Cvičenie 6.

Lokálne extrémy funkcie viacerých premenných.

Definícia. Nech $f : A \subset R^2 \to R$ je funkcia definovaná, na množine A.

Hovoríme, že funkcia f má v bode $a = [x_0, y_0]$:

- lokálne minimum, ak $\exists O_\delta(a)$ také, že $\forall [x, y] \in O_\delta(a)$ platí $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$,
- lokálne maximum, ak $\exists O_\delta(a)$ také, že $\forall [x, y] \in O_\delta(a)$ platí $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$.

V prípade ostrých nerovností hovoríme o ostrom lokálnom minime resp. maxime.

Veta (o nutnej podmienke). *Nech $f : A \subset R^2 \to R$ je diferencovateľná funkcia na množine A.*

Ak f má v bode $a = [x_0, y_0]$ lokálny extrém, tak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Definícia. Nech $f : A \subset R^2 \to R$ je diferencovateľná funkcia na množine A.

Bod $a = [x_0, y_0]$, v ktorom

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

nazývame stacionárny bod.

Veta (o postačujúcej podmienke) Silvestrovo kritérium.

Nech $f : A \subset R^2 \to R$ je dvakrát diferencovateľná funkcia na množine A a nech bod $a = [x_0, y_0]$ je stacionárny bod.

Ak druhý diferenciál funkcie f, $d^2 f(a, h, k) = f''_{xx}(a)h^2 + 2f''_{xy}(a)hk + f''_{yy}(a)k^2$ je

- *kladne definitný, tak bod a je bod ostrého lokálneho minima,*
- *záporne definitný, tak bod a je bod ostrého lokálneho maxima,*
- *indefinitný, tak bod a nie je bod lokálneho extrému.*

Veta. Maticové Silvestrovo kritérium.

Nech $f : A \subset R^2 \to R$ je dvakrát diferencovateľná funkcia na množine A a nech bod $a = [x_0, y_0]$ je stacionárny bod. Nech

$$D = \begin{pmatrix} f''_{xx}(a) & f''_{xy}(a) \\ f''_{yx}(a) & f''_{yy}(a) \end{pmatrix}$$

$$D_1 = f''_{xx}(a)$$

$$D_2 = \det D.$$

Ak

- $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, *tak bod a je bod ostrého lokálneho minima,*
- $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, *tak bod a je bod ostrého lokálneho maxima,*
- $D_2 < 0$, *tak bod a nie je bod lokálneho extrému.*

Nájdite stacionárne body a body lokálnych extrémov funkcie dvoch premenných ak:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$.
2. $f(x,y) = -x^2 - y^2$.
3. $f(x,y) = x^2 - y^2$.
4. $f(x,y) = 27x^2y + 14y^3 - 54x - 69y$.
5. $f(x,y) = (y - x - 2)^2$.
6. $f(x,y) = xy(\ln(x^2 + y^2))$.

7*. $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4(x^3 - y^3) + 5(x^2 + y^2) + 4(x - y) - 2xy + 2$.

8. $f(x,y) = 5xy + \dfrac{25}{x} + \dfrac{8}{y} \qquad$ pre $x > 0$, $y > 0$.
9. $f(x,y) = -x^2 - xy - y^2 + 6y + 2$.
10. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}(2y^2 + x^2)$.

Veta. Maticové Silvestrovo kritérium v R^3.

Nech $f : A \subset R^3 \to R$ je dvakrát diferencovateľná funkcia na množine A a nech bod $a = [x_0, y_0, z_0]$ je stacionárny bod. Nech

$$D = \begin{pmatrix} f''_{xx}(a) & f''_{xy}(a) & f''_{xz}(a) \\ f''_{yx}(a) & f''_{yy}(a) & f''_{yz}(a) \\ f''_{zx}(a) & f''_{zy}(a) & f''_{zz}(a) \end{pmatrix}$$

$$D_1 = f''_{xx}(a)$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} f''_{xx}(a) & f''_{xy}(a) \\ f''_{yx}(a) & f''_{yy}(a) \end{pmatrix}$$

$$D_3 = \det D.$$

Ak

- $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, $D_3 > 0$, *tak bod a je bod ostrého lokálneho minima,*
- $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$,*tak bod a je bod ostrého lokálneho maxima,*
- $D_2 < 0$, *tak bod a nie je bod lokálneho extrému,*
- $D_i \neq 0$, *a znamienka sa striedajú inak, ako v prvých dvoch prípadoch, tak bod a nie je bod lokálneho extrému,*

Nájdite stacionárne body a body lokálnych extrémov funkcie troch premenných

11. $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2$.
12. $f(x,y) = -x^2 - y^2 - z^2$.
13. $f(x,y) = x^2 - y^2 + z^2$.
14. $f(x,y) = x^2 + y^2 - z^2$.
15. $f(x,y,z) = xy + yz - \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) - y - z - 3$.
16. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.
17. $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}, \qquad$ pre $\quad x > 0,\ y > 0,\ z > 0$.
18. $f(x,y,z) = x^2y^2z^2 - 4x^2 - y^2 - z^2$.
19. $f(x,y,z) = xyz(4 - x - y - z)$.

Výsledky

1. $[0, 0]$ je bod ostrého lokálneho minima
2. $[0, 0]$ je bod ostrého lokálneho maxima
3. $[0, 0]$ je sedlový bod
4. $[1, 1]$ je bod ostrého lokálneho minima
   $[-1, -1]$ je bod ostrého lokálneho maxima
5. $[p, p + 2]$ $\forall p \in R$ sú body neostrého lokálneho minima.
6. Body $[1, 0]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[0, -1]$ sú sedlové body. Body $[\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ sú body ostrého lokálneho minima. Body $[\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$ sú body ostrého lokálneho maxima.
7.
8. Bod $[\frac{5}{2}, \frac{4}{5}]$ je bod ostrého lokálneho minima.
9. $[-2, 4]$ je bod ostrého lokálneho maxima
10. $[0, 0]$ je bod ostrého lokálneho minima
11. $[0, 0, 0]$ je bod ostrého lokálneho minima
12. $[0, 0, 0]$ je bod ostrého lokálneho maxima
13. $[0, 0, 0]$ je sedlový bod
14. $[0, 0, 0]$ je sedlový bod
16. $[0, 0, -1]$ je sedlový bod, $[24, -144, -1]$ je bod ostrého lokálneho minima
17. $[\frac{1}{2}, 1, 1]$ je bod ostrého lokálneho minima

$$\frac{\partial f}{\partial}(x, y) = \begin{cases} y^2(x^3 + y^3)^{\frac{-2}{3}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$