1 Funkcie viacerých premenných.

1.1 Definičný obor funkcie.

V cvičeniach 1 - 31 nájdite a načrtnite definičný obor daných funkcií:

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-r^2}$, kde $r \geq 0$ je reálne číslo. $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 \geq r^2\right\}\right]$
2. $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$, kde $r \geq 0$ je reálne číslo. $\left[D(g) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 < r^2\right\}\right]$
3. $f(x,y) = \ln(-x-y)$. $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x < -y\right\}\right]$
4. $g(x,y) = \arcsin\frac{y}{x}$. $\left[D(g) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x > 0,\ -x \leq y \leq x;\ x < 0,\ -x \geq y \geq x\right\}\right]$
5. $f(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x \leq x^2+y^2 < 2x\right\}\right]$
6. $f(x,y,z) = \ln\left(1-x^2-y^2+z^2\right)$. $\left[D(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2-z^2 < 1\right\}\right]$
7. $f(x,y) = \sqrt{y^2-x^2}+\ln\left(6+2x-y^2\right)$. $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ y^2-x^2 \geq 0 \wedge 6+2x-y^2 > 0\right\}\right]$
8. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}+\arccos(9x^2+16y^2)$. $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ 0 < 9x^2+16y^2 \leq 1\right\}\right]$
9. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}+\arcsin(x+y)$. $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ xy > 0 \wedge x+y \in \langle -1, 1\rangle\right\}\right]$
10. $f(x,y,z) = \sqrt{9-x^2-y^2-z^2}+\ln\left(-x^2-y^2+z^2\right)$. $\left[D(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ 9 \geq x^2+y^2+z^2 \wedge x^2+y^2\right.\right.$
11. $f(x,y,z) = \arcsin\left(x^2+y^2-z\right)$. $\left[D(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ -1 \leq x^2+y^2-z \leq 1\right\}\right]$
12. $f(x,y,z) = \arccos(2x-1)+\sqrt{1-y^2}+\sqrt{y}+\ln\left(4-z^2\right)$. $\left[D(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 \leq x \leq 1 \wedge 1-y^2 \geq 0\right.\right.$
13. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}+\ln\left(9-x^2-y^2\right)$. $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ 1 \leq x^2+y^2 < 9\right\}\right]$
14. $f(x,y) = yx^{\frac{x}{y}}$. $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x > 0, y \neq 0\right\}\right]$
15. $f(x,y) = \arcsin\left[2y(1+x^2)-1\right]$. $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ 0 \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}\right\}\right]$
16. $f(x,y) = \sqrt{2x+2y-y^2-5}$. $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x \geq 2, (y-1)^2 \leq 2(x-2)\right\}\right]$
17. $f(x,y,z) = \frac{x}{y-z}$. $\left[D(f) = \mathbf{R}^3 - \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R},\ z = y\right\}\right]$
18. $f(x,y,z) = \sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$. $\left[D(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leq 4\right\}\right]$
19. $\mathbf{f}(x,y) = \left(\arcsin\left(1+e^{x+y}\right), \frac{x^2}{1-x-y}\right)$. $[D(f) = \emptyset]$
20. $\mathbf{f}(x,y) = \left(\ln(x+y), \arcsin\left(\frac{y-1}{x}\right)\right)$. $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x+y > 0 \wedge 1-x \leq y \leq 1+x\right\}\right]$
21. $\mathbf{f}(x,y) = \left(\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}, \sqrt{\sin\left[\pi\left(x^2+y^2\right)\right]}\right)$. $\left[\begin{array}{r} D(f) = D(f_1) \cap D(f_2),\ \text{kde } D(f_1) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ 4x \geq \right. \\ D(f_2) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ 2k \leq x^2 + \right. \end{array}\right.$

22. $\mathbf{f}(x,y) = (\arcsin[2+\sqrt{x+y}], \ln(x+y))$. [daný predpis nie je funkciou, pretože f_1 neexistuje]

23. $f(x,y) = \ln(x\ln(y-x))$. $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ (x>0 \wedge y>1+x) \vee (x<0 \wedge x<y<x+1)\right\}\right]$

24. $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{x}{y^2}\right) + \arcsin(1-y)$. $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ -y^2 \leq x \leq y^2 \wedge 0<y\leq 2\right\}\right]$

25. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1} + ln\left(2-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}\right)$. $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 \geq 1 \wedge \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{6}<1\right\}\right]$

26. $f(x,y) = y + \arccos x + \arcsin(x+y)$. $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ -1 \leq x \leq 1,\ -1-x \leq y \leq 1-x\right\}\right]$

27. $f(x,y) = \ln(x\sin y) + \sqrt{y\sin x}$. $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x\sin y > 0 \wedge y\sin x \geq 0\right\}\right]$

28. $f(x,y,z) = \sqrt{4-z-x^2-y^2} + \ln\left(x^2+y^2+z^2-4\right) - \sqrt[4]{z}$. $\Big[D(f) = \Big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ \sqrt{4-x^2-y^2} < z \leq$

29. $f(x,y,z) = \sqrt{(2-x^2-y^2-z)(z-x^2-y^2)}$. $\big[D(f) = \big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ \big(z \leq 2-x^2-y^2 \wedge z \geq x^2+y^2\big) \vee$

30. $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2+z^2} + \frac{1}{x^2+y^2-z^2-1}$. $\left[D(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2-z^2<1\right\}\right]$

31. $f(x,y,z) = \sqrt{\arcsin\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)}$. $\left[D(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq z\right\}\right]$

V cvičeniach 32 – 35 pre danú funkciu: a) nájdite a načrtnite definičný obor, b) zistite, čo je grafom funkcie a načrtnite ho

32. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\right\}\right]$

33. $f(x,y) = \frac{1}{2x^2+3y^2}$. $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ (x,y) \neq (0,0)\right\}\right]$

34. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-2x+4y-4}$. $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ (x-1)^2+(y-2)^2 \geq 9\right\}\right]$

35. $f(x,y) = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2-y^2}$. $\left[D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 9\right\}\right]$

36. Daná je funkcia $f(x,y) = 4-x^2-y^2$

    (a) načrtnite jej graf a zistite, či je ohraničená
    (b) načrtnite graf zúženia f_A ak $A = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ |x| \leq 1, |y| \leq 1\right\}$.

37. Daná je funkcia $f(x,y) = \sqrt{2x^2+4y^2}$. Načrtnite graf zúženia f_A, f_B ak

    (a) $A = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ 2x^2+4y^2 \leq 1\right\}$
    (b) $B = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ |x| \leq 1, |y| \leq 1\right\}$.

1.2 Limita a spojitosť funkcie.

1. Dodefinujte funkciu $f(x,y) = \frac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$ tak, aby bola v bode $(0,0)$ spojitá. $[f(0,0) = -6]$

2. Dodefinujte funkciu $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ tak, aby bola v bode $(0,0)$ spojitá. [Funkcia sa nedá dodefinovať v $(0,0)$ aby bola spojitá]

3. Dodefinujte funkciu $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+x-y}$ tak, aby bola v bode $(0,0)$ spojitá. [Funkcia sa nedá dodefinovať v $(0,0)$ pretože $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+x-y}$ neexistuje - po priamke $y = x$ je limita $\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1$, po osi o_x t.j. $y = 0$ je limita $\lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$]

4. Dodefinujte funkciu $f(x,y) = \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$ tak, aby bola v bode $(0,0)$ spojitá. $\left[f(0,0) = -\frac{1}{4}.\right]$

5. Dodefinujte funkciu $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$ tak, aby bola v bode $(2,2)$ spojitá. $\left[f(2,2) = \frac{3}{8}.\right]$

6. Dodefinujte funkciu $f(x,y) = (2x+3y)\cos\frac{1}{xy}$ tak, aby bola v bode $(0,0)$ spojitá. [Funkcia sa dá dodefinovať v bode $(0,0)$ $f(0,0) = 0$.]

7. Daná je funkcia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ predpisom
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$
Zistite, či je v bode $(0,0)$ spojitá. [Je spojitá.]

8. Daná je funkcia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ predpisom
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(6xy)}{y} & (x,y) \neq (3,0) \\ k & (x,y) = (3,0) \end{cases} .$$
Určte číslo k aby funkcia bola v bode $(3,0)$ spojitá. $[k = 18]$

9. Daná je funkcia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ predpisom
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$
Zistite, či je v bode $(0,0)$ spojitá. [Nie je.]

10. Daná je funkcia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ predpisom
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$
Zistite, či je v bode $(0,0)$ spojitá. [Nie je.]

11. Daná je funkcia $f:\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ predpisom

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

Zistite, či je f spojitá. [Je spojitá všade s výnimkou bodu $(0,0)$.]

V príkladoch 12 – 30 vypočítajte limity ak existujú:

12. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$. [0]

13. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(1,-6)} \frac{(x+y)^2-25}{x+y+5}$. [−10]

14. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$. [neexistuje]

15. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \cos\frac{1}{x^2+y^2}$. [neexistuje]

16. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(2,3)} \frac{y-3}{x+y-5}$. [neexistuje]

17. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{2xy}{xy+2x-y}$. [neexistuje]

18. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$. [neexistuje]

19. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{y^2}{x^4+y^2}$. [neexistuje]

20. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(2,3)} \frac{\sin x+2}{(x^2-y^2+5)^2}$. [$+\infty$]

21. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{2-\sqrt{4-xy}}{xy}$. $\left[\frac{1}{4}\right]$

22. $\lim_{(x,y,z)\longrightarrow(1,1,1)} \frac{\sin(x+y-z-1)}{x+y-z-1}$. [1]

23. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}-2}$. [4]

24. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{xy}$. [0]

25. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(4,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}$. [4]

26. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$. [$e$]

27. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(-2,1)} \frac{(2x+y)^2-9}{4xy+2y^2+6y}$. [−3]

28. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$. [neexistuje]

29. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(3,4)} \frac{4-\sqrt{x+3y+1}}{15-x-3y}$. $\left[\frac{1}{8}\right]$

30. $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,2)} \frac{3y^2-3xy-6y}{1-\sqrt{x-y+3}}$. [12]

1.3 Parciálne derivácie.

V úlohách 1 – 5 sú dané funkcie $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$. Zistite, či sú diferencovateľné v bode $(0,0)$, keď

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. [nie je]

2. $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. [nie je]

3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy}{\sqrt{2x^4+y^4}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. [nie je]

4. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. [nie je]

5. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. [nie je]

6. Daná je funkcia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ predpisom

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{2x-3y+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}.$$

Vypočítajte parciálne derivácie v bode $(0,0,0)$ a zistite, či je funkcia v bode $(0,0,0)$ diferencovateľná. $\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = \infty,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = -\infty,\ \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)\right.$ neexistuje; nie je diferen

V úlohách 7 – 10 pomocou definície vypočítajte parciálne derivácie funkcií v bode $\mathbf{a}$, keď f a $\mathbf{a}$ sú dané:

7. $f(x,y) = \left(x^2+y\right)\sin(x+y)$, $\mathbf{a} = (0,\pi)$. $\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi) = -\pi,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi) = -\pi\right]$

8. $f(x,y) = 4x^3 - 2y^2 + 3xy^2 + 5y$, $\mathbf{a} = (1,2)$. $\left[\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 24,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 9\right]$

9. $f(x,y) = \sqrt{x^2-2x+y^2-4y+5}$, $\mathbf{a} = (1,2)$. $\left[\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\right.$ neexistuje, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right.$ neexistuje]

10. $f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $\mathbf{a} = (0,0)$. $\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0\right]$

V úlohách 11 – 17 vypočítajte parciálne derivácie, gradient a diferenciál funkcie f v bode $\mathbf{a}$ (ak existujú), keď f a $\mathbf{a}$ sú dané:

11. $f(x,y) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \ln(xy)$, $\mathbf{a} = (1,e)$. $\left[\frac{\partial f}{\partial x}(1,e) = \frac{3}{e^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,e) = -\frac{1}{e^3},\ grad f(1,e) = \left(\frac{3}{e^2}, -\frac{1}{e^3}\right),\ Df(1,e)(\mathbf{h}\right.$

12. $f(x,y) = \sqrt{x^2-2x+y^2-4y+5}$, $\mathbf{a} = (0,0)$. $\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -\frac{2}{\sqrt{5}},\ grad f(0,0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\right.\right.$

13. $f(x,y) = \frac{2}{(3x^2+4y^2)^2}$, $\mathbf{a} = (-1,1)$. $\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = \frac{24}{343},\ \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = -\frac{32}{343},\ gradf(-1,1) = \left(\frac{24}{343}, -\frac{32}{343}\right),\ Df$

14. $f(x,y) = x^2 y \ln(x+y)$, $\mathbf{a} = (-1,2)$. $\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = 2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = 2,\ gradf(-1,2) = (2,2),\ Df(-1,2)$

15. $f(x,y,z) = \left(\frac{y}{z}\right)^x$, $\mathbf{a} = (1,4,2)$. $\Big[\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,4,2) = 2\ln 2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,4,2) = \frac{1}{2},\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,4,2) = -1,\ gradf(1,4,2) =$
$Df(1,4,2)(\mathbf{h}) = 2\ln 2h_1 + \frac{1}{2}h_2 - h_3$, kde $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3$

16. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $\mathbf{a} = (0,0)$. $\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ neexistuje, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistuje$\Big]$

17. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$, $\mathbf{a} = (2,1)$. $\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{\sqrt{6}}{3},\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \frac{\sqrt{6}}{6},\ gradf(2,1) = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right),\ Df(2,1)($

V úlohách 18 – 23 zistite, či je funkcia $\mathbf{f} : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ spojite diferencovateľná a napíšte jej deriváciu a diferenciál v bode $\mathbf{a}$, ak existujú:

18. $\mathbf{f}(x,y,z) = 2\cos(xy-z), (2x-z)^{2y^3}$, $\mathbf{a} = \left(\pi, 1, \frac{\pi}{2}\right)$. $\Big[$je spojite diferencovateľná $Df\left(\pi,1,\frac{\pi}{2}\right) = \Big(\begin{matrix} -2 \\ 6\pi \end{matrix}$

19. $\mathbf{f}(x,y) = \left(e^{\frac{x}{y}}, x^y\right)$, $\mathbf{a} = (2,1)$. $\Big[$je spojite diferencovateľná $D\mathbf{f}(2,1) = \begin{pmatrix} e^2 & -2e^2 \\ 1 & 2\ln 2 \end{pmatrix}$, $D\mathbf{f}(2,1)(\mathbf{h}) =$

20. $\mathbf{f}(x,y) = (x\cos y, x\sin y)$, $\mathbf{a} = \left(3, \frac{\pi}{2}\right)$. $\Big[$je spojite diferencovateľná $D\mathbf{f}\left(3,\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D\mathbf{f}\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$

21. $\mathbf{f}(x,y,z) = (x\cos y, x\sin y, z)$, $\mathbf{a} = \left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right)$.

$$\left[\text{je spojite diferencovateľná } D\mathbf{f}\left(1,\frac{\pi}{2},0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D\mathbf{f}\left(1,\frac{\pi}{2},0\right)(\mathbf{h}) = \begin{pmatrix} h_2 \\ h_1 \\ h_3 \end{pmatrix}.\right]$$

22. $\mathbf{f}(x,y,z) = (x\cos y\cos z, x\sin y\cos z, x\sin z)$, $\mathbf{a} = (1,0,0)$.

$$\left[\text{je spojite diferencovateľná } Df\,()\,1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D\mathbf{f}(1,0,0)(\mathbf{h}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_3 \end{pmatrix}\right].$$

23. $f(x,y) = \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\right)$, $\mathbf{a} = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$. $\Big[$je spojite diferencovateľná $D\mathbf{f}\left(\frac{3}{2},1\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$, $D\mathbf{f}\,($

24. Nech $f(x,y) = e^{\frac{X}{y}} \ln y$. Dokážte, že pre $y > 0$ platí: $y\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{f(x,y)}{\ln y}$. [Platí.]

25. Nech $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Vypočítajte $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}$ a $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}$ ak existujú. [obe neexistujú.]

26. Vypočítajte $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ a $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ ak existujú, keď

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

$\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{6x^3+6xy^2-4x^4}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 2,\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{-12x^3y-12xy^3+16x^4y}{(x^2+y^2)^3},\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}\text{- neexistuje.}\right]$

27. Nech $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$
Vypočítajte $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}$. $\left[\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = 0,\ \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 0\right]$

28. Ukážte, že pre funkciu $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ platí: $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial z^2} = 0$. [Platí]

29. Ukážte, že pre funkciu $f(x,y) = xe^y + ye^x$ platí $\frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial y^3} = x\frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial y^2 \partial x} + y\frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial y \partial x^2}$. [Platí]

V úlohách 30 – 33 vypočítajte diferenciál druhého rádu funkcie f v bode $\mathbf{a}$ keď :

30. $f(x,y) = \sqrt{8-x^2-y^2}$, $\mathbf{a} = (0,0)$. $\left[D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = -\frac{1}{\sqrt{8}}h^2 - \frac{1}{\sqrt{8}}k^2,\text{ kde }\ \mathbf{h} = (h,k)\right]$

31. $f(x,y) = \ln\left(3x^2+2y^2\right)$, $\mathbf{a} = (1,0)$. $\left[D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = -2h^2 + \frac{4}{3}k^2,\text{ kde }\ \mathbf{h} = (h,k)\right]$

32. $f(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2}$, $\mathbf{a} = (1,1,0)$. $\left[D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = -hl - kl,\text{ kde }\ \mathbf{h} = (h,k,l)\right]$

33. $f(x,y,z) = xy + \cos z - y\operatorname{tg} z$, $\mathbf{a} = (1,0,0)$. $\left[D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = -l^2 + 2hk - 2kl,\text{ kde }\ \mathbf{h} = (h,k,l)\right]$

V príkladoch 34 – 36 vypočítajte deriváciu funkcie $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ ak $\mathbf{g}$ a $\mathbf{f}$ sú dané :

34. $\mathbf{g}(u,v) = (\cos u, uv)$, $\mathbf{f}(x,y) = \left(x^2+y, y^2\right)$. $\left[D\mathbf{h}(x,y) = D\mathbf{g}(f(x,y)) \cdot D\mathbf{f}(x,y) = \left(\begin{array}{c} -\sin\left(x^2+y\right) \\ y^2 \end{array} \right.\right.$

35. $\mathbf{g}(u,v) = (u+v, u-v, uv)$, $\mathbf{f}(x,y) = (ye^x, x\sin y)$. $\left[D\mathbf{h}(x,y) = D\mathbf{g}(f(x,y)) \cdot D\mathbf{f}(x,y) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ x\sin y \end{array} \right.\right.$

36. $\mathbf{g}(u,v) = \left(uv, \frac{u}{v}, 1\right)$, $\mathbf{f}(x,y) = (\ln x, \cos y)$. $\left[D\mathbf{h}(x,y) = D\mathbf{g}(f(x,y)) \cdot D\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos y & \ln x \\ \frac{1}{\cos y} & -\frac{\ln x}{\cos^2 y} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right.$

37. Aký uhol s osou o_x zviera dotyčnica v bode $T = (1,1,?)$ ku krivke určenej rovnicami $y = 1, z = \sqrt{1+x^2+y^2}$. Interpretujte túto úlohu geometricky a načrtnite obrázok. $\left[\alpha = \frac{\pi}{6}.\right]$

38. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f()t) = t^2 + 3t$ v bode $B = (1,?)$. $[t : -5x + y + 1 = 0\ n : x + 5y - 21 = 0]$

39. K elipsoidu $x^2+2y^2+z^2=1$. Nájdite dotykovú rovinu, ktorá je rovnobežná s rovinou $4x+2y+z=0$. $\left[4x+2y+z\pm\sqrt{19}=0\right]$

V úlohách 40 – 44 nájdite rovnicu dotykovej roviny a normály ku grafu funkcie f v bode T keď je dané:

40. $f(x,y)=xy$, $T=(?,2,2)$. $[\tau: 2x+y-z-2=0,\ n: x=1+2t, y=2+t, z=2-t]$

41. $f(x,y)=x^4+2x^2y-xy+x$, $T=(1,?,2)$. $[\tau: 5x+y-z-3=0,\ n: x=1+5t, y=0+t, z=2-t]$

42. $f(x,y)=x2^{xy^2}$,

    (a) $T=\left(\frac{1}{2},2,?\right)$. $\left[\tau: (32\ln 2)x+(4+16\ln 2)y-z-48\ln 2=0,\ n: x=\frac{1}{2}+32\ln 2t,\ y=2+(4+16\ln\right.$
    (b) $T=(2,1,?)$. $[\tau: (4\ln 2)x+(4+16\ln 2)y-z-24\ln 2=0,\ n: x=2+4\ln 2t,\ y=1+(4+16\ln 2)$

43. $f(x,y)=2x^2+y^2$, $T=(1,1,?)$. $[\tau: 4x+2y-z-3=0,\ n: x=1+4t,\ y=1+2t,\ z=3-t]$

44. $f(x,y)=2x^2-4y^2$, $T=(2,1,?)$. $[\tau: 8x-8y-z-4=0,\ n: x=2+8t,\ y=1-8t,\ z=4-t]$

45. Nájdite deriváciu funkcie $f(x,y)=e^y\cos(x+y)$ v bode $\mathbf{a}=\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ v smere vektora $\mathbf{e}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $\left[f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a})=-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\right]$

V príkladoch 46, 47 nájdite deriváciu funkcie v bode $\mathbf{a}$ v smere jednotkovho vektora $\mathbf{e}$, ktorý je určený bodmi A, B keď je dané :

46. $f(x,y,z)=3x^3-4y^3+2z^4$, $A=(2,2,1)$, $B=(5,4,6)$. $\left[f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a})=\frac{52}{\sqrt{38}}\right]$

47. $f(x,y)=3x^2-6xy^4+11y^5$, $A=(1,1)$, $B=(4,5)$. $\left[f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a})=\frac{124}{5}\right]$

48. Nech $f:\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbf{R}$, $f(x,y,z)=xy^2+z^3-xyz$. Nájdite deriváciu funkcie f v bode $\mathbf{a}=(1,1,2)$ v smere vektora $\mathbf{e}$, ktorý zviera so súradnicovmi osami uhly $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$, $\gamma=?$ $[f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a})=5]$

V úlohách 49 – 51 nájdite smer, v ktorom je derivácia v smere maximálna a hodnotu tejto derivácie, keď je dané :

49. $f(x,y)=3x^4+7y^2-4x^2y$, $\mathbf{a}=(1,0)$. $\left[\mathbf{e}=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right),\ f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a})=4\sqrt{10}\right]$

50. $f(x,y)=\ln\frac{x+y}{x-y}$, $\mathbf{a}=(3,0)$. $\left[\mathbf{e}=(0,1),\ f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a})=\frac{2}{3}\right]$

51. $f(x,y)=3x^2-6xy^4+11y^5$, $\mathbf{a}=(1,1)$. $[\mathbf{e}=(0,1),\ f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a})=31]$

52. Nájdite deriváciu funkcie $f(x,y)=3x^2-6xy+y^2$ v bode $\mathbf{a}=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$ v smere ľubovoľného jednotkového vektora $\mathbf{e}$. Zistite v akom smere je derivácia

    (a) nulová, $\left[\mathbf{e}_1=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \mathbf{e}_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$
    (b) najväčšia, $\left[\mathbf{e}_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$
    (c) najmenšia. $\left[\mathbf{e}_4=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

1.4 Extrémy.

V príkladoch 1 – 24 nájdite lokálne extrémy funkcií :

1. $f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$. $\left[f(0,0) = 0\right.$ relatívne minimum, v bodoch $(1,4)$, $(1,-4)$, $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ nemá ex

2. $f(x,y) = e^{2x}\left(x + y^2 + 2y\right)$. $\left[f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{e}{2}\right.$ relatívne minimum$\left.\right]$

3. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 18xy + 215$. $[f(6,6) = -1$ relatívne minimum, v bode $(0,0)$ nemá extrém$]$

4. $f(x,y) = 27x^2y + 14y^3 - 69y - 54x$. $\Big[f(1,1) = -82$ relatívne minimum, $f(-1,-1) = 82$ relatívne maximu

5. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 2$. $[f(-1,-1) = 3$ relatívne maximum, v bode $(0,0)$ nemá extrém$]$

6. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y + 2$. $[f(1,1) = 1$ relatívne minimum$]$

7. $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$. $\left[f\left(1, \frac{1}{2}\right) = 4\right.$ relatívne minimum, v bode $(0,0)$ nemá extrém$\left.\right]$

8. $f(x,y) = 5xy + \frac{25}{x} + \frac{8}{y}$, $x > 0$, $y > 0$. $\left[f\left(\frac{5}{2}, \frac{4}{5}\right) = 30\right.$ relatívne minimum$\left.\right]$

9. $f(x,y) = \frac{1}{2}y + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$. $[f(21,20) = 282$ relatívne maximum$]$

10. $f(x,y) = xy(2 - x - y)$. $\left[f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}\right.$ relatívne maximum, v bodoch $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$ nemá extrém

11. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\left(2y^2 + x^2\right)$. $\left[f(0,0) = 0\right.$ relatívne minimum, $f(0,1) = \frac{2}{e}$, $f(0,-1) = \frac{2}{e}$ relatívne max

12. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$. $\left[f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = -12\right.$, $f\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = -12$, relatívne minimum, v bode

13. $f(x,y) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{2}{3}}\left(1 - y^2\right)^{\frac{2}{3}}$. $[f(0,0) = 1$ relatívne maximum; v bodoch priamok $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$ sú lokálne minimá$]$

14. $f(x,y) = x^2y^2(1 - x - y)$. $\Big[$ $f\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{16}{3125}$ relatívne minimum, v bodoch $\{(x,0) \wedge x > 1\}$ a $\{(0,y) \wedge y$
v bodoch $\{(x,0) \wedge x < 1\}$ a $\{(0,y) \wedge y < 1\}$ sú lokálne minimá, pre ktoré f

15. $f(x,y) = x^2y^2(3 - 4x + 6y)$. $\Big[$ $f\left(\frac{3}{10}, -\frac{1}{5}\right) = \frac{27}{12400}$ relatívne maximum, v bodoch $\left\{(x,0) \wedge x > \frac{3}{4}\right\}$ a $\{($
v bodoch $\left\{(x,0) \wedge x < \frac{3}{4}\right\}$ a $\left\{(0,y) \wedge y > \frac{1}{2}\right\}$ sú lokálne minimá, pre

16. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x$. $\left[f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right) = -\frac{4}{3}\right.$ relatívne minimum$\left.\right]$

17. $f(x,y,z) = 3x^2 + 3x + 2y^2 + 2yz + 2y + 2z^2 - 2z$. $\left[f\left(-\frac{1}{2}, -1, 1\right) = -\frac{7}{4}\right.$ relatívne minimum$\left.\right]$

18. $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$. [v bode $(2,1,7)$ nemá extrém]

19. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$. $[f(-1,-2,3) = -14$ relatívne minimum$]$

20. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. [v bode $(0,0,0)$ nemá extrém]

21. $f(x,y,z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz + 2yz + 1$. $[f(0,0,0) = 1$ relatívne minimum$]$

22. $f(x,y,z) = y^2 + 2z^2 + 2x - xy - xz$. $\left[\text{v bode } \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)\right.$ nemá extrém$\left.\right]$

23. $f(x,y,z) = 2x - y + z - yz - x^2 - y^2 - z^2$. [$f(1,-1,1) = 2$ relatívne maximum]

24. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$. [$f(24,-144,-1) = -6913$ relatívne minimum; v bode $(0,0,-1)$ nie je extrém]

    Nájdite lokálne extrémy funkcie a nakreslite graf funkcie f, ak:

25. $f(x,y) = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$. [$f(0,0) = 2$ minimum]

26. $f(x,y) = -x^2 + 4x - y^2 - 6y - 9$. [$f(2,-3) = 4$ maximum]

27. $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2x - 2y$. [v bode $(-1,-1)$ nie je extrém]

28. Zistite, či danou rovnicou a bodom je implicitne určená funkcia. Ak áno, nájdite jej prvú a druhú deriváciu v príslušnom bode $x^2+y^2-4x-10y+4 = 0$, $\mathbf{a} = (6,8)$. $\left[g'(6) = -\frac{4}{3},\ g''(6) = -\frac{25}{27}\right]$

29. Zistite, či danou rovnicou a bodom je implicitne určená funkcia. Ak áno, nájdite jej prvé derivácie v príslušnom bode $x^2 + y^2 + z^5 + 2x - y - 4 = 0$, $\mathbf{a} = (1,0,1)$. $\left[\frac{\partial g(1,0)}{\partial x} = -\frac{4}{5},\ \frac{\partial g(1,0)}{\partial y} = \frac{1}{5}\right]$

30. Zistite, či danou rovnicou a bodom je implicitne určená funkcia. Ak áno, nájdite jej prvú a druhú deriváciu v príslušnom bode $x^2+y^2+2x-3y+2 = 0$, $\mathbf{a} = (0,1)$. [$g'(0) = 2, g''(0) = 10$]

31. Zistite, či danou rovnicou a bodom je implicitne určená funkcia. Ak áno, nájdite jej prvú a druhú deriváciu v príslušnom bode $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$, $\mathbf{a} = (1,1)$. [$g'(1) = -1, g''(1) = -8$]

32. Zistite, či danou rovnicou a bodom je implicitne určená funkcia. Ak áno zistite, či je v danom bode extrém ak $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 1 = 0$, $\mathbf{a} = (-1,0)$. [je, $g(-1) = 0$ je relatívne maximum]

33. Zistite, či danou rovnicou a bodom je implicitne určená funkcia. Ak áno zistite, či je v danom bode extrém ak $x^4 + y^3 + 2x^2y + 2 = 0$, $\mathbf{a} = (1,-1)$. [je, $g(1) = -1$ je relatívne maximum]

34. Zistite, či danou rovnicou a bodom je implicitne určená funkcia. Ak áno zistite, či je v danom bode extrém ak $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 1 = 0$, $\mathbf{a} = (-3,-2)$. [je, $g(-3) = -2$ je relatívne minimum]

35. Zistite, či danou rovnicou a bodom je implicitne určená funkcia. Ak áno zistite, či je implicitne určená funkcia g v danom bode konvexná alebo konkávna, ak $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$, $\mathbf{a} = (1,1)$. [konkávna]

36. Zistite, či danou rovnicou a bodom je implicitne určená funkcia. Ak áno zistite rovnicu dotykovej roviny funkcie g v danom bode.. $x^2-y^2+z^2-6 = 0$, $\mathbf{a} = (1,2,-3)$. $\left[\frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{3}(y-2) - z - 3 = 0\right]$

37. Zistite, či danou rovnicou a bodom $3x^2+2y^2+z^2-21=0$, $\mathbf{a}=(2,2,1)$ je implicitne určená funkcia. Ak áno zistite rovnicu dotykovej roviny funkcie g, ak dotyková rovina má byť rovnobežná s rovinou $6x+4y+z=0$. $[12x+8y+2z-21=0]$

38. Zistite, či danou rovnicou a bodom $x_1^2-x_2^2+y^4+2x_1-x_2-4=0$, $\mathbf{a}=(1,0,1)$ je implicitne určená funkcia. Ak áno zistite rovnicu dotykovej roviny. $[4x_1-x_2+4y-8=0]$

39. Zistite, či danou rovnicou a bodom $x_1^2-x_2^2+y^4+2x_1-x_2-4=0$, $\mathbf{a}=(1,0,1)$ je implicitne určená funkcia. Ak áno zistite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie g v bode $\mathbf{a}$ ak $\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)=0$, $\mathbf{a}=(1,0)$. $[x-y-1=0]$

V príkladoch 40 – 49 nájdite viazané extrémy danej funkcie na množine M.

40. $f(x,y)=x^3+y^3$, $M=\{(x,y)\,;\,x+y-3=0\}$. $\left[f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{2}\ \text{ je relatívne minimum}\right]$

41. $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$, $M=\{(x,y)\,;\,2x-y=0\}$. $\left[f\left(\frac{12}{27},\frac{24}{27}\right)=-\frac{32}{81}\ \text{je relatívne minimum}\right]$:

42. $f(x,y)=x^2+y^2$, $M=\left\{(x,y)\,;\,x^2+4y^2-1=0\right\}$. $\left[f\left(0,\frac{1}{2}\right)=f\left(0,-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\ \text{ sú relatívne minimá, } f(1\right.$

43. $f(x,y)=x^2-xy+y^2-3x+10$, $M=\left\{(x,y)\,;\,x^2+y^2-9=0\right\}$. $\left[f\left(\frac{\sqrt{27}}{2},\frac{3}{2}\right)=19-\frac{27}{4}\sqrt{3}\text{ je relatívne mi}\right.$

44. $f(x,y)=x^2+2y$, $M=\left\{(x,y)\,;\,x^2-2x+2y^2+4y=0\right\}$. $[f(0,0)=0\ \text{ je relatívne minimum, } f(2,-2)=$

45. $f(x,y)=x^2+y^2$, $M=\left\{(x,y)\,;\,\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1\right\}$. $\left[f\left(\frac{pq^2}{p^2+q^2},\frac{p^2q}{p^2+q^2}\right),\,p,q\ \text{- pevné je minimum}\right]$

46. $f(x,y)=x+y$, $M=\left\{(x,y)\,;\,\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2},a>0\right\}$ $\left[f\left(\sqrt{2}a,\sqrt{2}a\right)=2\sqrt{2}a\ \text{ je relatívne minimum, } f\left(-\right.\right.$

47. $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $M=\{(x,y)\,;\,x+y=2\}$. $[f(1,1)=2\ \text{ je relatívne minimum}]$

48. $f(x,y)=xy-x+y-1$, $M=\{(x,y)\,;\,x+y=1\}$. $\left[f\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}\ \text{ je relatívne maximum}\right]$

49. $f(x,y)=xy-x+y-1$, $M=\left\{(x,y)\,;\,y=x^2\right\}$. $\left[f(-1,1)=0\ \text{ je relatívne maximum, } f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{9}\right)=\frac{32}{27}\ \text{ je re}\right.$

50. Daným bodom $\mathbf{p}=(1,4)$ veďte priamku tak, aby súčet kladných úsekov, ohraničených na súradnicových osiach bol najmenší. (Nakreslite obrázok!). $[2x+y-6=0]$

51. Do kužeľa o výške 9 a polomere 3 vpíšte valec najväčšieho objemu (Nakreslite obrázok!). $[r=2,v=3]$

V príkladoch 52 – 59 nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu, ktorú nadobúda daná funkcia na kompaktnej množine M.

52. $f(x,y)=x^2+y^2$, $M=$ úsečka pq, $p=(-1,4)$, $q=(1,0)$. $\left[\max f=f(-1,4)=75,\ \min f=f\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}\right.$

53. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, M =obdĺžnik (aj s vnútrom) určený bodmi $\mathbf{a} = (0,-1)$, $\mathbf{b} = (2,-1)$, $\mathbf{c} = (2,2)$, $\mathbf{d} = (0,2)$. [$\max f = f(2,-1) = 13$, $\min f = f(1,1) = -1 = f(0,-1)$]

54. $f(x,y) = 3xy$, $M = \{(x,y)\,;\, x^2 + y^2 \le 2\}$. [$\max f = f(1,1) = 3 = f(-1,-1)$, $\min f = f(-1,1) = -3 =$

55. $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2 + 2x - 2y$, $M = \{(x,y)\,;\, x^2 - 2x + y^2 + 2y \le 0\}$. $\left[\max f = f(1,-1) = 4,\ \min f = 2 = f(u,v),\ \text{kde}\ (u-1)^2 + (v+1)^2 = 2\right]$

56. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16$, $M = \{(x,y)\,;\, x^2 + y^2 \le 25\}$. [$\max f = f(-5,0) = 101$, $\min f = f(5,0) = -1$

57. $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$, $M = \{(x,y)\,;\, x \ge 0, y \ge 0, y \le 3 - x\}$. [$\max f = f(0,0) = -1$, $\min f = f(0,3) = -19$]

58. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 3x + 10$, $M = \{(x,y)\,;\, x \ge y, x^2 + y^2 \le 9\}$. $\left[\max f = f\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{3}}\right) = 14.5 + \frac{9}{\sqrt{2}},\ \min f = f(2,1) = 7\right]$

59. $f(x,y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 15x + 20$, $M = \{(x,y)\,;\, x \le 5,\ x^2 - y^2 \ge 1\}$. $[\max f = f\left(5, -2\sqrt{6}\right) = 43 + 10\sqrt{6}$

60. Za akých predpokladov môžu byť rovnice $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ riešené pre r, ϑ ako funkcie x, y. Kde je inverzná funkcia diferencovateľná.

61. Riešte rovnice $x = r\cos\vartheta\cos\varphi$, $y = r\cos\vartheta\sin\varphi$, $z = r\sin\vartheta$ pre r, ϑ, φ ako funkcie premenných x, y, z. Kedy je táto inverzia diferencovateľná.

62. Ukážte, že $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $\mathbf{f}(x,y) = \left(x^3 + 2xy + y^2, x^2 + y\right)$ je lokálne invertovateľná v okolí bodu $(1,1)$. Vypočítajte $D\mathbf{f}^{-1}(4,2)$ a nájdite afinnú aproximáciu $\mathbf{f}^{-1}(u,v)$ v okolí bodu $(4,2)$.

63. Nech $\mathbf{f} : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $\mathbf{f}(x,y,z) = (x+y+z, xy+yz+zx, xyz)$. Nech a,b,c sú rôzne reálne čísla. Ukážte, že $\mathbf{f}$ má inverziu $\mathbf{g}$ v okolí bodu $\mathbf{a} = (a,b,c)$ a že $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}(\mathbf{a})) = [(c-b)(a-c)(b-a)]^{-1}$.

1.5 Integrály.

V úlohách 1 - 6 vypočítajte dvojné integrály:

1. $\iint_I x^2 y \cos\left(xy^2\right) dxdy$, $I = \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle \times \langle 0, 2\rangle$. $\left[-\frac{\pi}{16}\right]$
2. $\iint_I y e^{x+y} dxdy$, $I = \langle 0,2\rangle \times \langle 0,1\rangle$. $\left[e^2 - 1\right]$
3. $\iint_I \frac{1}{(2x+y+1)^2} dxdy$, $I = \langle 0,4\rangle \times \langle 0,1\rangle$. $\left[\ln\frac{3}{\sqrt{5}}\right]$
4. $\iint_I \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dxdy$, $I = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$. $\left[\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right]$
5. $\iint_I \ln(1+x)^{2y} dxdy$, $I = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$. $[2\ln 2 - 1]$
6. $\iint_I \frac{1}{(1-xy)^2} dxdy$, $I = \langle 2,3\rangle \times \langle 1,2\rangle$. $\left[\ln\left(\frac{6}{5}\right)\right]$

   V úlohách 7 – 19 vypočítajte dvojné integrály. Načrtnite obrázok množiny A.

7. $\iint_A \cos(x+y)\,dxdy,\ A=\{(x,y)\,;\,0\le x\le \pi,\ x\le y\le \pi\}$. $[-2]$

8. $\iint_A |xy|dxdy,\ A=\{(x,y)\,;\,1\le |x|\le 2,\ 1\le |y|\le 2\}$. $[9]$

9. $\iint_A ye^x dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\,y^2\le x\le y+2\right\}$. $\left[\frac{1}{2}\left(e^4+e\right)\right]$

10. $\iint_A (x+y)\,dxdy,\ A=\{(x,y)\,;0\le x\le 2,\ y\le x\le 2y\}$. $\left[\frac{7}{3}\right]$

11. $\iint_A \frac{x^2}{y^2}dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\,0\le \frac{1}{x}\le y\le x,\ x\le 2\right\}$. $\left[\frac{9}{4}\right]$

12. $\iint_A \left(3x^2+2y\right)dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\,x^2\le y\le \sqrt{x},\ x\ge 0\right\}$. $\left[-\frac{1}{70}\right]$

13. $\iint_A |x|dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\,x^2\le y,\ 4x^2+y^2\le 12\right\}$. $\left[4\sqrt{3}-\frac{10}{3}\right]$

14. $\iint_A \frac{x}{3}dxdy,\ A=\{(x,y)\,;\,x\le 2+\sin y,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ y\le 2\pi\}$. $\left[\frac{3}{2}\pi\right]$

15. $\iint_A xydxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\,x-4\le y,\ y^2\le 2x\right\}$. $\left[\int_{-2}^{3}\left(\int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} xydx\right)dy\frac{975}{16}\right]$

16. $\iint_A \sqrt{xy-y^2}dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\,0\le y\le 3,\ \frac{x}{10}\le y\le x\right\}$. $[162]$

17. $\iint_A \left(x^2+y^2\right)dxdy$, A je ohraničená krivkami $y=0,\ y-x+1,\ y=x+1$. $\left[\frac{1}{3}\right]$

18. $\iint_A \left(x^2+y\right)dxdy$, A je ohraničená krivkami $y=\frac{1}{2}x,\ y=2x,\ xy=2,\ x\ge 0$. $\left[\frac{17}{6}\right]$

19. $\iint_A \frac{1}{x+y+1}dxdy$, A je trojuholník $KLM,\ K=(1,2)\,,\ L=(5,2)\,,\ M=(4,4)$. $\left[\frac{72}{5}\ln 18-16\ln 16+\frac{8}{5}\ln 8\right]$

   V úlohách 20 – 23 vypočítajte plošný obsah rovinných obrazcov určených množinou A, keď

20. A je ohraničená krivkami: $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ a $x^2+y^2=4$. $\left[\pi-\frac{4}{3}\right]$

21. A je ohraničená krivkami: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,\ y^2=x+1$ a obsahuje bod $(0,0)$. $\left[8\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]$

22. $A=\left\{(x,y)\,;\,0\le y\le x,\ x^2+y^2\le 2x\right\}$. $\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right]$

23. $A=\left\{(x,y)\,;\,x\le y\le \sqrt{3x},\ 4x\le x^2+y^2\le 8x\right\}$. $\left[\pi-6+3\sqrt{3}\right]$

   V úlohách 24 – 35 pouitím vhodnej transformácie vypočítajte dané integrály a načrtnite obrázok A.

24. $\iint_A \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\,x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}$. $\left[\frac{\pi}{6}\right]$

25. $\iint_A xy^2dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\,2y\le x^2+y^2\le 4y\right\}$. $[0]$

26. $\iint_A \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$. $\left[\frac{2}{3}\pi ab\right]$

27. $\iint_A \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\ \pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\right\}.$ $\left[-6\pi^2\right]$

28. $\iint_A \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\ x^2+y^2\le ax\right\}.$ $\left[\frac{a^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)\right]$

29. $\iint_A (12-3x-4y)\,dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\ x^2+4y^2\le 4\right\}.$ $[25\pi]$

30. $\iint_A \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\ 1\le x^2+y^2\le 9,\ \frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le\sqrt{3}x\right\}.$ $\left[\frac{\pi^2}{6}\right]$

31. $\iint_A (x-y)\,dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\ x^2+y^2\le x+y\right\}.$ $[0]$

32. $\iint_A (1-2x-3y)\,dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\ x^2+y^2\le 4\right\}.$ $[4\pi]$

33. $\iint_A ydxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\ x^2+y^2\le a^2,\ y\le x\right\}.$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{3}a^3\right]$

34. $\iint_A \sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\ x^2+y^2\le 1,\ 0\le x\le y\right\}.$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

35. $\iint_A \ln\left(1+x^2+y^2\right)dxdy,\ A=\left\{(x,y)\,;\ y\le\sqrt{r^2-x^2},\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}.$ $\left[\frac{\pi}{4}\left(1+r^2\right)\ln\left(1+r^2\right)-r^2\right]$

V úlohách 36 – 49 vypočítajte trojné integrály. Načrtnite obrázok množiny A.

36. $\iiint_A (1-x)\,yzdxdydz,\ A=\{(x,y,z)\,;\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ z\le 1-x-y\}.$ $\left[\frac{1}{144}\right]$

37. $\iiint_A zdxdydz,\ A=\left\{(x,y,z)\,;\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}???\right\}.$ $\left[\frac{\pi}{8}\right]$

38. $\iiint_A z^2dxdydz,\ A=\left\{(x,y,z)\,;\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}\right\}.$ $\left[\frac{\pi}{15}\left(2\sqrt{2}-1\right)\right]$

39. $\iiint_A \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz,\ A=\left\{(x,y,z)\,;\ x^2+y^2\le z^2,\ x^2+y^2+z^2\le r^2\right\}.$ $\left[2\frac{2-\sqrt{2}}{5}\pi r^5\right]$

40. $\iiint_A \left(x^2+y^2\right)dxdydz,\ A=\left\{(x,y,z)\,;\ x^2+y^2\le 2z,\ z\le 2\right\}.$ $\left[\frac{16}{3}\pi\right]$

41. $\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz,\ A=\left\{(x,y,z)\,;\ x^2+y^2+z^2\le z\right\}.$ $\left[\frac{\pi}{10}\right]$

42. $\iiint_A \frac{xy}{\sqrt{z}}dxdydz,\ A=\left\{(x,y,z)\,;\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ 0\le z\le c,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\le 0\right\}.$ $\left[\frac{a^2b^2\sqrt{c}}{36}\right]$

43. $\iiint_A \left(x^2+y^2\right)dxdydz,\ A=\left\{(x,y,z)\,;\ 4\le x^2+y^2+z^2\le 9,\ z\ge 0\right\}.$ $\left[\frac{844}{15}\pi\right]$

44. $\iiint_A x^2yzdxdydz,\ A=\left\{(x,y,z)\,;\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\le 0,\ 4x^2+y^2+z^2\le 9\right\}.$ $\left[-\frac{1}{840}\right]$

45. $\iiint_A xyz dx dy dz$, $A = \left\{(x,y,z)\,;\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0,\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$. $\left[\frac{1}{48}\right]$

46. $\iiint_A (2x+3y-z)\, dx dy dz$, A je ohraničená plochami $z=0$, $z=a$, $x=0$, $y=0$, $x+y=b$, $a>0$, $b>0$. $\left[\frac{ab^2(-6a+20b)}{24}\right]$

47. $\iiint_A \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dx dy dz$, A je štvorsten ohraničený rovinami $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$. $\left[\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{8}\right]$

48. $\iiint_A z dx dy dz$, A je ohraničená plochami $z^2 = 4\left(x^2+y^2\right)$ a $z=2$. $[\pi]$

49. $\iiint_A x dx dy dz$, A je ohraničená plochami $x^2+y^2=-2z+9$, $z=0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. $\left[\frac{81}{5}\right]$

V úlohách 50 – 63 nájdite objem množiny A. Načrtnite obrázok!

50. $A = \left\{(x,y,z)\,;\, x^2+y^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq y^2\right\}$. $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

51. $A = \left\{(x,y,z)\,;\, -1 \leq x \leq 1,\, \sqrt{\frac{1-x^2}{2}} \leq y \leq \sqrt{1-x^2},\, 0 \leq z \leq 4\right\}$. $\left[\pi\left(2-\sqrt{2}\right)\right]$

52. $A = \left\{(x,y,z)\,;\, x^2+y^2+z^2 \leq 12,\, x^2+y^2 \leq 4z\right\}$. $\left[\frac{48\sqrt{3}-40}{3}\pi\right]$

53. $A = \left\{(x,y,z)\,;\, x^2+y^2 \leq 2x,\, x^2+y^2+z^2 \leq 4\right\}$. $\left[\frac{16}{9}(3\pi-4)\right]$

54. $A = \left\{(x,y,z)\,;\, 4 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9,\, z \geq \sqrt{x^2+y^2}\right\}$. $\left[\frac{19}{3}\pi\left(2-\sqrt{2}\right)\right]$

55. A je ohraničená plochami $z = 6-x^2-y^2$ a $z=\sqrt{x^2+y^2}$. $\left[\frac{32}{3}\pi\right]$

56. A je ohraničená plochami $z=4-y^2$, $z=y^2+2$, $x=-1$, $x=2$. $[8]$

57. A je ohraničená plochami $z=x^2+y^2$ a $z=x^2+2y^2$, $y=x$, $y=2x$, $x=1$. $\left[\frac{7}{12}\right]$

58. A je ohraničená plochami $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z^2$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$. $\left[4\pi\left(2-\sqrt{2}\right)\right]$

59. A je ohraničená plochami $x^2+y^2=9$, $z=5$ a $x+y+z=8$. $[117\pi]$

60. A je ohraničená plochami $2z=x^2+y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$. $\left[\frac{4}{3}\pi\right]$

61. A je ohraničená plochami $z=0$, $z=2-y$, $y=x^2$. $\left[\frac{32}{15}\sqrt{2}\right]$

62. A je ohraničená plochami $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=z-2$. $\left[\frac{7}{2}\pi\right]$

63. A je ohraničená plochami $x=0$, $z=0$, $y=1$, $y=3$, $x+2z=3$. $\left[\frac{9}{2}\right]$