2,0,\sqrt{5}\right)$. $\left[(z-2)^{-1}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2+i)^{n+1}-(2-i)^{n+1}}{5^{n+1}}(z-2)^n\right]$
18. $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)},\ a=0,\ P(0,1,2)$. $\left[2\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n z^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}z^n\right]$
19. $f(z)=z^2\sin\left(\frac{\pi z+1}{z}\right),\ a=0,\ P(0,0,\infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{1-n}}{(1-2n)!}z^{2n+1}-z\right]$
20. $f(z)=2^z+2^{\frac{1}{z}}-1,\ a=0,\ P(0,0,\infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{(\ln 2)^n(-n)!}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n}{n!}z^n\right]$

Izolované singulárne body.
V predchádzajúcej časti sme definovali regulárny a singulárny bod. Body, v ktorých funkcia $f(z)$ nie je analytická, sa nazývajú singulárne body alebo singularity funkcie $f(z)$.

**Definition 223** *Nech $f$ je analytická funkcia definovaná v prstencovom okolí bodu $a \in \overline{\boldsymbol{C}}$, $a \notin D(f)$. Bod $a$ nazývame izolovaný singulárny bod (singularita) funkcie $f$.*

Funkciu $f(z)$ môžme rozvinúť do Laurentovho radu v bode $z = a$ na $O_r^\circ(a)$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n .$$

**Definition 224** *Nech $z = a \in \boldsymbol{C}$ je izolovaný singulárny bod funkcie $f : O^\circ(a) \longrightarrow \boldsymbol{C}$. Potom ak*

*a) existuje konečná limita $\lim_{z \longrightarrow a} f(z)$, tento bod nazývame odstrániteľný singulárny bod;*

*b) ak $\lim_{z \longrightarrow a} f(z) = \infty$, potom bod $z = a$ nazývame pól;*

*c) ak $\lim_{z \longrightarrow a} f(z)$ neexistuje, bod $z = a$ nazývame podstatne singulárny bod.*

**Example 225** *a) Funkcia $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ má odstrániteľný singulárny bod $z = 0$, pretože*

$$\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

*b) Funkcia $f : \boldsymbol{C} \setminus \{5i\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{1}{z-5i}$ má pól v bode $z = 5i$, pretože*

$$\lim_{z \longrightarrow 5i} \frac{1}{z-5i} = \infty.$$

*c) Funkcia $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ má podstatný singulárny bod $z = 0$, pretože ak $z \in \boldsymbol{R}$ platí*

$$\lim_{z \longrightarrow 0^+} e^{\frac{1}{z}} = \infty, \ \lim_{z \longrightarrow 0^-} e^{\frac{1}{z}} = 0,$$

*teda*

$$\lim_{z \longrightarrow 0} e^{\frac{1}{z}}$$

*neexistuje.* $\square$

Ukážeme, že existuje vzťah medzi izolovanými singulárnymi bodmi funkcie $f$ a jej Laurentovým radom v týchto bodoch.

**Theorem 226** *Nech $f(z)$ je analytická v prstencovom okolí $O^\circ(a)$ bodu $z = a$. Bod $z = a$ je odstrániteľný singulárny bod funkcie $f$ vtedy a len vtedy ak jej Laurentov rad má tvar*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

*na $O^\circ(a)$.*

**Remark 227** *Ak funkciu $f$, ktorá má v bode $z = a$ odstrániteľný singulárny bod dodefinujeme podľa predchádzajúcej vety v tomto bode hodnotou $f(a) = c_0$, potom dostaneme funkciu analytickú na $O^\circ(a)$.*

**Example 228** *Ak definujeme funkciu $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ z predchádzajúceho príkladu, potom ju možno dodefinovať v bode $z = 0$ (odstrániteľnom singulárnom bode), dostaneme analytickú funkciu:*

$$f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & \text{pre} \quad z \neq 0 \\ 1 & \text{pre} \quad z = 0 \end{cases} . \square$$

**Theorem 229** *Nech $f$ je analytická funkcia definovaná na nejakom prstencovom okolí bodu $z = a$, $O^\circ(a)$. Bod $z = a$ je pól funkcie $f$ vtedy a len vtedy ak pre Laurentov rad funkcie $f$ v bode $z = a$ definovaný na $O^\circ(a)$ existuje koeficient $c_{-m} \neq 0$, $m > 0$ a pre každé $n > m$, $c_{-n} = 0$.*

**Definition 230** *Nech $f$ je analytická funkcia definovaná v prstencovom okolí bodu $a-$ $O^\circ(a)$ a má Laurentov rad tvaru*

$$f(z) = c_{-m}(z-a)^{-m} + c_{-m+1}(z-a)^{-m+1} + \cdots + c_{-1}(z-a)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

*kde $c_{-m} \neq 0$. Bod $z = a$ nazývame pólom m-tého rádu funkcie $f$.*

**Example 231** *Nájdite póly funkcie $f : \boldsymbol{C} \setminus \{1\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{z}{(z-1)^3}$.*

**Solution 232** *Pretože na $P(1, 0, \infty)$ Laurentov rad funkcie $f$ bude:*

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^3} = \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^2},$$

*tak vidíme, že bod $z = 1$ je pól tretieho rádu.* $\square$

**Theorem 233** *Nech je funkcia $f$ analytická na prstencovom okolí bodu $a$, $O^\circ(a)$. Bod $z = a$ je pól m-tého rádu funkcie $f$ vtedy a len vtedy ak*

$$\lim_{z \longrightarrow a} (z-a)^m f(z) \neq 0.$$

**Definition 234** *Nech $f(z)$ je analytická funkcia v oblasti $D$ $(f(z) \not\equiv 0)$. Nech pre bod $a \in D$ platí*

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0 \quad a \quad f^{(k)}(a) \neq 0.$$

*Potom hovoríme, že bod $z = a$ je nulový bod k-teho rádu funkcie $f(z)$. Ak $k = 1$ hovoríme, že bod $a$ je jednoduchý nulový bod funkcie $f$.*

Nech bod $z = a$ je nulový bod k-teho rádu analytickej funkcie $f(z)$, potom platí

$$c_0 = f(a) = 0, c_1 = f'(a) = 0, \ldots, c_{k-1} = \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} = 0, c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$$

a Taylorov rozvoj funkcie $f(z)$ v bode $z = a$ má tvar

$$f(z) = c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \cdots = (z-a)^k [c_k + c_{k+1}(z-a) + \ldots] = (z-a)^k \Phi(z)$$

kde $\Phi(a) \neq 0$.

**Example 235** *Nájdite nulové body funkcie* $\cos z$ *a určte ich druh.*

**Solution 236** *Ak použijeme znalosti elementárnej funkcie kosínus* - $\cos z$*, dostaneme, že jej nulové body sú*

$$z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

*Pretože*

$$\cos{}' z|_{z_k} = -\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1} \neq 0,$$

*teda každý nulový bod* $z_k$ *je jednoduchý.* □

**Theorem 237** *Nech* $z = a$ *je nulový bod m-tého rádu funkcie* $g(z)$, *t.j.* $g(z) = (z-a)^m \Phi(z)$, $\Phi(a) \neq 0$ *a* $\Phi$ *je analytická funkcia definovaná na nejakom okolí bodu* $a - O(a)$. *Potom* $z = a$ *je pól m-tého rádu funkcie* $f = \frac{h}{g}$, *kde* $h$ *je analytická funkcia definovaná na* $O(a)$ *a* $h(a) \neq 0$.

**Example 238** *Nájdite singulárne body a určte ich typ ak je funkcia daná predpisom* $f : \boldsymbol{C} \setminus \{-1, 2i\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{1}{(z-2i)^2(z+1)}$.

**Solution 239** *Pretože funkcia* $g(z) = (z-2i)^2(z+1)$ *má v bode* $z = 2i$ *dvojnásobný nulový bod a v bode* $z = -1$ *jednoduchý nulový bod, tak bod* $z = 2i$ *je pól druhého rádu a bod* $z = -1$ *je jednoduchý pól funkcie* $f$. □

Veta 226 o odstrániteľnom singulárnom bode spolu s vetou 229 o póle m-tého rádu implikujú nasledujúcu vetu:

**Theorem 240** *Bod* $z = a$ *je podstatným singulárnym bodom analytickej funkcie* $f : O^\circ(a) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *vtedy a len vtedy, ak hlavná časť jej Laurentovho radu na* $O^\circ(a)$ *má nekonečne mnoho členov.*

**Example 241** *Určte typ singulárneho bodu* $z = 0$ *pre funkciu* $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

**Solution 242** *Pretože platí:*

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!},\ \forall z \in P(0, 0, \infty),\ (|z| > 0),$$

*teda hlavná časť Laurentovho radu má nekonečne mnoho členov, čo implikuje, že bod* $z = 0$ *je podstatný singulárny bod.* □

Rezíduá.

Pojem rezídua je jedným z najdôležitejších pojmov v teórii funkcií komplexnej premennej s mnohými praktickými aplikáciami. Vieme, že ak je funkcia $f(z)$ definovaná v jednoducho súvislej oblasti $D$ analytická, potom podľa Cauchyho integrálnej vety

$$\int_C f(z)\,dz = 0,$$

pre každú jednoduchú, uzavretú, po častiach hladkú krivku ležiacu v oblasti $D$. Ak funkcia $f(z)$ má izolovaný singulárny bod $z = a \in IntC$, potom $\int_C f(z)\,dz$ vo všeobecnosti nemusí byť rovný nule. Lema 179 o nezávislosti krivkového integrálu z analytickej funkcie hovorí, že hodnota $\int_C f(z)\,dz$ nezávisí od $C$.

**Definition 243** *Nech $f : D(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je analytická s výnimkou izolovaného singulárneho bodu $z = a$. Potom hodnotu*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz,$$

*kde $C$ je jednoduchá, po častiach hladká uzavretá kladne orientovaná krivka, taká že $a \in IntC$, nazývame rezíduum funkcie $f(z)$ v bode $z = a$ a označujeme*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz. \qquad ((1))$$

Ak rozvinieme funkciu $f$ na prstencovom okolí $O^\circ(a)$ do Laurentovho radu v bode $z = a$, potom ľahko vidieť, že

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = c_{-1} \qquad ((2))$$

kde $c_{-1}$ je koeficient v Laurentovom rade funkcie $f(z)$ pri $(z-a)^{-1}$.

Výpočet rezíduí.

Aby sme mohli rezíduá používať v praktických aplikáciách, musíme vedieť ako rezíduá počítať.

**Remark 244** *Nech $z = a$ je podstatný singulárny bod funkcie $f$, potom $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = c_{-1}$ môžme určiť iba z rozvoja funkcie $f$ do Laurentovho radu v bode $z = a$ na nejakom prstencovom okolí $P(a, 0, R)$.*

**Example 245** *Nájdite rezíduum funkcie $f : \boldsymbol{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$.*

**Solution 246** *Bod $z = 0$ je podstatný singulárny bod funkcie $f$. Laurentov rad funkcie $f$ v bode $z = 0$ je*

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

*odkiaľ*

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \operatorname*{res}_{z=0} e^{-\frac{1}{z}} = c_{-1} = -1.\square$$

**Theorem 247** *Nech $z = a$ je pól m-tého rádu funkcie $f$. Potom*

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \longrightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z-a)^m f(z) \right]. \qquad ((3))$$

**Lemma 248** *Ak je bod $z = a$ jednoduchý pól funkcie $f$, potom*

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \longrightarrow a} \left[ (z-a) f(z) \right].$$

**Theorem 249** *Nech sú funkcie $g, h$ analytické v bode $z = a$. Nech $h(a) \neq 0$, $g(a) = 0$ a $g'(a) \neq 0$. Potom je bod $z = a$ jednoduchý pól funkcie $f = \frac{h}{g}$ a*

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{h(a)}{g'(a)}.$$

**Example 250** *Nájdite rezíduá funkcie $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0, 1\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{z^3+z^2+2}{z(z-1)^2}$.*

**Solution 251** *Body $z_1 = 0$ a $z_2 = 1$ sú izolované singulárne body funkcie $f(z)$. Bod $z_1 = 0$ je jednoduchý pól a bod $z_2 = 1$ je pól druhého rádu funkcie $f$, potom*

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \longrightarrow 0} \left[ z \cdot \frac{z^3 + z^2 + 2}{z(z-1)^2} \right] = 2$$

*a*

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \longrightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[ (z-1)^2 \cdot \frac{z^3 + z^2 + 2}{z(z-1)^2} \right] = 1. \square$$

**Example 252** *Nájdite rezíduum funkcie $f : \boldsymbol{C} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \boldsymbol{Z} \right\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \operatorname{tg} z$ v bode $a = \frac{\pi}{2}$.*

**Solution 253** *Riešenie Máme*

$$f(z) = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad a \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \cos'(z)|_{z=\frac{\pi}{2}} = -\sin\frac{\pi}{2} = -1,$$

*potom aplikáciou vety 249 dostaneme*

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = \operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} z = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{-\sin\frac{\pi}{2}} = -1. \square$$

Cauchyho veta o rezíduách.

**Theorem 254** *Nech $D \subset \boldsymbol{C}$ je jednoducho súvislá oblasť a $C$ uzavretá, jednoduchá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka taká, že $C \subset D$. Nech $f : D\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je analytická funkcia s výnimkou konečného počtu izolovaných singulárnych bodov. Označme $z_1, z_2, \ldots, z_n$ singulárne body ležiace vo vnútri krivky $C$. Potom*

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

**Example 255** *Vypočítajte*

$$\int_C \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}dz,$$

*kde* $C : \varphi : \langle 0, 2\pi\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = 1 + 2\cos t + i(1 + 2\sin t)$ *je kladne orientovaná.*

**Solution 256** $C$ *je kružnica so stredom v bode* $1+i$ *a s polomerom 2. Singulárne body* $z_1 = 1$ *a* $z_2 = i$ *ležia v* $IntC$*, potom*

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\longrightarrow 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\right] = \lim_{z\longrightarrow 1}\left[-\frac{2z}{(z^2+1)^2}\right] = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\longrightarrow i}\left[(z-i)\frac{1}{(z-1)^2(z+i)(z-i)}\right] = \lim_{z\longrightarrow i}\left[\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}\right] = \frac{1}{4}$$

*a*

$$\int_C \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}dz = 2\pi i\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right] = -\frac{\pi i}{2}.\square$$

**Example 257** *Vypočítajte*

$$\int_C z^2 e^{\frac{1}{z}} dz,$$

*kde* $C : |z| = 1$ *je kladne orientovaná.*

**Solution 258** $C$ *je kružnica so stredom v začiatku a s polomerom 1. Singulárny bod* $z = 0$ *je podstatný singulárny bod, pričom platí*

$$z^2 e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2-n}}{n!} \quad a \quad c_{-1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

*potom*

$$\int_C z^2 e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i\frac{1}{6} = \frac{\pi i}{3}.\square$$

Výpočet nevlastných integrálov použitím rezíduí.

**Theorem 259** *Nech je* $f : A \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} (\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *analytická funkcia a*

*a)* $A$ *je taká oblasť v komplexnej rovine* $C$*, že* $\boldsymbol{C}^+ \subset A$*, kde* $\boldsymbol{C}^+ = \{z \in \boldsymbol{C}; \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

*b)* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *sú izolované singulárne body funkcie* $f$ *také, že* $\operatorname{Im} z_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

*c) Existujú kladné reálne čísla* $M$, $\rho$, $\delta$ *tak, že* $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$ *pre každé* $z \in A$, $|z| > \rho$*. Potom nevlastný integrál*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

**Example 260** *Vypočítajte*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2}{(t^2+2t+2)^2}dt$$

**Solution 261** *Pretože* $f : \boldsymbol{C} \backslash \{z_1, z_2\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{t^2}{(t^2+2t+2)^2}$ *je analytická funkcia s izolovanými singulárnymi bodmi - pólmi druhého rádu* $z_1 = -1+i$, $z_2 = -1-i$. *Pretože*

$$\lim_{z \longrightarrow \infty} z^{1+\delta} f(z) = 0, \forall \delta > 0,$$

*potom existujú* $M$, $\rho$ *také, že*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \forall z \in \boldsymbol{C}, |z| > \delta$$

*potom*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2+2t+2)^2} dt = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \pi. \square$$

## Cvičenia.

V príkladoch 1 - 19 zistite druh izolovaných singulárnych bodov funkcie $f$ a určte rezíduum funkcie $f$ v týchto bodoch:

1. $f(z) = \frac{z^2}{z+3}$. $[z = -3$, pól 1. stupňa $res_{z=-3}[f(z)] = 9]$

2. $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+4)}$. $\left[\begin{array}{c} z = 2i, \text{ pól 1. stupňa } res_{z=2i}[f(z)] = \frac{-\sin 2 + i\cos 2}{16} \\ z = -2i, \text{ pól 1. stupňa } res_{z=-2i}[f(z)] = \frac{-\sin 2 - i\cos 2}{16} \\ z = 0, \text{ pól 2. stupňa } res_{z=0}[f(z)] = \frac{1}{4} \end{array}\right]$

3. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$. $\left[\begin{array}{c} z = i, \text{ pól 3. stupňa } res_{z=i}[f(z)] = -\frac{3i}{16} \\ z = -i, \text{ pól 3. stupňa } res_{z=-i}[f(z)] = \frac{3i}{16} \end{array}\right]$

4. $f(z) = \frac{z^3+z^2+2}{z(z^2-1)^2}$. $\left[\begin{array}{c} z = 1, \text{ pól 2. stupňa } res_{z=1}[f(z)] = -\frac{3}{4} \\ z = -1, \text{ pól 2. stupňa } res_{z=-1}[f(z)] = -\frac{5}{4} \\ z = 0, \text{ pól 1. stupňa } res_{z=0}[f(z)] = 2 \end{array}\right]$

5. $f(z) = \frac{z+3}{(z-2)^2(z+2i)}$. $\left[\begin{array}{c} z = 2, \text{ pól 2. stupňa } res_{z=2}[f(z)] = \frac{2+3i}{8} \\ z = -2i, \text{ pól 1. stupňa } res_{z=-2i}[f(z)] = \frac{-2-3i}{8} \end{array}\right]$

6. $f(z) = \frac{4+z^2-2z\sin z}{z^3}$. $[z = 0$, pól 3. stupňa $res_{z=0}[f(z)] = -1]$

7. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$. $[z = 0$, pól 1. stupňa $res_{z=0}[f(z)] = 1]$

8. $f(z) = z^3 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$. $[z = 0$, podstatne singulárny bod $res_{z=0}[f(z)] = a_{-1} = 0]$

9. $f(z) = z\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)$. $[z = -1$, podstatne singulárny bod $res_{z=-1}[f(z)] = a_{-1} = -1]$

10. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. $[z = 0$, odstrániteľný singulárny bod $res_{z=0}[f(z)] = 0]$

11. $f(z) = z^2\left(e^{\frac{1}{z}} - 2\right)$.

    $[z = 0$, podstatne singulárny bod $res_{z=0}[f(z)] = a_{-1} = \frac{1}{6}]$

12. $f(z) = z^2\cos\left(\frac{z+1}{z}\right)$.

    $[z = 0$, podstatne singulárny bod $res_{z=0}[f(z)] = a_{-1} = \frac{1}{6}\sin 1]$

13. $f(z) = \operatorname{tg} z$.

    $[z = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$, pól 1. stupňa $res_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi}[f(z)] = -1]$

14. $f(z) = \frac{z^2+1}{z-2}$. $\left[z = 2, \text{jednoduchý pól, } \operatorname{res}_{z=2}\left[\frac{z^2+1}{z-2}\right] = 5.\right]$

15. $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

    $\left[z = -i,\ z = i, \text{ póly druhého rádu, } \operatorname{res}_{z=-i}\frac{z^2}{(z^2+1)^2} = \frac{i}{4}, \operatorname{res}_{z=i}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\right] = -\frac{i}{4}.\right]$

16. $f(z) = \frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$.

    $\left[z = -1, \text{pól } n - \text{tého rádu, } \operatorname{res}_{z=-1}\left[\frac{z^{2n}}{(z+1)^n}\right] = (-1)^{n+1}\binom{2n}{n-1}.\right]$

17. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$.

$$\left[ \begin{array}{c} z = k\pi,\ 1 \neq 0,\ \sin(k\pi) = 0, \sin{}'(k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{jednoduchý pól, } \operatorname{res}_{z=k\pi} \frac{1}{\sin z} = \left[\frac{1}{(\sin z)'}\right]_{z=k\pi} = (-1)^k. \end{array} \right]$$

18. $f(z) = \sin \frac{1}{z+1}$.

$$\left[ \begin{array}{c} z = -1, \sin \frac{1}{z+1} = \left| \left| \frac{1}{z+1} \right| < \infty \Longrightarrow |z+1| > 0 \right| = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z+1}\right)^{2n+1} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \text{podstatný singulárny bod, } \operatorname{res}_{z=-1} \left[\sin \frac{1}{z+1}\right] = c_{-1} = 1. \end{array} \right]$$

19. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. $\left[z = 0, \text{podstatný singulárny bod, } \operatorname{res}_{z=0} \left[e^{\frac{1}{z}}\right] = 1.\right]$

V príkladoch 20 - 32 pomocou Cauchyho vety o rezíduách vypočítajte integrály po jednoduchých, po častiach hladkých, uzavretých

orientovaných krivkách $C$, kde $\oplus$ je kladná orientácia, $\ominus$ je záporná orientácia krivky $C$.

20. $\int_C \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)} dz$, kde $C : |z - 1 - i| = 2,\ \oplus$. $\left[-\frac{\pi i}{2}\right]$

21. $\int_C \frac{z+3}{(z-2)^2(z+2i)} dz$, kde $C : |z| = 3,\ \ominus$. $[0]$

22. $\int_C \frac{z^3+1}{z(z-1)^3} dz$, kde $C : |z| = 2,\ \oplus$. $[2\pi i]$

23. $\int_C \frac{1}{(z^2-1)^2(z-3)^2} dz$, kde $C : \varphi : \langle 0, 2\pi \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = 2\cos^3 t + 2i \sin^3 t$. $\left[\frac{3\pi i}{64}.\right]$

24. $\int_C \frac{1}{z^4+1} dz$, kde $C : \{z(t) = (1 + \cos t) + i \sin t,\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$, $\ominus$. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2} i\pi\right]$

25. $\int_C \frac{1-\cos z}{z^3} dz$, kde $C : |z| = 1,\ \oplus$. $[\pi i]$

26. $\int_C \frac{\cos z}{z^3} dz$, kde $C : |z| = 2,\ \oplus$. $[-\pi i.]$

27. $\int_C z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$, kde $C : |z| = \frac{1}{2},\ \oplus$. $\left[\frac{\pi i}{3}.\right]$

28. $\int_C z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$, kde $C : |z| = 2,\ \oplus$. $\left[\frac{\pi i}{3}.\right]$

29. $\int_C \frac{\cos z}{z} dz$, kde $C : |z| = 1,\ \ominus$. $[-2\pi i.]$

30. $\int_C z^3 \cos\left(\frac{1}{z-2}\right) dz$, kde $C : |z - 2| = 3,\ \oplus$. $\left[2\pi i \left(\frac{1}{4!} - 6\right).\right]$

31. $\int_C \sin^2\left(\frac{1}{z}\right) dz$, kde $C : |z| = 1,\ \ominus$. $[2\pi i.]$

32. $\int_C \frac{e^{-z}}{z^2} dz$, kde $C : |z| = 1,\ \oplus.$ $[-2\pi i.]$

33. $\int_C \sin^2 \frac{1}{z} dz$, kde $C : |z| = r,\ r > 0,\ \oplus$. $[0.]$

34. $\int_C (z-1)^2 \sin\left(\frac{1}{z-2}\right) dz$, kde $C : |z| = 3,\ \ominus$. $\left[-\frac{5\pi i}{3}.\right]$

35. $\int_C \cos\left(\frac{z}{z+i}\right) dz$, kde $C : |z + i| = \frac{1}{2},\ \oplus$. $[-2\pi \sin 1]$

36. $\int_C \frac{z^3 \exp\left(\frac{1}{z}\right)}{z+1} dz$, kde $C : |z| = 2,\ \oplus$. $\left[-\frac{2\pi i}{3}.\right]$

37. $\int_C \operatorname{tg} z dz$, kde $C : \left|z - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $\ominus$. $[2\pi i]$

38. $\int_C \left(\frac{1}{z^2-9} - \cos\left(\frac{z}{z-3}\right)\right) dz$, kde $C : |z-3| = 1$, $\oplus$. $\left[2\pi i\left(\frac{1}{6} + 3\sin 1\right)\right]$

V príkladoch 33 - 36 vypočítajte nevlastné integrály

39. Vypočítajte nevlastný integrál $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx$, $a > 0$. $\left[\frac{\pi}{2a}\right]$

40. Vypočítajte nevlastný integrál $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^3} dx$, $a > 0$. $\left[\frac{3\pi}{8a^5}\right]$

41. Vypočítajte nevlastný integrál $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+6x^2+13} dx$. $\left[\frac{\pi}{8}\right]$

42. Vypočítajte nevlastný integrál $\int_0^{\infty} \frac{x^6}{(x^4+a^2)^2} dx$, $a > 0$. $\left[\frac{3\sqrt{2}\pi}{16a}\right]$

## Obyčajné diferenciálne rovnice druhého rádu.
## Modelovanie v mechanických a elektrických systémoch

### Modelovanie v mechanických a elektrických systémoch, ktoré vedie na ODR 2. rádu.

Mechanické systémy, elektrické systémy a systémy riadenia môžu mať oscilatorické chovanie, t.j. po začiatočnom impulze pomaly klesajú ku nule. Proces, ktorý produkuje slabnutie je disipatívny a odčerpáva energiu zo systému, sa nazýva tlmenie.

Prototypom rovnice, ktorý popisuje tento jav, je nasledujúci úkaz z mechaniky: hmotnosť $M$ umiestnená na horizontálnej ploche (podložke) je priťahovaná strunou zanedbateľnej hodnosti ku pevnému bodu. Systém hmota - struna začne oscilovať okolo určitého bodu, keď hmotnosť vychýlime z jej rovnovážneho stavu a potom pustíme.

Ak $t$ je čas, potom zrýchlenie hmoty je $\frac{d^2x}{dt^2}$, preto sila pohybu hmoty je $M\frac{d^2x}{dt^2}$. Sily pôsobiace proti pohybu sú sily struny úmerné posunu $x$ z rovnovážneho stavu a sily trenia, ktoré sú úmerné rýchlosti $\frac{dx}{dt}$ hmotnosti $M$. Ak je konštanta úmernosti struny $p$ a konštanta trenia $k$, potom dve proti sebe pôsobiace sily sú: $k\frac{dx}{dt}$ - sila trenia a $px$ sila struny.

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt} - px$$

alebo

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = 0,\ a = \frac{k}{M},\ b = \frac{p}{M}. \tag{(1)}$$

Ak na strunu pôsobí ešte vonkajšia sila $Mf(t)$, potom rovnica prejde na tvar

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = f(t). \tag{(2)}$$

Podobná rovnica ako rovnica (1) riadi osciláciu náboja $q$ v $R - L - C$ elektrickom okruhu.

Otvorený okruh a) s platňami kondenzátora $C$ nesú začiatočný náboj $Q$ a $-Q$, zatiaľ čo v okruhu s uzavretým spínačom $S$ tento spôsobí, že prúd $i$ preteká okruhom vďaka náboju $q$ v čase $t$. Odpovedajúce úbytky napätia v smere šípky cez odpor $R$, indukciu $L$ a kapacitu $C$ sú:

$$V = iR,\ \text{kde}\quad i = \frac{dq}{dt},\ L\frac{di}{dt}\ \text{ a }\ \frac{q}{C}.$$

Aplikáciou Kirchhoffovho zákona, ktorý hovorí, že suma úbytkov napätia v okruhu je nula, dostávame: $L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0$. Elimináciou $i$ a použitím vzťahu $i = \frac{dq}{dt}$ dostaneme homogénnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu pre $q$ :

$$LC\frac{d^2q}{dt^2} + RC\frac{dq}{dt} + q = 0.$$

To je rovnica tvaru (1).

## Lineárne ODR druhého rádu s konštantnými koeficientami homogénne

Lineárne obyčajné diferenciálne rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientami druhého rádu homogénne.

Podobné rovnice, ako sme odvodili v predchádzajúcej časti pre pohyb systému hmotnosť - struna, na ktorú pôsobí trenie, alebo zmena náboja v elektrickom R-L-C okruhu. Rovica tohto typu popisuje tiež kyvadlový pohyb závažia zavesenom na žeriave, ktoré je uvedené do pohybu, keď sa žeriav pootočí do novej pozície a ihneď zastane. Pohyb závažia sa dá modelovať tak, ako je znázornené na obrázku, kde $l$ je dĺžka lana žeriavu, $m$ je hmotnosť závažia, $F$ je výsledná sila odporu vzduchu pôsobiaca proti pohybu závažia a $\Theta$ je uhlová odchýlka kábla od rovnovážnej polohy. Uhlový moment závažia okolo priamky spájajúcej bod upevnenia kábla $O$ so závažím kolmej na rovinu pohybu je $ml^2\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)$, teda miera zmeny uhlového momentu okolo $O$ je $ml^2\left(\frac{d^2\Theta}{dt^2}\right)$. Momenty pôsobia tak, že závažie je v rovnovážnej polohe udržiavané silou odporu vzduchu $F$ pôsobiacou proti pohybu závažia a krútiacim momentom gravitačnej sily $mg$ okolo bodu $O$. Ak je odpor vzduchu úmerný rýchlosti pohybu závažia a konštanta úmernosti je $\mu$ potom sila trenia je $F=\mu l$ $\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)$, teda restoring moment vynaložený silou $F$ okolo $O$ je $lF=\mu l\ ^2\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)$. Krútiaci moment vynaložený gravitačnou silou $mg$ okolo $O$ je $mgl\sin\Theta$, teda zmena miery uhlových momentov sa rovná súčtu obnovujúcich momentov a tak dostávame pohybovú rovnicu:

$$ml^2\frac{d^2\Theta}{dt^2}=-\mu l^2\frac{d\Theta}{dt}-mgl\sin\Theta.$$

Ak je uhol kyvu (pohybu) malý, potom hodnotu $\sin\Theta$ aproximujeme hodnotou $\Theta$ a pohybová rovnica sa zjednodušuje na tvar:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\Theta}{dt}+\frac{g}{l}\Theta=0.$$

Je vidieť, že lineárne diferenciálne rovnice majú široké uplatnenie v problémoch z praxe. Budeme analyzovať ich vlastnosti.

Skúmame homogénnu lineárnu obyčajnú diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientami

$$\frac{d^2y}{dx^2}+A\frac{dy}{dx}+By=0. \tag{(1)}$$

**Lineárna superpozícia riešení, lineárna závislosť a nezávislosť riešení.**

Nech $y_1(x)$ a $y_2(x)$ sú dve rôzne riešenia rovnice (1), potom ich lineárna kombinácia $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$, kde $c_1,\ c_2\in\boldsymbol{R}$ sú ľubovoľné konštanty, je tiež riešením rovnice (1).

$$\frac{d^2y}{dx^2}+A\frac{dy}{dx}+By=\frac{d^2\left[c_1y_1+c_2y_2\right]}{dx^2}+A\frac{d\left[c_1y_1+c_2y_2\right]}{dx}+B\left[c_1y_1+c_2y_2\right]=$$

$$=c_1\left[\frac{d^2y_1}{dx^2}+A\frac{dy_1}{dx}+By_1\right]+c_2\left[\frac{d^2y_2}{dx^2}+A\frac{dy_2}{dx}+By_2\right]=0$$

Teda pre ODR typu (1) platí princíp lineárnej superpozície.

**Definition 262** *Funkcie* $y_1(x)$ *a* $y_2(x)$ *sú lineárne nezávislé na intervale* $\langle a,b\rangle$, *ak pre každé* $x \in \langle a,b\rangle$ *rovnosť*

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

*platí iba v prípade* $c_1 = c_2 = 0$. *Ak funkcie* $y_1(x)$ *a* $y_2(x)$ *nie sú lineárne nezávislé, nazývame ich lineárne závislé.*

**Example 263** *Zistite, či sú funkcie lineárne nezávislé, alebo lineárne závislé na svojom definičnom obore:*
*a)* $e^x$ *a* $e^{2x}$
*a)* $\ln x^2$ *a* $\ln x^3$
*a)* $\sinh 2x$ *a* $\sinh x \cosh x$.

**Solution 264** *a) Podiel* $\frac{e^{2x}}{e^x} = e^x \neq const$, *teda funkcie sú lineárne nezávislé.*
*b) Podiel* $\frac{\ln x^3}{\ln x^2} = \frac{3\ln x}{2\ln x} = \frac{3}{2}$, *teda funkcie sú lineárne závislé a platí* $\ln x^3 = \frac{3}{2}\ln x^2$, $\forall x > 0$.
*c) Pretože* $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$, *sú funkcie lineárne závislé.* □

Ak sú funkcie $y_1(x)$, $y_2(x)$ diferencovateľné, potom určovať lineárnu nezávislosť týchto funkcií môžeme aj iným spôsobom. Podľa definície lineárnej nezávislosti dvoch funkcií rovnosť

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \quad \text{pre každé} \quad x \in \langle a,b\rangle$$

platí iba v prípade $c_1 = c_2 = 0$. Diferencujme túto rovnicu a dostaneme rovnosť

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0 \quad \text{pre každé} \quad x \in \langle a,b\rangle .$$

Potom homogénny systém rovníc má iba triviálne riešenie ak determinant $W$ rovný

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Determinant $W$ nazývame Wronského determinat, alebo wronskián podľa poľského matematika Jozefa Maria Wronského (1778-1853), ktorý prvý zaviedol túto podmienku.

**Definition 265** *Ak* $y_1(x)$ *a* $y_2(x)$ *sú lineárne nezávislé riešenia rovnice (1), a* $c_1$ *a* $c_2$ *sú ľubovoľné konštanty, potom funkciu* $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ *nazývame všeobecným riešením rovnice (1).*

**Example 266** *Ukážme, že obyčajná diferenciálna rovnica* $y'' + 4y = 0$ *má lineárne nezávislé riešenia* $y_1(x) = \cos 2x$, $y_2(x) = \sin 2x$. *Nájdime jej všeobecné riešenie.*

**Solution 267** *Dosadením do rovnice dostaneme:* $y_1'' + 4y_1 = -4\cos 2x + 4\cos 2x = 0$ *a* $y_2'' + 4y_2 = -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0$. *Teda* $y_1(x) = \cos 2x$ *a a* $y_2(x) = \sin 2x$ *sú riešenia rovnice. Riešenia sú lineárne nezávislé*

$$W = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\left[\cos^2 2x + \sin^2 2x\right] = 2 \neq 0$$

*Riešenia sú teda lineárne nezávislé. Potom* $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ *je všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice* $y'' + 4y = 0$. □

**Všeobecné riešenie rovnice $\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = 0$.**

Je zrejmé, že triviálne riešenie $y(x) \equiv 0$ je riešením diferenciálnej rovnice (1). Teraz nájdeme netriviálne všeobecné riešenie rovnice (1). Riešenie hľadajme v tvare:

$$y(x) = ce^{\lambda x}, \qquad ((2))$$

kde $c$ a $\lambda$ sú konštanty. Dosaďme (2) do rovnice (1) a dostaneme rovnicu:

$$c\left(\lambda^2 + A\lambda + B\right)e^{\lambda x} = 0.$$

Pretože hľadáme netriviálne riešenie uvedenej rovnice, musí platiť $c \neq 0$, pretože $e^{\lambda x} \neq 0$, dostaneme:

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0. \qquad ((3))$$

**Definition 268** *Rovnicu (3) nazývame charakteristickou rovnicou diferenciálnej rovnice (1).*

Kvadratická rovnica (3) má tieto tri možnosti riešení:

**I Dva reálne rôzne korene.** V tomto prípade je diskriminant kvadratickej rovnice (3) $A^2 - 4B > 0$ a jej riešením sú dva rôzne reálne korene

$$\lambda_1 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2},\ \lambda_2 = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2} \in \boldsymbol{R}.$$

Pretože $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tak $e^{\lambda_1 x}$ a $e^{\lambda_2 x}$ sú lineárne nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice (1) (Platí: $\frac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq const.$ ) Potom

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x},$$

kde $c_1$, $c_2$ sú ľubovoľné reálne konštanty, je všeobecné riešenie rovnice (1).

**II Dva komplexne združené korene.** V tomto prípade je diskriminant kvadratickej rovnice (3) $A^2 - 4B < 0$ a jej riešením sú dva komplexne združené korene

$$\lambda_1 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2},\ \lambda_2 = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2} \in \boldsymbol{C}.$$

Aj v tomto prípade sú riešenia lineárne nezávislé. Pretože hľadané všeobecné riešenie by malo byť reálne, dosiahneme to tak, že konštanty $c_1$ a $c_2$ volíme tiež komplexne združené. Ak teda $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ a $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, kde $\alpha = -\frac{A}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{4B - A^2}}{2}$, tak zodpovedajúce lineárne nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice (1) sú $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Potom

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x\right].$$

kde $c_1$, $c_2$ sú ľubovoľné reálne konštanty, je všeobecné riešenie rovnice (1).

**III Dva rovnaké reálne korene.** V tomto prípade je diskriminant kvadratickej rovnice (3) $A^2 - 4B = 0$ a jej riešením je

$$\vartheta = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{A}{2} \in \boldsymbol{R}.$$

V tomto prípade sme vypočítali iba jedno exponenciálne riešenie $y_1(x) = e^{\mu x}$. Ak položíme $y_2(x) = xe^{\mu x}$ a dosadíme do rovnice (1), dostaneme, že aj $y_2(x)$ je riešením. Potom $y_1(x)$ a $y_2(x)$ sú nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice (1) a jej všeobecné riešenie má tvar:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{\mu x}.$$

**Definition 269** *Lineárne nezávislé riešenia $y_1(x)$, $y_2(x)$ sa nazývajú báza priestoru riešení rovnice (1).*

Dosiaľ sme dostali všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (1). Teraz pre diferenciálnu rovnicu (1) sformulujeme vhodné začiatočné podmienky. Pretože (1) je lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu, sú v nej vo vzájomnom vzťahu $y(x)$, $y'(x)$ a $y''(x)$, teda vhodnou začiatočnou podmienkou bude špecifikácia $y(x)$ a $y'(x)$ v niektorom bode $x = a$. Potom hodnota $y''(a)$ nebude ľubovoľná, ale ju dostaneme z diferenciálnej rovnice (1) použitím hodnôt $y(a)$ a $y'(a)$. Riešenie rovnice (1), ktoré spĺňa začiatočné podmienky, dostaneme z všeobecného riešenia $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, keď vyriešime systém nasledujúcich rovníc (t.j. nájdeme konštanty $c_1$, $c_2$.):

Začiatočná podmienka pre $y(x)$:

$$y(a) = c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a),$$

Začiatočná podmienka pre $y'(x)$:

$$y'(a) = c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a).$$

Systém má riešenie ak je determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} \neq 0. \qquad ((4))$$

Overenie pre všetky tri predchádzajúce prípady ponechávame na čitateľa.

**Začiatočná úloha.**

**Definition 270** *Diferenciálnu rovnicu $\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = 0$, so začiatočnými podmienkami $y(a) = y_0$, $y'(a) = y_1$, kde $y_0$, $y_1 \in \boldsymbol{R}$ nazývame začiatočná uloha (ZÚ) pre rovnicu (1).*

**Example 271** *Vypočítajme riešenie ZÚ $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.*

**Solution 272** *Charakteristická rovnica je* $\lambda^2+\lambda-2=0 \Longrightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=-2$. *Je to prípad I, teda všeobecné riešenie ZÚ je dané:* $y(x)=c_1e^x+c_2e^{-2x}$. *Použitím začiatočných podmienok dostaneme sústavu:*

$$\begin{array}{ccccc} c_1 & + & c_2 & = & 1 \\ c_1 & - & 2c_2 & = & 2 \end{array},$$

*ktorej riešením je* $c_1=\frac{4}{3}$, $c_2=-\frac{1}{3}$, *teda riešenie ZÚ je* $y(x)=\frac{4}{3}e^x-\frac{1}{3}e^{-2x}$.$\square$

**Example 273** *Vypočítajme riešenie ZÚ* $y''+2y'+4y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$.

**Solution 274** *Charakteristická rovnica je* $\lambda^2+2\lambda+4=0 \Longrightarrow \lambda_1=-1+i\sqrt{3}$, $\lambda_2=-1-i\sqrt{3}$. *Je to prípad II, teda všeobecné riešenie ZÚ je dané:* $y(x)=c_1e^{-x}\cos\sqrt{3}x+c_2e^{-x}\sin\sqrt{3}x$. *Použitím začiatočných podmienok dostaneme sústavu:*

$$\begin{array}{ccccc} c_1 & & & = & 2 \\ -c_1 & + & \sqrt{3}c_2 & = & 1 \end{array},$$

*ktorej riešením je* $c_1=2$, $c_2=\sqrt{3}$, *teda riešenie ZÚ je* $y(x)=2e^{-x}\cos\sqrt{3}x+\sqrt{3}e^{-x}\sin\sqrt{3}x=e^{-x}\left[2\cos\sqrt{3}x+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x\right]$.$\square$

**Example 275** *Vypočítajme riešenie ZÚ* $y''+4y'+4y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=1$.

**Solution 276** *Charakteristická rovnica je* $\lambda^2+4\lambda+4=0 \Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=-2$. *Je to prípad III, teda všeobecné riešenie ZÚ je dané:* $y(x)=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$. *Použitím začiatočných podmienok dostaneme sústavu:*

$$\begin{array}{ccccc} c_1 & & & = & 3 \\ -2c_1 & + & c_2 & = & 1 \end{array},$$

*ktorej riešením je* $c_1=3$, $c_2=7$, *teda riešenie ZÚ je* $y(x)=3e^{-2x}+7xe^{-2x}$.$\square$

**Theorem 277** *(O existencii a jednoznačnosti riešení homogénnej rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientami) Nech diferenciálna rovnica (1) má dve lineárne nezávislé riešenia* $y_1(x)$ *a* $y_2(x)$. *Potom pre každé* $x=a$ *a čísla* $y_0$ *a* $y_1$ *existuje jediné riešenie rovnice (1), ktoré spĺňa začiatočné podmienky* $y(a)=y_0$, $y'(a)=y_1$.

Dôkaz: Existenciu sme ukázali pri analýze prípadov I, II, III a jednoznačnosť ponechávame na čitateľa. (Overiť že $\Delta\neq0$ v každom z prípadov I, II, III.).$\blacksquare$

**Okrajová úloha (dvojbodový problém).**

Iný typ problémov súvisiacich s obyčajnými diferenciálnymi rovnicami druhého rádu sa vyskytuje v prípade, keď požadujeme, aby riešenie diferenciálnej rovnice druhého rádu spĺňalo podmienky v dvoch rôznych bodoch $x=a$ a $y=b$ namiesto toho, aby sme požadovali splnenie dvoch začiatočných podmienok. Problémy tohto typu sa nazývajú dvojbodové okrajové úlohy (OÚ), pretože body $a$ a $b$ chápeme ako hranice, medzi ktorými hľadáme riešenie, ktoré musí splňat dané okrajové podmienky. Typický dvojbodový problém je úloha nájsť riešenie diferenciálnej rovnice

$$y'' + Ay' + By = 0 \text{ pre } a < x < b, \tag{(5)}$$

ktoré spĺňa okrajové podmieny v bodoch

$$\begin{aligned} x = a : \alpha y(a) + \beta y'(a) = \mu, \\ x = b : \gamma y(b) + \delta y'(b) = \kappa, \end{aligned} \tag{(6)}$$

kde $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\mu$, $\kappa$ sú dané konštanty.

**Example 278** *Riešme dvojbodovú okrajovú úlohu* $y'' + 2y' + 17y = 0$ *s okrajovými podmienkami* $y(0) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

**Solution 279** *Charakteristická rovnica je* $\lambda^2 + 2\lambda + 17 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1 + 4i$, $\lambda_2 = -1 - 4i$. *Teda všeobecné riešenie OÚ je:* $y(x) = c_1 e^{-x} \cos 4x + c_2 e^{-x} \sin 4x$. *Použitím okrajovej podmienky* $y(0) = 1$ *dostaneme* $c_1 = 1$, *z okrajovej podmienky* $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ *dostaneme* $-e^{-\frac{\pi}{4}} + 4c_2 e^{-\frac{\pi}{4}} = 0$ *t.j.* $c_2 = \frac{1}{4}$. *Teda riešenie OÚ je* $y(x) = e^{-x}\left(\cos 4x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)$ *pre* $0 < x < \frac{\pi}{4}$.□

## Lineárne ODR druhého rádu s konštantnými koeficientami nehomogénne

Nehomogénne lineárne obyčajné diferenciálne rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientami.

Nehomogénna lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami je rovnica:

$$a_0 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = f(t), \tag{(7)}$$

kde $t$ považujeme za čas a funkcia $f(t)$ je vonkajší vstup systému. Je to najjednoduchší matematický model schopný reprezentovať oscilatorické chovanie fyzikálnych systémov.

V predchádzajúcej časti sme ukázali, že jeden typ takýchto rovníc nastáva, keď popisujeme pohyb sústavy hmotnosť - struna, v ktorej sa hmotnosť pohybuje po nerovnom horizontálnom povrchu, keď proti pohybu hmotnosti pôsobí sila trenia, ktorá je úmerná rýchlosti pohybujúcej sa hmotnosti. Trenie rozptyľuje energiu, čo spôsobuje zánik pohybu ku nule s rastom času, aj keď v systéme pôsobí externý zdroj energie v tvare silovej funkcie, ktorá je v (7) reprezentovaná výrazom $f(t)$. Rozptyľovanie energie pôsobením trenia alebo podobného javu sa nazýva tlmenie. V druhom príklade R-L-C okruhu kde náboj $q$ na kondenzátore spĺňa homogénnu rovnicu (7), kde $a_0 = LC$, $a_1 = RC$ a $a_3 = 1$, tlmenie spôsobuje disipatívny člen $a_1 = RC$. Iný model, ktorý je popísaný rovnicou (7), sa realizuje v prípade, keď cylindrickú hmotnosť s momentom zotrvačnosti $I$ skrúcame okolo jej osi s odporom voči torzii, ktorý je úmerný uhlu natočenia $\Theta$ a tlmenie, úmerné s uhlovou rýchlosťou $\frac{d\Theta}{dt}$ okolo hriadeľa. Rovnica popisujúca torzné oscilácie $\Theta(t)$ ako funkciu času je

$$I \frac{d^2\Theta}{dt^2} + k \frac{d\Theta}{dt} + \mu\Theta = f(t),$$

kde $k$ a $\mu$ sú konštanty a $f(t)$ je silová funkcia.

Mnoho iných fyzikálnych situácií možno reprezentovať rovnicou podobnou so (7). Predokladsáme, že $a_0 \neq 0$ a rovnicu (7) preformulujeme do nasledujúceho tvaru:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_2y = f(x), \tag{(8)}$$

Riešiť nehomogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientami (8) znamená nájsť partikulárne riešenie $y_p(x)$ nehomogénnej rovnice (8) t.j.

$$\frac{d^2y_p(x)}{dx^2} + a_1\frac{dy_p(x)}{dx} + a_2y_p(x) = f(x),$$

a všeobecné riešenie $y_h(x)$ homogénnej diferenciálnej rovnice (8),

$$\frac{d^2y_h(x)}{dx^2} + a_1\frac{dy_h(x)}{dx} + a_2y_h(x) = 0.$$

Partikulárne riešenie $y_h(x)$ neobsahuje žiadne neurčité konštanty. Všeobecné riešenie nehomogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu (8) je potom ich súčtom: $y(x) = y_h(x) + y_P(x)$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_2y = \frac{d^2\left(y_h(x)+y_P(x)\right)}{dx^2}+a_1\frac{d\left(y_h(x)+y_P(x)\right)}{dx}+a_2\left(y_h(x)+y_P(x)\right) =$$

$$= \frac{d^2y_p(x)}{dx^2} + a_1\frac{dy_p(x)}{dx} + a_2y_p(x) + \frac{d^2y_h(x)}{dx^2} + a_1\frac{dy_h(x)}{dx} + a_2y_h(x) = f(x).$$

Ako nájsť všeobecné riešenie homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu sme vysvetlili v predchádzajúcej kapitole. Tak máme:

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

Zameriame sa na výpočet partikulárneho riešenia nehomogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu. Na jej riešenie použijeme metódu variácie konštánt. Najskôr nájdeme dve lineárne nezávislé riešenia homogénnej rovnice. Potom partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice budeme hľadať v tvare $y_p(x) = u_1(x)\,y_1(x) + u_2(x)\,y_2(x)$, kde $u_1(x)$ a $u_2(x)$ sú neznáme funkcie, ktoré musíme vypočítať. Potrebujeme dve rovnice, aby sme našli neznáme funkcie $u_1(x)$ a $u_2(x)$. Najskôr nájdeme prvú rovnicu. Zderivujeme funkciu $y_p'(x)$:

$$y_p'(x) = u_1(x)\,y_1'(x) + u_2(x)\,y_2'(x) + u_1'(x)\,y_1(x) + u_2'(x)\,y_2(x).$$

Budeme požadovať, aby

$$u_1'(x)\,y_1(x) + u_2'(x)\,y_2(x) = 0,$$

potom

$$y_p'(x) = u_1(x)\,y_1'(x) + u_2(x)\,y_2'(x).$$

Zderivujeme funkciu $y_p'(x)$ ešte raz: $y_p''(x) = u_1(x)\,y_1''(x) + u_2(x)\,y_2''(x) + u_1'(x)\,y_1'(x) + u_2'(x)\,y_2'(x)$ a dosadíme do rovnice (8). Dostaneme:

$$u_1(x)\,y_1''(x)+u_2(x)\,y_2''(x)+u_1'(x)\,y_1'(x)+u_2'(x)\,y_2'(x)+a_1\left(u_1(x)\,y_1'(x)+u_2(x)\,y_2'(x)\right)+$$

$$+a_2\left(u_1(x)\,y_1(x)+u_2(x)\,y_2(x)\right)=f(x),$$

rovnicu preformulujeme do tvaru:

$$u_1(x)\underbrace{\left[y_1''(x)+a_1y_1'(x)+a_2y_1(x)\right]}_{=0}+u_2(x)\underbrace{\left[y_2''(x)+a_1y_2'(x)+a_2y_2(x)\right]}_{=0}+$$

$$+u_1'(x)\,y_1'(x)+u_2'(x)\,y_2'(x)=f(x),$$

Pretože $y_1(x)\,,\ y_2(x)$ sú riešenia homogénnej úlohy, dostaneme druhú rovnicu:

$$u_1'(x)\,y_1'(x)+u_2'(x)\,y_2'(x)=f(x).$$

Tak hľadáme riešenie sústavy:

$$\begin{array}{ccccc} u_1'(x)\,y_1(x) & + & u_2'(x)\,y_2(x) & = & 0 \\ u_1'(x)\,y_1'(x) & + & u_2'(x)\,y_2'(x) & = & f(x) \end{array}.$$

Pretože wronskián

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=y_1(x)\,y_2'(x)-y_1'(x)\,y_2(x)\neq 0.$$

Potom

$$u_1'(x)=-\frac{y_2(x)\,f(x)}{W(x)} \quad \text{a} \quad u_2'(x)=\frac{y_1(x)\,f(x)}{W(x)},$$

odkiaľ

$$u_1(x)=-\int\frac{y_2(x)\,f(x)}{W(x)}dx \quad \text{a} \quad u_2(x)=\int\frac{y_1(x)\,f(x)}{W(x)}dx.$$

Potom dostaneme

$$y_p(x)=-y_1(x)\int\frac{y_2(x)\,f(x)}{W(x)}dx+y_2(x)\int\frac{y_1(x)\,f(x)}{W(x)}dx. \qquad ((9))$$

**Example 280** *Nájdite všeobecné riešenie obyčajnej diferenciálnej rovnice* $y''+2y'+y=xe^{-x}$.

**Solution 281** *Charakteristická rovnica je* $\lambda^2+2\lambda+1=0 \Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=-1$, *teda všeobecné riešenie homogénnej rovnice je dané:* $y_h(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$. *Báza riešení homogénnej úlohy (dve lineárne nezávislé riešenia) sú:* $y_1(x)=e^{-x}$, $y_2(x)=xe^{-x}$. *Potom wronskián je daný vzťahom:*

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=e^{-x}\left(e^{-x}-xe^{-x}\right)+e^{-x}xe^{-x}=e^{-2x}.$$

*Dosadením do vzťahu (9) dostaneme:*

$$y_p(x)=-y_1(x)\int\frac{y_2(x)\,f(x)}{W(x)}dx+y_2(x)\int\frac{y_1(x)\,f(x)}{W(x)}dx=$$

$$= -e^{-x}\int \frac{xe^{-x}xe^{-x}}{e^{-2x}}dx + xe^{-x}\int \frac{e^{-x}xe^{-x}}{e^{-2x}} =$$

$$= -e^{-x}\int x^2dx + xe^{-x}\int xdx = \frac{1}{6}x^3e^{-x}.$$

*Potom hľadané všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice bude:* $y_h(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{1}{6}x^3e^{-x}$.□

## Cvičenia.

1. Zistite, či sú nasledujúce dvojice funkcií lineárne nezávislé, alebo lineárne závislé:

   (a) $\sinh^2 x,\ \cosh^2 x,$ pre každé $x \in \boldsymbol{R}$,

   (b) $\cos x,\ \sin x,$ pre každé $x \in \boldsymbol{R}$,

   (c) $1 + x,\ 1 + x^2,$ pre každé $x \in \boldsymbol{R}$,

   (d) $e^{2x},\ xe^{2x},$ pre každé $x \in \boldsymbol{R}$,

   (e) $\sin x,\ \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle,$

   (f) $\sin x,\ |\sin x|,\ x \in \langle \pi, 2\pi \rangle,$

   (g) $x\,|x|,\ x^2,\ x \geq 0.$

2. Vypočítajte všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice:

   (a) $y'' + 3y' - 4y = 0.$ $\left[y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x}\right]$

   (b) $y'' - 2y' + 2y = 0.$ $\left[y(x) = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)\right]$

   (c) $y'' + 6y' + 9y = 0.$ $\left[y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}\right]$

3. Vyriešte začiatočné úlohy:

   (a) $y'' + 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$ $\left[y(x) = 5e^{-2x} - 4e^{-3x}\right]$

   (b) $y'' + 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 1.$ $\left[y(x) = e^{-x}(3\cos x + 4\sin x)\right]$

   (c) $y'' - 3y' - 4y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2.$ $\left[y(x) = -\frac{6}{5}e^{-x} + \frac{1}{5}e^{4x}\right]$ :

4. Vypočítajte všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice:

   (a) $y'' + 2y' - 3y = 4 + x + 4e^{2x}.$
   $\left[y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{3}x + \frac{4}{5}e^{2x} - \frac{14}{9}\right]$

   (b) $y'' + 4y' + 4y = 2 - \sin 3x.$
   $\left[y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{12}{169}\cos 3x + \frac{5}{169}\sin 3x + \frac{1}{2}\right]$

   (c) $y'' + 2y' - 8y = 3x\cos 4x.$
   $\left[y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x} + \frac{3}{200}\cos 4x + \frac{57}{1600}\sin 4x - \frac{9}{80}x\cos 4x + \frac{3}{80}x\sin 4x\right]$

5. Vyriešte začiatočné úlohy:

   (a) $y'' + 2y' + 5y = 2\sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
   $$\left[\begin{array}{c} \text{Všeobecné riešenie D.R. : } y(x) = \frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x + C_1(\cos 2x)e^{-x} + C_2(\sin 2x)e^{-x} \\ \text{Riešenie ZÚ: } y(x) = \frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x + \frac{6}{5}(\cos 2x)e^{-x} + \frac{2}{5}(\sin 2x)e^{-x} \end{array}\right]$$

   (b) $y'' + 2y' + y = \sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
   $$\left[\begin{array}{c} \text{Všeobecné riešenie D.R. : } y(x) = C_1 e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + C_2 x e^{-x} \\ \text{Riešenie ZÚ: } y(x) = \frac{3}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}xe^{-x} - \frac{1}{2}\cos x \end{array}\right]$$

   (c) $y'' + 3y' + 2y = \sin 3x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
   $$\left[\begin{array}{c} \text{Všeobecné riešenie D.R. : } y(x) = C_1 e^{-x} - \frac{7}{130}\sin 3x - \frac{9}{130}\cos 3x + C_2 e^{-2x} \\ \text{Riešenie ZÚ: } y(x) = \frac{3}{10}e^{-x} + \frac{3}{13}e^{-2x} - \frac{7}{130}\sin 3x - \frac{9}{130}\cos 3x \end{array}\right]$$

## Laplaceova transformácia.

Operačný počet sa stal jednou z dôležitých častí matematickej analýzy, považuje sa za abecedu automatizácie. Metódy operačného počtu sa používajú pri riešení obyčajných diferenciálnych rovníc a systémov obyčajných diferenciálnych rovníc. Možno ich však použiť aj pri riešení parciálnych diferenciálnych rovníc.

Základom tzv. operačného počtu je buď Carsonova transformácia, ktorá zobrazí funkciu $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(t)$ na funkciu komplexnej premennej $K(p)$ pomocou formuly

$$K(p) = p \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt \tag{(1)}$$

alebo integrálna Laplaceova transformácia, ktorá zobrazí funkciu $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(t)$ na funkciu komplexnej premennej $p$ - $F(p)$ pomocou formuly

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[f(t)] = F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt \tag{(2)}$$

kde $t$ je reálna premenná a $p = \alpha + i\beta$ je komplexná premenná.

Komplexná alebo reálna funkcia reálneho argumentu $f(t)$ sa nazýva originál a jej obraz, funkcia komplexnej premennej $F(p)$, sa na nazýva Laplaceovým zobrazením (transformáciou) funkcie $f(t)$.

Zo vzťahov (1) a (2) je vidieť, že medzi Carsonovou a Laplaceovou transformáciou platí vzťah

$$pF(p) = K(p).$$

Preto sa budeme zaoberať Laplaceovou transformáciou. Na označenie toho, že $F(p)$ je Laplaceovou transformáciou $f(t)$, budeme používať zápis $F(p) = \boldsymbol{\mathcal{L}}[f(t)]$. Pre každý z týchto symbolických zápisov budeme malými písmenami označovať originály, veľkými písmenami ich Laplaceove obrazy. Laplaceova transformácia je charakteristická tým, že mnohým operáciám s originálmi $f(t)$ zodpovedajú omnoho jednoduchšie operácie s ich obrazmi. Najskôr definujeme, čo rozumieme pod pojmom (Laplaceov ) originál.

**Definition 282** *Funkciu $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ nazývame (Laplaceovým) originálom ak*

1. *funkcia $f(t)$ je po častiach spojitá,*
2. *$f(t) = 0$ pre $t < 0$,*
3. *existuje $M > 0$ reálne a $\alpha \in \boldsymbol{R}$ také, že platí odhad*

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \forall t \in \boldsymbol{R} \tag{(3)}$$

*Množinu všetkých originálov označíme symbolom $\mathcal{A}$.*

Ak je funkcia $f$ originál, tak hodnotu

$$\alpha_0 = \inf \left\{ \alpha \in \boldsymbol{R}; |f(t)| \leq M_\alpha e^{\alpha t}, \forall\, t \in \boldsymbol{R} \right\}$$

nazývame indexom rastu funkcie $f$. Originál $f$ má index rastu $\alpha = -\infty$, ak pre každé $\alpha \in \boldsymbol{R}$ existuje konštanta $M_\alpha$ s vlastnosťou

$$|f(t)| \leq M_\alpha e^{\alpha t}, \forall t \in \boldsymbol{R}.$$

**Example 283** *Funkcia* $\eta : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *definovaná predpisom*

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & ak \quad t < 0 \\ 1 & ak \quad t \geq 0 \end{cases},$$

*nazývaná Heavisideova funkcia (funkcia jednotkového skoku) je originál s indexom rastu* $\alpha_0 = 0$, *pretože*

$$|\eta(t)| \leq 1e^{\alpha t},\ \forall \alpha > 0,\ \forall t \in \boldsymbol{R}.$$

Ak ľubovoľnú funkciu $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ vynásobíme Heavisideovou funkciou $\eta$, tak dostaneme funkciu rovnú nule na zápornej časti reálnej osi.

**Example 284** *Ak* $n \in \boldsymbol{N}$, *tak funkcia* $f(t) = \eta(t)\, t^n$ *je originál s indexom rastu* $\alpha_0 = 0$. *Vyplýva to zo vzťahu*

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{\alpha t}} = 0,\ \forall\, \alpha > 0 \Longrightarrow |\eta(t)\, t^n| \leq \varepsilon e^{\alpha t},\ \forall t \geq T \Longrightarrow |\eta(t)\, t^n| \leq M e^{\alpha t},\ \forall t \in \boldsymbol{R}.$$

**Example 285** *Funkcia* $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}, f(t) = \eta(t)\, \frac{1}{t-2}$ *nie je originálom, pretože v bode* $t = 2$ *nemá konečnú limitu ani sprava, ani zľava, teda nie je splnená vlastnosť (3) originálu.*

**Example 286** *Funkcia* $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(t) = \eta(t)\, e^{t^3}$ *nie je originál, pretože*

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{e^{t^3}}{e^{\alpha t}} = \infty\,,\ \forall \alpha \in \boldsymbol{R},$$

*čo implikuje, že nie je splnená vlastnosť (3) originálu.*

Teraz ukážeme, že podmienka (3) zabezpečuje absolútnu konvergenciu integrálu (2), keď $\operatorname{Re} p > \alpha_0$.

**Theorem 287** *Pre každý originál* $f(t)$ *je zobrazenie* $F(p)$ *definované vzťahom (2) v polrovine* $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, *kde* $\alpha_0$ *je index rastu funkcie* $f(t)$, *analytickou funkciou, pričom*

$$F\,'(p) = -\int_0^\infty t f(t)\, e^{-pt} dt,\ \operatorname{Re} p > \alpha_0 \ \ a \ \lim_{\operatorname{Re} p \longrightarrow \infty} F(p) = 0.$$

**Example 288** *Nájdite obraz Heavisideovej funkcie.*

**Solution 289** *V príklade 283 sme ukázali, že funkcia* $\eta$ *je originál s indexom rastu* $\alpha_0 = 0$. *Teda Laplaceov obraz bude existovať pre* $\operatorname{Re} p > 0$ *a máme*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[\eta(t)] = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \left[ -\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^\infty = \frac{1}{p}.\ \square$$

Vlastnosti Laplaceovej transformácie.

**Theorem 290** *(Lineárnosť Laplaceovej transformácie) Nech* $f(t), g(t)$ *sú originály,* $\mathcal{L}[f] = F$ *a* $\mathcal{L}[g] = G$, *potom pre každé* $\lambda, \vartheta \in \mathbf{C}$ *platí*

$$\mathcal{L}[\lambda f(t) + \vartheta g(t)] = \lambda F(p) + \vartheta G(p).$$

**Theorem 291** *(O derivácii obrazu) Nech* $f$ *je originál s indexom rastu* $\alpha_0$, $F = \mathcal{L}(f)$ *a* $n \in \mathbf{N}$. *Potom aj funkcia* $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$, $g(t) = t^n f(t)$ *je originál s indexom rastu* $\alpha_0$ *a*

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(p), \ \mathrm{Re}\, p > \alpha_0.$$

**Example 292** *Nájdite obraz funkcie* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(t) = \eta(t)\, t^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

**Solution 293** *Podľa predchádzajúcej vety o derivácii obrazu sú funkcie* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(t) = \eta(t)\, t^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *originály s indexom rastu* $\alpha_0 = 0$, *pričom*

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}, \ \mathrm{Re}\, p > 0. \square$$

**Theorem 294** *(O posunutí v obraze) Nech* $f$ *je originál s indexom rastu* $\alpha_0$, $a \in \mathbf{C}$ *a* $\mathcal{L}(f) = F$. *Potom funkcia*

$$g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}, \ g(t) = e^{at} f(t)$$

*je originál s indexom rastu* $\alpha_0 + \mathrm{Re}\, a$, *pričom*

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(p-a), \ \mathrm{Re}\, p > \alpha_0 + \mathrm{Re}\, a.$$

**Example 295** *Nájdite obraz funkcií* $f, h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$, $f(t) = e^{at}$, $h(t) = t^n e^{at}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

**Solution 296** *Podľa vety o posunutí v obraze máme*

$$\mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \frac{1}{p-a}, \ \mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, a.$$

$$\mathcal{L}\left[t^n e^{at}\right] = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}, \ \mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, a. \square$$

**Example 297** *Nájdite obraz funkcií* $\cos t, \sin t$.

**Solution 298** *Platí*

$$\mathcal{L}[\cos t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}\right) = \frac{p}{p^2+1}, \ \mathrm{Re}\, p > 0.$$

$$\mathcal{L}[\sin t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right] = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i}\right) = \frac{1}{p^2+1}, \ \mathrm{Re}\, p > 0. \square$$

**Theorem 299** *(Veta o zmene mierky) Nech* $f$ *je originál s indexom rastu* $\alpha_0$, $b \in \boldsymbol{R}^+$ *a* $\boldsymbol{\mathcal{L}}[f] = F$. *Potom*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[f(bt)] = \frac{1}{b} F\left(\frac{p}{b}\right), \operatorname{Re}\left(\frac{p}{b}\right) > \alpha_0.$$

**Example 300** *Nájdite obraz funkcií* $\cos(\omega t), \sin(\omega t)$, $\omega > 0$.

**Solution 301** *Platí*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[\cos(\omega t)] = \frac{1}{\omega} \frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \operatorname{Re} p > 0.$$

*podobne*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \operatorname{Re} p > 0. \square$$

Posun v originále.
Ak $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je originál s indexom rastu $\alpha_0$ a $\tau \in \boldsymbol{R}$ definujeme funkciu $f_\tau : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ vzťahom $f_\tau(t) = \eta(t-\tau) f(t-\tau)$.

**Theorem 302** *(Veta o posune v originále) Nech* $f$ *je originál s indexom rastu* $\alpha_0$, $\tau \in \boldsymbol{R}$ *a* $\boldsymbol{\mathcal{L}}[f] = F$. *Potom aj posunutá funkcia* $f_\tau$, $\tau > 0$ *je originál s indexom rastu* $\alpha_0$ *a platí*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[\eta(t-\tau) f(t-\tau)] = e^{-\tau p} F(p), \operatorname{Re} p > \alpha_0.$$

Pomocou vety o obraze posunutej funkcie môžme dostať obrazy funkcií, ktoré sa často používajú v elektrotechnike ako sú napríklad konečné impulzy.

**Example 303** *Nájdite obraz obdĺžnikového impulzu - funkcie* $f$, *ktorá má tvar*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ak & t < 0 \\ M & ak & 0 \leq t < a \\ 0 & ak & t > a \end{cases}.$$

**Solution 304** *Funkciu* $f$ *možno vyjadriť v tvare*

$$f(t) = M[\eta(t-a) - \eta(t-b)], t \in \boldsymbol{R}.$$

*Potom*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[f(t)] = \frac{M}{p}\left(e^{-ap} - e^{-bp}\right), \operatorname{Re} p > 0. \square$$

**Example 305** *Nájdite obraz lichobežníkového impulzu - funkcie* $f$, *ktorá má tvar*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ak & t < a \\ M\frac{t-a}{b-a} & ak & a \leq t < b \\ M & ak & b \leq t < c \\ M\frac{d-t}{d-c} & ak & c \leq t < d \\ 0 & ak & d \leq t \end{cases}.$$

**Solution 306** *Funkciu $f$ možno vyjadriť v tvare*

$$f(t) = \frac{M}{b-a}(t-a)\left[\eta(t-a) - \eta(t-b)\right] + M\left[\eta(t-b) - \eta(t-c)\right] +$$

$$+\frac{M}{d-c}(d-t)\left[\eta(t-c) - \eta(t-d)\right],$$

*čo prepíšeme do takého tvaru, aby bolo možné použiť vetu o posune v origináli:*

$$f(t) = \frac{M}{b-a}\left[(t-a)\eta(t-a) - (t-b)\eta(t-b) + (a-b)\eta(t-b)\right] +$$

$$+M\left[\eta(t-b) - \eta(t-c)\right] +$$

$$+\frac{M}{d-c}\left[-(t-c)\eta(t-c) + (d-c)\eta(t-c) + (t-d)\eta(t-d)\right].$$

*Potom*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\left[f(t)\right] = F(p) = \frac{M}{p^2}\left(\frac{e^{-ap} - e^{-bp}}{b-a} + \frac{e^{-dp} - e^{-cp}}{d-c}\right), \operatorname{Re} p > 0. \square$$

**Example 307** *Nájdite obraz sínusového impulzu - funkcie $f$, ktorá má tvar*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ak \quad t < 0 \\ \sin t & ak \quad 0 \le t < \pi \\ 0 & ak \quad \pi \le t \end{cases}.$$

**Solution 308** *Funkciu $f$ možno vyjadriť v tvare*

$$f(t) = \eta(t)\sin t + \eta(t-\pi)\sin(t-\pi).$$

*Potom*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\left[f(t)\right] = F(p) = \left(1 + e^{-\pi p}\right)\frac{1}{p^2+1}, \operatorname{Re} p > 0. \square$$

Obraz periodickej funkcie.

**Theorem 309** *(Veta o obraze periodickej funkcie) Ak $f_1 : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je nenulová po častiach periodická funkcia s periodou $T$, tak funkcia $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(t) = \eta(t) f_1(t)$ je originál s indexom rastu $\alpha_0 = 0$ a platí vzťah*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\left[f(t)\right] = \frac{\int_0^T f(t)\, e^{-pt} dt}{1 - e^{-pT}} = \frac{F_T(p)}{1 - e^{-pT}}, \operatorname{Re} p > 0,$$

*kde $F_T$ je obraz konečného impulzu $f_{\langle 0,T\rangle} : f_{\langle 0,T\rangle}(t) = \begin{cases} 0 & ak \quad t < 0 \\ f(t) & ak \quad 0 \le t < T \\ 0 & ak \quad T \le t \end{cases}$.*

**Example 310** *Nájdite obraz funkcie $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(t) = \eta(t)\left|\sin t\right|$.*

**Solution 311** *Funkcia* $f_1 : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f_1(t) = |\sin t|$ *má periodu* $T = \pi$. *Použitím predchádzajúcej vety pre* $\mathcal{L}[f] = F$ *máme*

$$F(p) = \frac{F_\pi(p)}{1 - e^{-\pi p}},\ \operatorname{Re} p > 0,$$

*kde* $F_\pi$ *je obraz funkcie* $f_{\langle 0,\pi\rangle}$ *danej predpisom:*

$$f_{\langle 0,T\rangle}(t) = \begin{cases} 0 & ak \quad t < 0 \\ \sin t & ak \quad 0 \le t < \pi \\ 0 & ak \quad \pi \le t \end{cases}.$$

*V predchádzajúcom* **??** *sme našli obraz* $F_\pi$ *v tvare:*

$$F_\pi(p) = \left(1 + e^{-\pi p}\right)\frac{1}{p^2+1},\ \operatorname{Re} p > 0,$$

*potom*

$$\mathcal{L}[|\sin t|] = \frac{1 + e^{-\pi p}}{(p^2+1)(1 - e^{-\pi p})},\ \operatorname{Re} p > 0. \square$$

**Example 312** *Nájdite obraz pílovitej funkcie* $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ak \quad t < 0 \\ a(t - kT) & ak \quad kT \le t < (k+1)T,\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}.$$

**Solution 313** *Pretože:*

$$f_{\langle 0,T\rangle}(t) = \begin{cases} 0 & ak \quad t < 0 \\ at & ak \quad 0 \le t < T \\ 0 & ak \quad T \le t \end{cases}.$$

*máme*

$$f_{\langle 0,T\rangle}(t) = [\eta(t) - \eta(t-T)]\, at = at\eta(t) - a(t-T)\eta(t-T) - aT\eta(t-T)$$

*a*

$$\mathcal{L}\left[f_{\langle 0,T\rangle}\right] = F_T(p) = a\left[\frac{1}{p^2}(1 - e^{-pT}) - \frac{T}{p}e^{-pT}\right]$$

*potom*

$$F(p) = \frac{F_T(p)}{1 - e^{-pT}} = \frac{a}{p}\left(\frac{1}{p} + \frac{Te^{-pT}}{e^{-pT} - 1}\right),\ \operatorname{Re} p > 0. \square$$

**Theorem 314** *(Laplaceov obraz radu) Nech* $f(t) \in \mathcal{A}$ *, nech platí:*

*1)* $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n,\ \forall t \ge 0,$

*2) Rad* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{p^{n+1}}$ *konverguje v nejakom okolí nekonečna. Potom pre Laplaceov obraz* $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ *platí*

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\tfrac{n!}{p^{n+1}}.$$

**Example 315** *Nájdime LT* $f(t)=\frac{\sin t}{t}$.

**Solution 316** *Máme* $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$. *Keď skúmame konvergenciu radu* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{(2n+1)!p^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)p^{2n+1}}$, *tento rad konverguje pre* $|p|>1$. *Potom* $F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)p^{2n+1}}$,*pre* $\operatorname{Re}p>1.\square$

**Theorem 317** *(Veta o obraze derivácie) Ak* $f:\langle 0,\infty)\longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je* $k$*-krát spojite diferencovateľná na* $\langle 0,\infty)$ *a jej derivácia rádu* $k-1$ *je po častiach spojite diferencovateľná, pričom funkcie* $f,f\,',f\,'',\ldots,f^{(k-1)},f^{(k)}$ *sú originály s indexom rastu* $\alpha_0$, *potom ak* $F(p)=L[f(t)]$, *platí*

$$\mathcal{L}\left[f^{(k)}(t)\right]=p^kF(p)-p^{k-1}f(0+)-p^{k-2}f\,'(0+)-\cdots-f^{(k-1)}(0+).$$

**Theorem 318** *(O integrovaní originálu) Ak* $f:\langle 0,\infty)\longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je originál s indexom rastu* $\alpha_0$ *a* $g:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{C}$, $g(t)=\int_0^t f(s)\,ds$, *potom ak* $F(p)=\mathcal{L}[f(t)]$, *platí*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(s)\,ds\right]=\frac{F(p)}{p},\ \operatorname{Re}p>\alpha_0>0.$$

**Definition 319** *Nech* $f,g:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R}$ *sú po častiach spojité funkcie. Funkciu*

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(s)\,g(t-s)\,ds,\ t\in\boldsymbol{R}$$

*nazývame konvolúciou funkcií* $f,g$.

Pre konvolučný súčin platí

$$f*g=g*f,\ \ f*(g*h)=(f*g)*h,\ \ f*(g+h)=f*g+f*h$$

**Theorem 320** *Nech* $f,g$ *sú originály s indexami rastu* $\alpha_0,\beta_0$. *Potom* $f*g$ *je originál s indexom rastu* $\gamma_0=\max\{\alpha_0,\beta_0\}$ *a platí*

$$\mathcal{L}[(f*g)(p)]=\mathcal{L}[f](p)\,\mathcal{L}[g](p),\ \operatorname{Re}p>\max\{\alpha_0,\beta_0\}.$$

**Example 321** *Nech* $f,g:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{C}$, $f(t)=e^t\cos 2t$, $g(t)=e^t\sin 2t$. *Nájdite* $(f*g)(t)$ *a jej Laplaceov obraz.*

**Solution 322** *Pretože* $(f*g)(t)=\int_0^t f(s)\,g(t-s)\,ds$, *dostávame*

$$(f*g)(t)=\int_0^t e^s\cos 2s\cdot e^{t-s}\sin 2(t-s)\,ds=e^t\int_0^t\sin 2(t-s)\cos 2s ds=$$

$$= \frac{1}{2}e^t \int_0^t [\sin 2(t-2s) + \sin 2t]\, ds = \frac{1}{2}e^t t \sin 2t.$$

*a pre Laplaceov obraz dostávame*

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}e^t t \sin 2t\right] = \mathcal{L}\left[e^t \cos 2t\right] \mathcal{L}\left[e^t \sin 2t\right] =$$

$$= \frac{p-1}{(p-1)^2 + 2^2}\,\frac{2}{(p-1)^2 + 2^2} = \frac{2(p-1)}{\left[(p-1)^2 + 4\right]^2}. \square$$

## Inverzná Laplaceova transformácia.

Medzi Fourierovou a Laplaceovou transformáciou je úzka súvislosť. Z teórie Fourierovho integrálu je známe, že ak $f \in M$, potom v ľubovoľnom bode, v ktorom je funkcia $f(t)$ spojitá, môžme ju vyjadriť v tvare

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx\right] d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega,$$

kde $F = \mathbf{F}(f)$ a ak je bod $t = t_0$ bod nespojitosti s konečnými limitami sprava a zľava, potom

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx\right] d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega,$$

Podmienka absolútnej integrovateľnosti funkcie $f(t)$ na intervale $(-\infty, \infty)$, t.j. existencie integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ je veľmi silná, preto trieda funkcií, ktoré sa dajú vyjadriť Fourierovým integrálom nie je široká. Aj také jednoduché funkcie ako napríklad $f(t) = const$ alebo $f(t) = \eta(t)$ nespĺňajú túto podmienku.

Ak miesto funkcie $f(t)$ uvažujeme funkciu $f(t)\, e^{-i\alpha t}$, pričom predpokladáme, že $f(t) = 0$ pre $t < 0$, potom pre $\alpha > \alpha_0$, kde $\alpha_0$ je index rastu funkcie $f(t)$ bude integrál $\int_0^{\infty} |f(t)\, e^{-\alpha t} dt|$ konvergovať pre širokú triedu funkcií a platí

$$e^{-\alpha t} f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau\right) e^{i\omega t} d\omega.$$

Výrazy, ktoré sme dostali možno zapísať aj inak. Ak položíme $p = \alpha + i\omega$ a $d\omega = \frac{dp}{i}$, tak dostaneme:

Platí vzťah (my ho nebudeme dokazovať, pretože plynie z vlastností Fourierovho integrálu)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty}\left(\int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau\right) e^{pt} dp,$$

odkiaľ pretože

$$L[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau$$

je Laplaceova transformácia, tak inverzná Laplaceova transformácia bude

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} F(p)\, e^{pt} dp.$$

Celý tento postup teraz sformulujeme ako vetu:

**Theorem 323** *Ak je funkcia $f(t)$ originál a $F(p)$ jej Laplaceov obraz, potom v ľubovoľnom bode platí*

$$\frac{f(t+)+f(t-)}{2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(p)\,e^{pt}dp.$$

Vetu uvádzame bez dôkazu. Možno ju nájsť v každej lepšej knihe o funkciách komplexnej premennej. Vzťah pre inverznú Laplaceovu transformáciu z predchádzajúcej vety sa používa pri hľadaní Laplaceovej transformácie iba zriedkavo. V praxi je dôležité vedieť, či sa originál zo známeho Laplaceovho obrazu dá dostať jediným spôsobom. Z predchádzajúcej vety plynie tvrdenie:

Ak je funkcia $F(p)$ Laplaceovým obrazom originálov $f_1(t)$ a $f_2(t)$, potom sa tieto originály rovnajú vo všetkých bodoch spojitosti. Bez dôkazu uvedieme podmienky pre to, aby funkcia $F(p)$ bola Laplaceovým obrazom funkcie $f(t)$:

1. $F(p)$ je analytická funkcia na polrovine $\operatorname{Re} p=\alpha>\alpha_0$, kde $\alpha_0$ je reálna časť singulárneho bodu funkcie $F(p)$, ktorý leží čo najviac vpravo.

2. $\lim_{p\longrightarrow\infty}F(p)=0$

3. Funkcia $F(p)$ je absolútne integrovateľná podľa každej priamky, ktorá leží v polrovine $\operatorname{Re} p=\alpha>\alpha_0$, rovnobežnej s imaginárnou osou t.j.

$$\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left|F(p)\,e^{pt}\right|dp=A<\infty.$$

Originály možno nájsť aj pomocou rezíduí, čo tvrdí nasledujúca veta:

**Theorem 324** *Nech $F:\boldsymbol{C}\setminus\{p_1,\ldots,p_n\}\longrightarrow\boldsymbol{C}$ je analytická funkcia a $p_1,\ldots,p_n$ sú izolované singulárne body funkcie $F$ s vlastnosťami:*

*a)* $\operatorname{Re} p_k<\alpha_0$, $k=1,\ldots,n$

*b)* $\lim_{p\longrightarrow\infty}F(p)=0$

*c) $F$ je Laplaceov obraz originálu s indexom rastu $\alpha_0$ s vlastnosťou*

$$f(t)=\frac{f(t+)+f(t-)}{2},\ t\in\boldsymbol{R}.$$

*Potom*

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{p_k}\left[F(p)\,e^{pt}\right],\ \ \textit{pre každé}\ \ t>0.$$

**Example 325** *Nájdite originál $f$, ktorého Laplaceov obraz $f$ má tvar*

$$F(p)=\frac{1}{p^2(p+1)},\ p\in\boldsymbol{C}\setminus\{-1,0\}.$$

**Solution 326** *Sú splnené všetky predpoklady vety o hľadaní originálu pomocou rezíduí. Izolované body sú body $-1$, $0$, teda originál existuje a má tvar*

$$f(t)=\operatorname*{res}_{z=-1}\left[F(p)\,e^{pt}\right]+\operatorname*{res}_{z=0}\left[F(p)\,e^{pt}\right]=\lim_{p\longrightarrow-1}\frac{e^{pt}}{p^2}+\lim_{p\longrightarrow0}\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{e^{pt}}{p+1}\right]=e^{-t}+t-1,\ t>0.$$

*Tak*

$$f(t)=\eta(t)\left(e^{-t}+t-1\right),\ t\in\boldsymbol{R}.\square$$

**Example 327** *Nájdite originál $f$, ktorého Laplaceov obraz $f$ má tvar*

$$F\left(p\right)=e^{-2p}\frac{p}{\left(p-1\right)\left(p^{2}+1\right)},\ p\in\boldsymbol{C}\backslash\left\{1,i,-i\right\}.$$

**Solution 328** *V tomto príklade nemôžeme použiť vetu o hľadaní originálu pomocou rezíduí, pretože predpoklad b) nie je splnený. Podľa vety??? je funkcia* $f\left(t\right)=\eta\left(t-2\right)g\left(t-2\right),$ *pre* $t\in\boldsymbol{R}$, *kde* $g\left(t\right)$ *je originál k funkcii* $G\left(p\right),$ *ktorú definujeme vzťahom*

$$G\left(p\right)=\frac{p}{\left(p-1\right)\left(p^{2}+1\right)},\ p\in\boldsymbol{C}\backslash\left\{1,i,-i\right\}.$$

*Funkcia $G$ spĺňa už všetky predpoklady predchádzajúcej vety, teda originál existuje a má tvar*

$$g\left(t\right)=\operatorname*{res}_{z=1}\left[G\left(p\right)e^{pt}\right]+\operatorname*{res}_{z=i}\left[G\left(p\right)e^{pt}\right]+\operatorname*{res}_{z=-i}\left[G\left(p\right)e^{pt}\right]=\frac{1}{2}\left(e^{t}-\cos t+\sin t\right),$$

*pre* $t>0$. *Tak*

$$f\left(t\right)=\frac{1}{2}\eta\left(t-2\right)\left(e^{t-2}-\cos\left(t-2\right)+\sin\left(t-2\right)\right),\ t\in\boldsymbol{R}.\square$$

**Theorem 329** *(Veta o rozklade) Nech $F(p)$ je analytická funkcia v okolí nekonečna s Laurentovým radom* $F(p)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{p^n}$. *Potom je $F(p)$ Laplaceovým obrazom funkcie* $f(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\frac{(n-1)!}{}t^{n-1}$.

**Example 330** *Nech* $F(p)=\frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}$. *Nájdite originál.*

**Solution 331** $F(p)=\frac{1}{p}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{1}{n!p^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{1}{n!p^{n+1}}$. *Potom* $f(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{1}{n!}\frac{t^n}{n!}.\square$

## Cvičenia.

V úlohách 1 - 17 nájdite Laplaceov obraz funkcie $f$, ak $f$ je originálom

1. $f(t) = 2e^{3t} + e^{it} + 6t^3 - 7t + 5.$
   $\left[F(p) = \frac{2}{p-3} + \frac{1}{p-i} + \frac{6\cdot 3!}{p^4} - \frac{7}{p^2} + \frac{5}{p}\right]$
2. $f(t) = \sin(5t) + 2\cos(3t) - \sinh t + \cosh(2t).$
   $\left[F(p) = \frac{5}{p^2+25} + \frac{2p}{p^2+9} - \frac{1}{p^2-1} + \frac{p}{p^2-4}\right]$
3. $f(t) = \sin^2(at),\ a \in \boldsymbol{R}.$ $\left[F(p) = \frac{2a^2}{p(p^2+4a^2)}\right]$
4. $f(t) = \sin(at)\cdot\cos(at),\ a \in \boldsymbol{R}.$ $\left[F(p) = \frac{a}{p^2+4a^2}\right]$
5. $f(t) = \sin(at)\cdot\cos(bt),\ a,\ b \in \boldsymbol{R},\ a \neq b.$
   $\left[F(p) = \frac{a\left(p^2+a^2-b^2\right)}{\left[p^2+(a+b)^2\right]\cdot\left[p^2+(a-b)^2\right]}\right]$
6. $f(t) = a^t + \sin(\omega t + \varphi).$
   $\left[F(p) = \frac{1}{p-\ln a} + \frac{\omega}{(p^2+\omega^2)}\cos\varphi + \frac{p}{p^2+\omega^2}\sin\varphi\right]$
7. $f(t) = \sinh(3t).$ $\left[F(p) = \frac{3}{p^2-9}\right]$
8. $f(t) = e^{(1+i)t}\cdot\sinh(3t).$ $\left[F(p) = \frac{3}{[p-(1+i)]^2-9}\right]$
9. $f(t) = a^t,\ a > 0.$ $\left[F(p) = \frac{1}{p-\ln a}\right]$
10. $f(t) = ta^t,\ a > 0.$ $\left[F(p) = \frac{1}{(p-\ln a)^2}\right]$
11. $f(t) = e^{2t}\cdot\cos(3t)\cdot\cos(4t).$
    $\left[F(p) = \frac{1}{2}\frac{p-2}{(p-2)^2+7^2} + \frac{1}{2}\frac{p-2}{(p-2)^2+1}\right]$
12. $f(t) = e^{-t} + e^t\cdot\sin(2t).$ $\left[F(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{2}{(p-1)^2+2^2}\right]$
13. $f(t) = t^2\cos(3t).$ $\left[F(p) = \frac{2p^3-54p}{(p^2+9)^3}\right]$
14. $f(t) = t^2 + 2t + 3 + te^{-5t}.$ $\left[F(p) = \frac{2+2p+3p^2}{p^3} + \frac{1}{(p+5)^2}\right]$
15. $f(t) = t\left(\cos(2t) + e^{-t}\cdot\sin(2t)\right).$
    $\left[F(p) = \frac{p^2-4}{(p^2+4)^2} + \frac{4(p+1)}{\left[(p+1)^2+4\right]^2}\right]$
16. $f(t) = t^2\left(e^{-3t} + \sin(2t)\right).$ $\left[F(p) = \frac{2}{(p+3)^3} + \frac{12p^2-16}{(p^2+4)^3}\right]$

17. $f(t) = \int_0^t \sin(\omega\tau)\, d\tau$. $\left[F(p) = \frac{\omega}{p(p^2+\omega^2)}\right]$

V úlohách 18 - 20 použitím vety o posune v originále nájdite Laplaceov obraz funkcie $f$ :

18. $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < b \\ e^{at} & t \geq b \end{cases}$. $\left[\frac{e^{-(p-a)b}}{p-a}\right]$

19. (a) $f(t) = \eta(t)(t-2)^2$. $\left[\frac{2!}{p^3} - \frac{4}{p^2} + \frac{4}{p}\right]$

(b) $f(t) = \eta(t-2)(t-2)^2$. $\left[e^{-2p}\frac{2!}{p^3}\right]$

(c) $f(t) = \eta(t-2)\, t^2$. $\left[e^{-2p}\frac{2!}{p^3} + e^{-2p}\frac{4}{p^2} + e^{-2p}\frac{4}{p}\right]$

20. $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin t & t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 1 & t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$. $\left[\frac{p+e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^3+p}\right]$

V úlohách 21 - 22 nájdite Laplaceove obrazy konečných impulzov

21. $f(t) = \begin{cases} 0 & t \notin \langle 1, 4) \\ t-1 & t \in \langle 1, 2) \\ -\frac{t}{2}+2 & t \in \langle 2, 4) \end{cases}$. $\left[\left(e^{-p} - \frac{3e^{-2p}}{2} + \frac{e^{-4p}}{2}\right)\frac{1}{p^2}\right]$

22. $f(t) = \begin{cases} 0 & t \notin \langle 1, 5) \\ t-1 & t \in \langle 1, 2) \\ 1 & t \in \langle 2, 4) \\ 5-t & t \in \langle 4, 5) \end{cases}$. $\left[\left(e^{-p} - e^{-2p} - e^{-4p} + e^{-5p}\right)\frac{1}{p^2}\right]$

V úlohách 23 - 24 nájdite Laplaceov obraz periodickej funkcie

23. $f(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle 2k\pi, (2k+1)\pi) \\ -1 & t \in \langle (2k+1)\pi, (2k+2)\pi) \end{cases}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. $\left[\frac{1-e^{-p\pi}}{p(1+e^{-p\pi})}\right]$

24. $f(t) = |\sin(\omega t)|$, $\omega \in \boldsymbol{R}^+$. $\left[\frac{\omega\left(1+e^{-\frac{p\pi}{\omega}}\right)}{(p^2+\omega^2)\left(1-e^{-\frac{P\pi}{\omega}}\right)}\right]$

V úlohách 25 - 27 nájdite konvolučný súčin funkcií $f$, $g$ :

25. $f(t) = t$, $g(t) = \cos t$. $[1 - \cos t]$

26. $f(t) = t^2$, $g(t) = t^3$. $\left[\frac{t^6}{60}\right]$

27. $f(t) = e^{at}$, $g(t) = 1 - at$. $[t]$

V úlohách 28 - 36 nájdite originál k funkcii $F$ :

28. $F(p) = \frac{p^2+1}{p^3-p^2-2p}$. $\left[f(t) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{2t}\right]$

29. $F(p) = \frac{p^2-4p-3}{(p-1)^2(p+2)}$. $\left[f(t) = -2te^t + e^{-2t}\right]$

30. $F(p) = \frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$. $\left[f(t) = e^t - e^{-t}\cos(2t) + \frac{3}{2}e^{-t}\sin(2t)\right]$

31. $F(p) = \frac{-2p^3+2p+5}{5(p^2+2p+2)(p+1)(p-1)}$. $\left[f(t) = \frac{1}{5}e^{-t}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{10}e^t\right]$

32. $F(p) = \frac{e^{-\pi p}}{p^2+5p+6}$.

$\left[f(t) = \eta(t-\pi)\, e^{-2(t-\pi)} - \eta(t-\pi)\, e^{-3(t-\pi)}\right]$

33. $F(p) = \frac{1-e^{-p}-pe^{-p}}{p^2(1-e^{-p})}$.

$$\left[f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t-k & t \in \langle k, k+1), \ k = 0, 1, \dots \end{cases}\right]$$

34. $F(p) = \frac{1}{p(1+e^{-ap})}$, $a \in \boldsymbol{R}^+$.

$$\left[f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \in \langle 2ka, (2k+1)\,a) \\ 0 & t \in \langle (2k+1)\,a, (2k+2)\,a), \ k = 0, 1, \dots \end{cases}\right]$$

35. $F(p) = \frac{1}{p^3-2p^2+9p-18}$.

$\left[f(t) = \frac{1}{39}\left(-2\sin(3t) - 3\cos(3t) + 3e^{2t}\right)\right]$

36. $F(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p(p^2+1)}\left(1 + e^{-\pi p}\right)$.

$$\left[f(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle 0, \pi) \\ 2 - \cos(t-\pi) & t > \pi \end{cases}\right]$$

## Aplikácie Laplaceovej transformácie

### Riešenie lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami.

Ak $a_k \in \boldsymbol{C}$, $k = 0, 1, \ldots, n$; $a_n \neq 0$, $b_k \in \boldsymbol{C}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ sú dané komplexné konštanty a $f : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je po častiach spojitá funkcia, môžme sformulovať začiatočnú úlohu - ZÚ ako problém nájsť riešenie obyčajnej diferenciálnej rovnice

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t) \tag{(1)}$$

pre $t > 0$, ktoré bude spĺňať podmienky

$$x(0+) = b_0, x'(0+) = b_1, \ldots, x^{(n-1)}(0+) = b_{n-1} \tag{(2)}$$

Z teórie obyčajných diferenciálnych rovníc vieme, že ZÚ (1), (2) má jediné riešenie. Túto úlohu možno riešiť aj pomocou Laplaceovej transformácie, ak budeme predpokladať, že funkcia $f(t)$ je originál. Potom aj riešenie - funkcia $x : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, ktorú rozšírime nulou pre $t < 0$ so svojimi deriváciami do rádu $n$ sú originály. Toto plynie z faktu, že

$$x^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{n} \left[ b_k + \int_0^t \frac{W_k(\tau)}{W(\tau)} d\tau \right] \varphi_k(t), \; j = 0, 1, \ldots, n-1$$

kde $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ je báza vektorového priestoru riešení rovnice (1) s nulovou pravou stranou:

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$$

a

$$W(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

$$W_k(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & 0 & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & 0 & \ldots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \ldots & f(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

pričom stĺpec pravých strán sa nachádza v k-tom stĺpci. Funkcie $\varphi_k$, $k = 1, \ldots, n$ sú originály, pretože majú tvar $\varphi(t) = t^\alpha e^{\beta t}$, kde $\alpha, \beta$ sú vhodné konštanty. Riešenie $x$ spolu s deriváciami do rádu $(n-1)$ dostaneme z funkcií $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, f$ použitím operácií, ktoré zachovávajú exponenciálny rast, to znamená že funkcie $x, x', \ldots, x^{(n-1)}$ sú originály. Funkcia $x^{(n)}$ je tiež originál, pretože sa dá vyjadriť z rovnice (1) v tvare

$$x^{(n)}(t) = a_n^{-1} \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t) \right], \; t \geq 0.$$

Potom aplikáciou Laplaceovej transformácie na úlohu (1) s využitím podmienok (2) dostaneme

$$a_n \left[ p^n X(p) - p^{n-1} b_0 - p^{n-2} b_1 - \cdots - p b_{n-2} - b_{n-1} \right] +$$

$$+a_{n-1}\left[p^{n-1}X(p)-p^{n-2}b_0-p^{n-3}b_1-\cdots-pb_{n-3}-b_{n-2}\right]+$$
$$+\cdots+$$
$$+a_1\left[pX(p)-b_0\right]+a_0X(p)=F(p)$$

kde $F(p)=\mathcal{L}[f(t)]$ a $X(p)=\mathcal{L}[x(t)]$ . Riešením tejto algebrickej rovnice dostaneme

$$X(p)=\frac{F(p)}{Q_n(p)}+\frac{P_{n-1}(p)}{Q_n(p)}.$$

V poslednom výraze je $Q_n(p)$ charakteristický polynóm rovnice (1) n-tého stupňa a $P_{n-1}(p)$ je polynóm najviac $(n-1)$ stupňa. Použitím vety o konvolúcii dostaneme originál v tvare

$$x(t)=\int_0^t f(s)\,g(t-s)\,ds+h(t)\,,\ t\geq 0,$$

kde

$$\mathcal{L}[g]=\frac{1}{Q_n},\ \mathcal{L}[h]=\frac{P_{n-1}}{Q_n}.$$

**Example 332** *Riešte začiatočnú úlohu:*

$$x''-2x'+5x=e^t\cos 2t,\ x(0+)=C_1,\ x'(0+)=C_2.$$

**Solution 333** *Použitím vzťahu* $X(p)=\mathcal{L}[x(t)]$ *dostaneme* $\mathcal{L}[x'(t)]=pX(p)-C_1$, $\mathcal{L}[x''(t)]=p^2X(p)-pC_1-C_2$. $\mathcal{L}[e^t\cos 2t]=\frac{p-1}{(p-1)^2+4}$. *Aplikáciou Laplaceovej transformácie na rovnicu dostaneme:*

$$p^2X(p)-pC_1-C_2-2[pX(p)-C_1]+5X(p)=\frac{p-1}{(p-1)^2+4},$$

*odkiaľ*

$$X(p)\left[p^2-2p+5\right]=\frac{p-1}{(p-1)^2+4}+pC_1+C_2-2C_1.$$

*čo dáva*

$$X(p)=\frac{p-1}{\left[(p-1)^2+4\right]^2}+C_1\frac{p}{(p-1)^2+4}+(C_2-2C_1)\frac{1}{(p-1)^2+4}.$$

*Aplikáciou vety o inverznej transformácii alebo vety o konvolúcii dostaneme:*

$$\mathcal{L}\left[\left(\frac{1}{4}te^t\sin 2t\right)\right]=\frac{p-1}{\left[(p-1)^2+4\right]^2}$$

*a*

$$\mathcal{L}\left[\left(e^t\cos 2t\right)\right]=\frac{p-1}{(p-1)^2+4},\ \mathcal{L}\left[\left(\frac{1}{2}e^t\sin 2t\right)\right]=\frac{1}{(p-1)^2+4},$$

*čo implikuje, že*

$$x(t)=\frac{1}{4}te^t\sin 2t+C_1e^t\cos 2t+(C_2-2C_1)\frac{1}{2}e^t\sin 2t.\ \square$$

Laplaceovu transformáciu môžme použiť pri riešení obyčajných diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami, ktorých pravá strana má tvar posunutej funkcie alebo tvar konečného impulzu. Uvažujme teda začiatočnú úlohu:

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t)$$

pre $t > 0$, ktoré bude spĺňať podmienky

$$x(0+) = b_0, x'(0+) = b_1, \ldots, x^{(n-1)}(0+) = b_{n-1},$$

t.j. ZÚ (1), (2) s pravou stranou tvaru:

$$f(t) = \eta(t-\tau_1) f_1(t-\tau_1) + \cdots + \eta(t-\tau_k) f_k(t-\tau_k) \qquad ((3))$$

kde funkcie $f_1, \ldots, f_k$ sú originály a $0 \leq \tau_1 < \cdots < \tau_k$. Použitím Laplaceovej transformácie na túto ZÚ dostaneme:

$$Q_n(p) X(p) - P_{n-1}(p) = e^{-\tau_1 p} F_1(p) + \cdots + e^{-\tau_k p} F_k(p).$$

odkiaľ

$$X(p) = \frac{P_{n-1}(p)}{Q_n(p)} + e^{-\tau_1 p} G_1(p) + \cdots + e^{-\tau_k p} G_k(p),$$

kde

$$G_j = \frac{F_j}{Qn},\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Použitím **??** dostaneme originál v tvare

$$x(t) = h(t) + \eta(t-\tau_1) g_1(t-\tau_1) + \cdots + \eta(t-\tau_k) g_k(t-\tau_k),$$

pričom

$$\mathcal{L}[h] = \frac{P_{n-1}}{Q_n},\ \mathcal{L}[g_j] = G_j,\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

**Example 334** *Nájdite riešenie ZÚ:*

$$x'' + 4x = f(t),\ x(0+) = 1,\ x'(0+) = 0,\ \ kde\ \ f(t) = \begin{cases} 0 & pre \quad t < 0 \\ \cos t & pre \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & pre \quad t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

**Solution 335** *Použitím vzťahu $X(p) = \mathcal{L}[x(t)]$ dostaneme $\mathcal{L}[x'(t)] = pX(p) - 1$, $\mathcal{L}[x''(t)] = p^2 X(p) - p$. Pravú stranu rovnice možno zapísať v tvare*

$$f(t) = \cos t \left[\eta(t) - \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \eta(t)\cos t + \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{p}{p^2+1} + e^{-p\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p^2+1}.$$

*Aplikáciou Laplaceovej transformácie na rovnicu dostaneme:*

$$p^2 X(p) - p + 4X(p) = \frac{p}{p^2+1} + e^{-p\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p^2+1},$$

*t.j.*

$$X(p) = \frac{p}{p^2+4} + \frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)} + e^{-p\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)},$$

*teda*

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) x_3\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

*pričom*

$$\mathcal{L}[x_1(t)] = \frac{p}{p^2+4}, \mathcal{L}[x_2(t)] = \frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}, \mathcal{L}[x_3(t)] = \frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)}.$$

*Pretože platí*

$$\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{1}{3}\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{3}\frac{p}{p^2+4}$$

*a*

$$\frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{1}{3}\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{p^2+4},$$

*tak*

$$x_1(t) = \cos 2t,\ x_2(t) = \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos 2t,\ x_3(t) = \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{6}\cos 2t$$

*a*

$$x(t) = \frac{1}{3}\cos t + \frac{2}{3}\cos 2t + \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\left[\frac{1}{3}\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{6}\sin 2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right]. \square$$

V elektrotechnike sa často stretávame s úlohou riešiť obyčajnú diferenciálnu rovnicu s periodickou funkciou na pravej strane.

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = \eta(t) f(t) \qquad ((4))$$

$$x(0+) = b_0, x'(0+) = b_1, \ldots, x^{(n-1)}(0+) = b_{n-1} \qquad ((5))$$

s periodickou funkciou $f,\ f(t) = f(t+T)$. Riešenie takejto ZÚ hľadáme v tvare

$$x(t) = y(t) + z(t),\ t > 0;$$

kde $y$ je periodické riešenie rovnice (4) a $z$ je riešením ZÚ

$$a_n z^{(n)}(t) + a_{n-1}z^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 z'(t) + a_0 z(t) = 0,$$

s podmienkami

$$z(0+) = c_0, z'(0+) = c_1, \ldots, z^{(n-1)}(0+) = c_{n-1},$$

kde

$$c_j = b_j - y^{(j)}(0+),\ j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Skúmajme teda najskôr úlohu

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = \eta(t) f(t), \qquad ((6))$$

kde $f:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{C}$ je funkcia s periodou $T$, t.j. $f(t+T)=f(t)$ a my hľadáme riešenie $y(t)$, tak aby platilo $y(t)=y(t+T)$ pre každé $t\geq 0$. Aplikáciou Laplaceovej transformácie na rovnicu (4) dostaneme

$$Y(p)=\frac{P_{n-1}(p)}{Q_n(p)}+\frac{F_T(p)}{Q_n(p)\left(1-e^{-pT}\right)},$$

kde $Y(p)=\boldsymbol{\mathcal{L}}[y(t)]$ a $F_T(p)$ je Laplaceova transformácia funkcie $f_{\langle 0,T\rangle}(t)$, ktorá je definovaná vzťahom

$$f_{\langle 0,T\rangle}(t)=\begin{cases}0 & \text{pre} \quad t<0,\, T\leq t\\ f(t) & \text{pre} \quad 0\leq t<T\end{cases}$$

a $P_{n-1}(p)$ je zatiaľ neznámy polynóm rádu $n-1$, ktorého koeficienty volíme tak, aby funkcia $y(t)$ bola periodická. Ak preformulujeme poslednú rovnicu, tak dostávame:

$$Y(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\left[\frac{F_T(p)}{Q_n(p)}+\left(1-e^{-pT}\right)\frac{P_{n-1}(p)}{Q_n(p)}\right],$$

t.j.

$$Y(p)=\frac{G(p)}{1-e^{-pT}},$$

kde

$$G(p)=\frac{F_T(p)}{Q_n(p)}+\left(1-e^{-pT}\right)\frac{P_{n-1}(p)}{Q_n(p)}$$

a nech $G$ je Laplaceova transformácia funkcie $g$, $G(p)=\boldsymbol{\mathcal{L}}[g(t)]$. Originál $x(t)$ bude periodická funkcia s periodou $T$ vtedy a len vtedy ak $g(t)=0$ pre každé $t\geq T$. Potom podľa vety o obraze periodickej funkcie $x(t)$ má tvar

$$y(t)=\begin{cases}g(t) & \text{pre} \quad 0\leq t<T\\ g(t-kT) & \text{pre} \quad kT\leq t<(k+1)T\end{cases},\quad k=1,2,\ldots$$

**Example 336** *Nájdite periodické riešenie ZÚ*

$$x'+x=f(t),\, t>0;\, x(0+)=0$$

*s periodickou pravou stranou* $f:\langle 0,\infty)\longrightarrow\boldsymbol{R}$ *definovanou*

$$f(t)=\begin{cases}t & \textit{pre} \quad 0\leq t<1\\ t-k & \textit{pre} \quad k\leq t<k+1\end{cases},\, k=1,2,\ldots$$

**Solution 337** *Funkcia* $f$ *je periodická s periodou* $T=1$. *Riešenie ZÚ budeme hľadať v tvare* $x(t)=y(t)+z(t)$, $t>0$ *kde* $y(t)$ *je riešenie úlohy*

$$y'+y=f(t);\; y(t+1)=y(t),\, y(0+)=B,\, \forall\, t>0$$

*a* $z(t)$ *je riešenie ZÚ*

$$z'+z=0;\; z(0+)=-B;\; t>0.$$

*Riešme najskôr prvú úlohu. Ak označíme*

$$f_{\langle 0,1\rangle}(t) = t\left[\eta(t) - \eta(t-1)\right] = t\eta(t) - (t-1)\,\eta(t-1) - \eta(t-1)\,,\ t \in \boldsymbol{R},$$

*tak*

$$f_1(p) = \frac{1}{p^2}\left(1 - e^{-p}\right) - \frac{1}{p}e^{-p}$$

*a pre* $Y = \boldsymbol{\mathcal{L}}[y]$ *s podmienkou* $y(0+) = B$, *kde* $B$ *určíme tak aby riešenie* $y(t)$ *bolo periodickou funkciou, dostaneme*

$$Y(p) = \frac{B}{p+1} + \frac{1 - e^{-p} - pe^{-p}}{p^2(p+1)(1-e^{-p})} =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-p}}\left[\frac{B}{p+1} + \frac{1}{p^2(p+1)} - e^{-p}\left(\frac{B}{p+1} + \frac{1}{p^2(p+1)} + \frac{1}{p(p+1)}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-p}}\left[\left(\frac{B+1}{p+1} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}\right) - e^{-p}\left(\frac{B}{p+1} + \frac{1}{p^2}\right)\right] = \frac{G(p)}{1-e^{-p}},$$

*kde*

$$G(p) = \left(\frac{B+1}{p+1} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}\right) - e^{-p}\left(\frac{B}{p+1} + \frac{1}{p^2}\right)$$

*a originál* $g(t)$ *musí byť taká funkcia, že* $g(t) = 0$, *pre* $t > 1$. *Originál* $g(t)$ *má tvar*

$$g(t) = (B+1)\,e^{-t} + t - 1 - \eta(t-1)\left[Be^{-(t-1)} + t - 1\right].$$

*Potom pre* $t > 1$ *dostaneme:*

$$g(t) = (B+1)\,e^{-t} + t - 1 - Be^{-(t-1)} - t + 1 = e^{-t}\left[B(1-e) + 1\right],$$

*odkiaľ dostávame*

$$B = \frac{1}{e-1},$$

*teda periodické riešenie prvej rovnice má tvar*

$$y(t) = \begin{cases} \frac{e^{1-t}}{e-1} + t - 1 & \text{pre} \quad 0 \le t < 1 \\ \frac{e^{k+1-t}}{e-1} + t - k - 1 & \text{pre} \quad k \le t < k+1 \end{cases}, \ k = 1, 2, \ldots$$

*Teraz vyriešime druhú úlohu. Jej riešenie má tvar*

$$z(t) = \frac{1}{1-e}e^{-t},\ t > 0.$$

*Potom riešenie pôvodnej ZÚ bude mať tvar*

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t} + t - 1 & \text{pre} \quad 0 \le t < 1 \\ \frac{e^{k+1}-1}{e-1}e^{-t} + t - k - 1 & \text{pre} \quad k \le t < k+1 \end{cases}, \ k = 1, 2, \ldots \ \square$$

Riešenie systémov obyčajných diferenciálnych rovníc.

Metódu, ktorú sme použili v predchádzajúcej časti pri riešení začiatočných úloh je možné aplikovať aj v prípade systémov obyčajných diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami. My sa obmedzíme iba na riešenie systémov obyčajných diferenciálnych rovníc prvého rádu tvaru:

$$\begin{array}{ll} x_1'(t) + a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) & = f_1(t) \\ x_2'(t) + a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) & = f_2(t) \\ \cdots & \\ x_n'(t) + a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) & = f_n(t) \end{array}, \ t > 0$$

so začiatočnými podmienkami

$$x_j(0+) = b_j, \ j = 1, 2, \ldots, n$$

Za predpokladu, že $f_1, \ldots, f_n$ sú rovné nule pre $t < 0$ a ak $X_j = \mathcal{L}[x_j]$, $F_j = \mathcal{L}[f_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$ daný systém diferenciálnych rovníc transformujeme na tvar

$$\begin{array}{c} (p + a_{11}) X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = F_1 + b_1 \\ a_{21}X_1 + (p + a_{22})X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = F_2 + b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + (p + a_{nn})X_n = F_n + b_n \end{array}.$$

Pretože determinant systému je rovný nule iba v konečnom počte bodov, môžeme úlohu riešiť pomocou Cramerovho pravidla. Potom dostaneme

$$X_j = \frac{D_j(p)}{D(p)}, \ j = 1, 2, \ldots, n$$

kde

$$D(p) = \begin{vmatrix} (p + a_{11}) & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & (p + a_{22}) & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & (p + a_{nn}) \end{vmatrix}$$

a

$$D_j(p) = \begin{vmatrix} (p + a_{11}) & a_{12} & \ldots & F_1 + b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & (p + a_{22}) & \ldots & F_2 + b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & F_n + b_n & \ldots & (p + a_{nn}) \end{vmatrix}.$$

Originály dostaneme pomocou tých istých metód ako predtým.

**Example 338** *Riešte ZÚ:*

$$\begin{array}{lll} x' - y & = 2, & x(0+) = 0 \\ y' - x & = t, & y(0+) = 1 \end{array}.$$

**Solution 339** *Ak označíme $X = \mathcal{L}[x]$, $Y = \mathcal{L}[y]$ potom aplikáciou Laplaceovej transformácie dostaneme*

$$\begin{array}{ll} pX - Y & = \frac{2}{p} \\ -X + pY & = \frac{1}{p^2} - 1 \end{array},$$

*odkiaľ*

$$D(p) = \begin{vmatrix} p & -1 \\ -1 & p \end{vmatrix} = p^2 - 1,$$

$$D_1(p) = \begin{vmatrix} \frac{2}{p} & -1 \\ \frac{1}{p^2} - 1 & p \end{vmatrix} = 1 + \frac{1}{p^2},$$

$$D_2(p) = \begin{vmatrix} p & \frac{2}{p} \\ -1 & \frac{1}{p^2} - 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{p} - p,$$

*odkiaľ*

$$X(p) = \frac{p^2+1}{p^2(p^2-1)} = -\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1},$$

$$Y(p) = \frac{3-p^2}{p(p^2-1)} = -\frac{3}{p} + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}$$

*a*

$$x(t) = -t + e^{-t} - e^{t},\ y(t) = -3 - e^{-t} + e^{t},\ t > 0. \square$$

**Example 340** *Riešte ZÚ:*

$$\begin{array}{lll} x_1' + 2x_1 + x_2 & = \sin t, & x_1(0+) = 0 \\ x_2' - 4x_1 - 2x_2 & = \cos t, & x_2(0+) = 1 \end{array}$$

**Solution 341** *Ak označíme* $X_1 = \mathcal{L}[x_1]$, $X_2 = \mathcal{L}[x_2]$ *potom aplikáciou Laplaceovej transformácie dostaneme*

$$\begin{array}{rl} (p+2)X_1 + X_2 & = \frac{1}{p^2+1} \\ -4X_1 + (p-2)X_2 & = \frac{p}{p^2+1} + 1 \end{array}$$

*odkiaľ*

$$D(p) = \begin{vmatrix} p+2 & 1 \\ -4 & p-2 \end{vmatrix} = p^2,$$

$$D_1(p) = \begin{vmatrix} \frac{1}{p^2+1} & 1 \\ \frac{p}{p^2+1} + 1 & p-2 \end{vmatrix} = -\frac{p^2+3}{p^2+1},$$

$$D_2(p) = \begin{vmatrix} p+2 & \frac{1}{p^2+1} \\ -4 & \frac{p}{p^2+1} + 1 \end{vmatrix} = \frac{p^3+3p^2+3p+6}{p^2+1},$$

*odkiaľ*

$$X_1(p) = -\frac{p^2+3}{p^2(p^2+1)} = -\frac{3}{p^2} + \frac{2}{p^2+1},$$

$$X_2(p) = \frac{p^3+3p^2+3p+6}{p^2(p^2+1)} = \frac{3}{p} + \frac{6}{p^2} - 2\frac{p}{p^2+1} - 3\frac{1}{p^2+1}$$

*:*

*a*

$$x_1(t) = -3t + 2\sin t,\ x_2(t) = 3 + 6t - 2\cos t - 3\sin t,\ t > 0. \square$$

Riešenie integrodiferenciálnych rovníc.
Skúmajme lineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu s konštantnými koeficientami:

$$a_2 x'(t) + a_1 x(t) + a_0 \int_0^t x(s)\, ds = f(t),\ t > 0 \qquad ((7))$$

$$x(0+) = b_0 \qquad ((8))$$

Ak je funkcia $f$ diferencovateľná, potom úlohu (7), (8) môžme preformulovať na začiatočnú úlohu s diferenciálnou rovnicou druhého rádu:

$$a_2 x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f'(t),\ t > 0$$

$$x(0+) = b_0,\ x'(0+) = \frac{f(0+) - a_1 b_0}{a_2}.$$

Takúto úlohu už dokážeme riešiť. My však pomocou Laplaceovej transformácie vieme úlohu (7), (8) riešiť aj priamo, pričom ak $F = \mathcal{L}[f]$ dostaneme

$$a_2 (pX - b_0) + a_1 X + a_0 \frac{X}{p} = F(p),\ \operatorname{Re} p > 0$$

t.j.

$$X(p) = \frac{p\left[F(p) + a_2 b_0\right]}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0},$$

odkiaľ originál určíme bežnými metódami.

**Example 342** *Riešte ZÚ pre integrodiferenciálnu rovnicu:*

$$x'(t) + 2x(t) + 2\int_0^t x(s)\, ds = 1,\ t > 0,\ x(0+) = 0.$$

**Solution 343** *Nech $F(p) = L[f(t)]$. Aplikáciou Laplaceovej transformácie dostaneme*

$$pX(p) + 2X(p) + 2\frac{X(p)}{p} = \frac{1}{p},$$

*odkiaľ máme*

$$X(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 2} = \frac{1}{(p+1)^2 + 1}.$$

*Originál teraz možno určiť pomocou elementárnych pravidiel a dostávame:*

$$x(t) = e^{-t} \sin t. \ \square$$

## Cvičenia.

V úlohách 1 - 11 vypočítajte pomocou Laplaceovej transformácie riešenie začiatočnej úlohy:

1. $x'''(t) + 2x''(t) + 5x'(t) = 0,\ x(0+) = -1,\ x'(0+) = 2,\ x''(0+) = 0.$
   $\left[x(t) = -\frac{1}{5} - \frac{4}{5}e^{-t}\cos(2t) + \frac{3}{5}e^{-t}\sin(2t)\right]$

2. $x^{(4)}(t) + 2x''(t) + x(t) = 1,\ x(0+) = x'(0+) = x''(0+) = x'''(0+) = 0.$
   $\left[x(t) = 1 - \cos t - \frac{t}{2}\sin t\right]$

3. $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^{3t},\ x(0+) = x'(0+) = 0.$
   $\left[x(t) = \frac{1}{2}e^{t} - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}\right]$

4. $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 2e^{3t},\ x(0+) = x'(0+) = 0.$
   $\left[x(t) = e^{t} - 2e^{2t} + e^{3t}\right]$

5. $x''(t) - x'(t) = te^{t},\ x(0+) = 1,\ x'(0+) = 0.$
   $\left[x(t) = e^{t}\left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right)\right]$

6. $x'(t) + x(t) = t^2e^{-t},\ x(0+) = a.$
   $\left[x(t) = ae^{-t} + \frac{t^3}{3}e^{-t}\right]$

7. $x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = t^3e^{-2t},\ x(0+) = 1,\ x'(0+) = 2.$
   $\left[x(t) = e^{-2t}\left(1 + 4t + \frac{t^5}{20}\right)\right]$

8. $x'''(t) - x''(t) = \sin t,\ x(0+) = x'(0+) = x''(0+) = 0.$
   $\left[x(t) = -1 - t + \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)\right]$

9. $x'(t) + x(t) = f(t),\ x(0+) = 0,\ f(t) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & t \notin \langle 0, 2) \\ 1 & t \in \langle 0, 2) \end{array}\right. .$
   $\left[x(t) = 1 - e^{-t} - \eta(t-2)\left(1 - e^{-(t-2)}\right)\right]$

10. $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = f(t),\ x(0+) = x'(0+) = 0,\ f(t) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & t < 0 \\ t & t \in \langle 0, 1) \\ 1 & t \geq 1 \end{array}\right. .$
    $\left[x(t) = -2 + t + 2e^{-t} + te^{-t} - \eta(t-1)\left[-2 + (t-1) + 2e^{-(t-1)} + (t-1)e^{-(t-1)}\right]\right]$

11. $x''(t) + x(t) = f(t),\ x(0+) = 1,\ x'(0+) = 0,\ f(t) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & t < 0 \\ b & t \in \langle 0, a) \\ 2b & t \geq a \end{array}\right. .$
    $\left[x(t) = \eta(t)\left[b + (1-b)\cos t\right] + \eta(t-a)\left[b - b\cos(t-a)\right]\right]$

# BIBLIOGRAPHY

[1] Marko Ľ.: Matematická analýza online, 2001, http://www.aladin.elf.stuba.sk/~marko

[2] Stroud, K.A.: Engineering Mathematics, Macmillan Presss LTD, Hong Kong, 1993

[3] Hamhalter J.: Komplexní analýza a transformace, A8B01MCT Lecture Notes, FEL ČVUT, Praha 2017

[4] Glyn, J.: Modern engineering mathematics, Addison Wesley, 2008

[5] Fisher S.D.: Complex Variables, (second edition), Wadsworth&Brooks/Cole, London, 1990