Contents

Chapter 1

Integrálny počet FJP

1.1 Určitý integrál

Veta 1 *(Newtonov - Leibnitzov vzorec) Nech funkcia* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *je spojitá a* $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *je jej ľubovolná primitívna funkcia. Potom*

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b\,.$$

Veta 2 *Nech* $f : I \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia na intervale* I*. Potom k nej existuje primitívna funkcia.*

1.2 Neurčitý integrál

1.2.1 Definícia

Definícia 1 *Nech* I *je interval a* $f : I \to \mathbb{R}$ *je funkcia. Potom jej ľubovolnú primitívnu funkciu* $F : I \to \mathbb{R}$ *nazývame neurčitý integrál funkcie* f*. Označujeme* $F(x) = \int f(x)\, dx$*.*

1.2.2 Metóda per partes

Veta 3 *Nech funkcie* $f : I \to \mathbb{R}$ *a* $g : I \to \mathbb{R}$ *sú spojito diferencovateľné na intervale* I*. Nech* $H : I \to \mathbb{R}$ *je primitívna funkcia funkcie* $(f'g) : I \to \mathbb{R}$*. Potom* $(fg - H) : I \to \mathbb{R}$ *je primitívna funkcia funkcie* $(fg') : I \to \mathbb{R}$*. V symbolike neurčitých integrálov to znamená, že*

$$\int (fg') = fg - \int (f'g).$$

Dôsledok 1 *Nech funkcie $f : I \to \mathbb{R}$ a $g : I \to \mathbb{R}$ sú spojito diferencovateľné na intervale I a body $a, b \in I$ sú ľubovolne zvolené. Potom*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

1.2.3 Substitučná metóda

Veta 4 *(Prvá veta o substitučnej metóde) Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \to I \subseteq \mathbb{R}$ je spojito diferencovateľná a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Nech $F : I \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $f : I \to \mathbb{R}$. Potom $(F \circ \varphi) : J \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $((f \circ \varphi)\varphi') : J \to \mathbb{R}$.*

Dôsledok 2 *Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \to I \subseteq \mathbb{R}$ je spojito diferencovateľná a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Nech $\alpha, \beta \in J$ sú ľubovolné. Potom*

$$\int_\alpha^\beta ((f \circ \varphi)\varphi') = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$$

Veta 5 *(Druhá veta o substitučnej metóde) Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \to I$ je spojito diferencovateľná bijekcia a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Nech $G : J \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $((f \circ \varphi)\varphi') : J \to \mathbb{R}$. Potom $(G \circ \varphi^{-1}) : I \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $f : I \to \mathbb{R}$.*

Dôsledok 3 *Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \to I$ je spojito diferencovateľná bijekcia a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom pre každé $a, b \in I$ platí:*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} ((f \circ \varphi)\varphi') = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

1.2.4 Niektoré význačné substitúcie

I. **Integrály typu**

$$\int R\left(c, x, \sqrt[k_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[k_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[k_s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Vypočítame najmenší spoločný násobok $k = \operatorname{lcm}\{k_1, k_2, \ldots, k_s\}$.

2. Položíme
$$\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t = \varphi^{-1}(x).$$
3. Potom
$$x = \frac{b-dt^k}{ct^k-a} = \varphi(t).$$
4. Ďalej
$$dx = \varphi'(t)\,dt = \frac{ad-bc}{(ct^k-a)^2}kt^{k-1}\,dt.$$
5. Ešte máme
$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k, \quad \text{preto} \quad \sqrt[k_i]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t^{\frac{k}{k_i}}.$$
6. Je zrejmé, že $\frac{k}{k_i}$ je celé číslo. Preto po dosadení do pôvodného integrálu dostávame integrál
$$\int R\left(c, \frac{b-dt^k}{ct^k-a}, t^{\frac{k}{k_1}}, t^{\frac{k}{k_2}}, \dots, t^{\frac{k}{k_s}}\right) \frac{ad-bc}{(ct^k-a)^2}kt^{k-1}\,dt,$$
čo je integrál z racionálnej funkcie.

II. **Integrály typu**

$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx,$$

kde $a > 0$ a funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x.$$
2. Potom
$$ax^2+bx+c = t^2 \pm 2\sqrt{a}xt + ax^2.$$
V tejto rovnosti vypadne druhá mocnina x. Preto môžeme vypočítať x.
3. Dostávame
$$x = \frac{t^2-c}{b \pm 2\sqrt{a}t} = \varphi(t).$$
4. Potom
$$dx = \varphi'(t)\,dt = \frac{\pm 2\sqrt{a}t^2 + 2tb \pm 2c\sqrt{a}}{(b \pm 2\sqrt{a}t)^2}\,dt.$$

5. Treba si ešte uvedomiť, že

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x = \pm t \pm \sqrt{a}\frac{t^2-c}{b \pm 2\sqrt{a}t}.$$

6. Preto daný integrál

$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx$$

je prevedený na integrál z racionálnej funkcie

$$\int R\left(c,\ \frac{t^2-c}{b \pm 2\sqrt{a}t}\ ,\ \pm t \pm \sqrt{a}\frac{t^2-c}{b \pm 2\sqrt{a}t}\right)\left(\frac{\pm 2\sqrt{a}t^2 + 2tb \pm 2c\sqrt{a}}{(b \pm 2\sqrt{a}t)^2}\right)\, dt.$$

III. **Integrály typu**

$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx,$$

kde $c > 0$ a funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} \pm xt.$$

Pre jednoduchosť budeme uvažovať len o jednej zo štyroch možností

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} - xt.$$

2. Potom

$$ax^2+bx+c = c - 2\sqrt{c}xt + x^2t^2.$$

V tejto rovnosti vypadne c, preto môžeme krátiť $x-$om. Vypočítame x.

3. Dostávame

$$x = \frac{2t\sqrt{c}+b}{t^2-a} = \varphi(t).$$

4. Potom

$$dx = \varphi'(t)\, dt = \frac{-2(t^2\sqrt{c} + tb + \sqrt{c}a)}{(t^2-a)^2}\, dt.$$

5. Treba si ešte uvedomiť, že

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} - xt = \sqrt{c} - \left(\frac{2t\sqrt{c}+b}{t^2-a}\right)t.$$

6. Preto daný integrál
$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx$$
je prevedený na integrál z racionálnej funkcie
$$\int R\left(c,\ \frac{2t\sqrt{c}+b}{t^2-a},\ \sqrt{c}-\left(\frac{2t\sqrt{c}+b}{t^2-a}\right)t\right)\left(\frac{-2(t^2\sqrt{c}+tb+\sqrt{c}a)}{(t^2-a)^2}\right)\, dt.$$

IV. **Integrály typu**
$$\int R\left(c, \sin x, \cos x\right)\, dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t = \varphi^{-1}(x).$$
2. Dostávame
$$x = 2\operatorname{arctg} t = \varphi(t).$$
3. Potom
$$dx = \varphi'(t)\, dt = \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$
4. Ďalej
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$
5. Preto daný integrál
$$\int R\left(c, \sin x, \cos x\right)\, dx$$
prevedieme na integrál z racionálnej funkcie
$$\int R\left(c,\ \frac{2t}{1+t^2}\ ,\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

V. **Integrály typu**
$$\int R\left(c, \operatorname{tg} x, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x\right)\, dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme
$$\operatorname{tg} x = t = \varphi^{-1}(x).$$

2. Dostávame
$$x = \operatorname{arctg} t = \varphi(t).$$

3. Potom
$$dx = \varphi'(t)\,dt = \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

4. Ďalej
$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

5. Preto daný integrál
$$\int R\left(c, \operatorname{tg} x, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x\right)\,dx$$
prevedieme na integrál z racionálnej funkcie
$$\int R\left(c, t, \frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

1.2.5 Príklady

Časť I

Vypočítajte nasledujúce integrály:

1. $\int x \sin x dx$. .... $[\sin x - x\cos x]$.
2. $\int (x^3 - x + 1)e^{2x} dx$. .... $\left[\frac{e^{2x}}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)\right]$.
3. $\int_0^{\pi} (2x^2 + 3)\cos 2x dx$. .... $[\pi]$.
4. $\int x \log_{10} 2x dx$. .... $\left[\frac{x^2}{2}\left(\log_{10} 2x - \frac{1}{2\ln 10}\right)\right]$.
5. $\int e^x \sin x dx$. .... $\left[\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)\right]$.
6. $\int \frac{e^x}{(e^x+3)^7} dx$. .... $\left[-\frac{1}{6(e^x+3)^6}\right]$.
7. $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}} \mathrm{d}x$. .... $\left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}\right]$.
8. $\int \frac{x}{\sqrt{3-4x^2}} \mathrm{d}x$. .... $\left[-\frac{1}{4}\sqrt{3-4x^2}\right]$.
9. $\int \cos(\ln x)\,dx$. .... $\left[\frac{x}{2}\left(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right)\right]$.

10. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x} dx.$ .... $[5x + 2\ln|x| + 3\ln|x-2| + 4\ln|x+2|]$.

11. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^3} dx.$ .... $\left[2\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - 2\ln|x+1|\right]$.

12. $\int \frac{1}{x^3+1} dx.$ .... $\left[\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right]$.

13. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{(e^x-2)e^x}{e^{2x}+2e^x+7} dx.$ .... $\left[\frac{1}{2}(\ln 42 - \ln 15) - \frac{3}{\sqrt{6}}\left(\operatorname{arctg}\frac{6}{\sqrt{6}} - \operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{6}}\right)\right]$.

14. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x+1}{\cos^4 x+\cos^3 x} \sin x dx.$ .... $\left[-\frac{7}{2} + 2\ln\frac{3}{2}\right]$.

15. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}} dx.$ .... $\left[\frac{12}{\sqrt[12]{x}} - \frac{6}{\sqrt[6]{x}} + 24\ln\left|\frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[12]{x}+1}\right|\right]$.

16. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} dx.$ .... $\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1},\ t = \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}\right]$.

17. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+3}} dx.$ .... $\left[\frac{3t}{2} - \frac{\ln|1-2t|}{2} - \frac{33}{4(1-2t)},\ t = -x + \sqrt{x^2+x+3}\right]$.

18. $\int \frac{1}{\sqrt{4-3x-x^2}} dx.$ .... $\left[-2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{4-3x-x^2}-2}{x}\right)\right]$.

19. $\int\limits_0^1 \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}} dx.$ .... $[-8,345]$.

20. $\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5} dx.$ .... $\left[\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{5}\left(3\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right]$.

21. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+1} dx.$ .... $\left[\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\right]$.

22. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x} dx.$ .... $[1,246]$.

23. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{5+2\cos x} dx.$ .... $[0,152]$.

24. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

    (a) $y = x\ln x$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$, $y = 0$. .... $\left[-\frac{9}{16} + \frac{15}{8}\ln 2\right]$.

    (b) Parabolou $y = x^2-6x+8$ a jej dotyčnicami v bodoch $A = [1,3]$, $B = [4,0]$. .... $\left[\frac{9}{4}\right]$.

25. Vypočítajte objem zrezaného kužeľa, ktorý vznikne rotáciou elementárnej oblasti okolo osi o_x. Polomery jeho podstáv sú $r = 1$, $R = 2$ a výška $v = 3$. .... $[7\pi]$.

Časť II

Vypočítajte nasledujúce integrály:

1. $\int x \operatorname{arctg} x dx.$ .... $\left[\frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right].$
2. $\int x^2 e^{3x} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{e^{3x}}{27}(9x^2 - 6x + 2)\right].$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(2x) \sin x dx.$ .... $\left[\frac{2}{5}e^{\pi} + \frac{1}{5}\right].$
4. $\int x \ln x^2 dx.$ .... $\left[\frac{x^2}{2}(\ln x^2 - 1)\right].$
5. $\int \ln(x^2+1) dx.$ .... $\left[x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x\right].$
6. $\int\limits_1^e \ln^2 x \mathrm{d}x.$ .... $\left[e^{-2}\right].$
7. $\int \frac{1}{4+3x^2} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{2}\right].$
8. $\int \frac{x}{4+3x^2} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{6}\ln(4+3x^2)\right].$
9. $\int \frac{x}{(x^2+1)^3} \mathrm{d}x.$ .... $\left[-\frac{1}{4(x^2+1)^2}\right].$
10. $\int e^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x.$ .... $\left[2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)\right].$
11. $\int e^x \operatorname{cotg} e^x \mathrm{d}x.$ .... $[\ln|\sin e^x|].$
12. $\int x\sqrt[3]{x+2} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+2)^7} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^4}\right].$
13. $\int \frac{1-x}{x^2+x} dx.$ .... $[\ln|x| - 2\ln|x+1|].$
14. $\int \frac{x^3-2x^2+9}{x^2-x-2} dx.$ .... $\left[\frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x-2| - 2\ln|x+1|\right].$
15. $\int \frac{x}{x^3-3x+2} dx.$ .... $\left[\frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{9}\ln|x+2|\right].$
16. $\int \frac{x^2+x+12}{x^3+7x^2+11x+5} dx.$ .... $\left[\ln|x+5| - \ln|x+1| - \frac{3}{x+1}\right].$
17. $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+7} dx.$ .... $\left[\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+7) - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right].$
18. $\int \frac{x+2}{x^3+x^2+5x-7} dx.$
    $\left[\frac{3}{10}\ln|x-1| - \frac{3}{20}\ln\left(x^2+2x+7\right) + \frac{\sqrt{6}}{15}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{6}(x+1)}{6}\right)\right].$
19. $\int \frac{5x^3-5x^2-11x+5}{x^2-x-2} dx.$ .... $\left[\frac{5x^2}{2} + \ln|x-2| - 2\ln|x+1|\right].$
20. $\int \frac{e^x+10}{(e^{2x}-2e^x+5)} dx.$ .... $\left[2x - \ln\left|e^{2x} - 2e^x + 5\right| + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{e^x-1}{2}\right)\right].$

21. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^{2x}+2e^x-3}{e^{2x}+e^x-6} dx.$ .... $\left[\ln\sqrt{5}\right].$

22. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \frac{2e^x+3}{e^{2x}+2e^x+2} e^x \mathrm{d}x.$ .... $\left[\ln 2 + \operatorname{arctg} 3 - \frac{\pi}{4}\right].$

23. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \sin x + 3} dx.$
$\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sin^2 x + \sin x + 3\right) - \frac{\sqrt{11}}{11}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{11}}{11}\left(2\sin x + 1\right)\right)\right].$

24. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(5-\cos x)\sin x}{\cos^2 x - \cos x - 2} dx.$ .... $[-3\ln 2].$

25. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x + \sin^2 x + \sin x} dx.$
$\left[\ln|\sin x| - \frac{1}{2}\ln|\sin^2 x + \sin x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} + \sin x\right)\right]\right].$

26. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})} dx.$ .... $[\ln(1+\sqrt[6]{x})].$

27. $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx.$ .... $[7+\ln 4].$

28. $\int \frac{1-\sqrt[6]{x+1}}{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^4}} dx.$
$\left[\ln|x+1| - 3\ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right| - 6\operatorname{arctg}\left(\sqrt[6]{x+1}\right)\right].$

29. $\int \frac{1}{x+\sqrt{2x-1}} dx.$ .... $\left[\ln\left(2x + 2\sqrt{2x-1}\right) + \frac{2}{1+\sqrt{2x-1}}\right].$

30. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+2\sqrt{x-1}} dx.$ .... $\left[2\sqrt{x-1} - \ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)^4 - \frac{2}{1+\sqrt{x-1}}\right].$

31. $\int\limits_{1}^{27} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x^2}} \mathrm{d}x.$ .... $\left[8 + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}\right].$

32. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x-2x^2}} dx.$ .... $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arcsin\left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)\right)\right]$

33. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}} dx.$ .... $\left[\ln\left|\frac{-x-1+\sqrt{x^2+x+1}}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}}\right|\right].$

34. $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x.$ .... $[2\pi].$

35. $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx.$ .... $\left[-2\operatorname{arctg} t,\ t = \frac{\sqrt{3-2x-x^2}-\sqrt{3}}{x}\right].$

36. $\int\limits_{0}^{4} \frac{1}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{4}{45}\right].$

37. $\int \frac{1}{3-\cos x} dx.$ .... $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right].$

38. $\int \frac{1}{3+\cos x+\sin x}dx$. .... $\left[\frac{2\sqrt{7}}{7}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}\left(2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)}{7}\right)\right]$.

39. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x-2\sin x+3}dx$. .... $\left[-\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right)\right]$.

40. $\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}dx$. .... $\left[2(\ln|t-1|-\ln|t|-\operatorname{arctg} t),\ t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]$.

41. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}\mathrm{d}x$. .... $\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right]$.

42. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\cos^2 x+2}$. .... $\left[\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg} x\right)\right]$.

43. $\int \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}dx$. ...... $\left[x\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+2\right|+\operatorname{arctg}(x-1)\right]$.

44. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin 5x\cos x\mathrm{d}x$. .... $[\frac{1}{6}]$

45. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

(a) $y=\frac{27}{x^2+9}$, $y=\frac{x^2}{6}$. .... $\left[\frac{3}{2}(3\pi-2)\right]$.

(b) $y=\ln x$, $y=\ln^2 x$. ....$[3-e]$.

46. Kruh $x^2+y^2=8$ je rozdelený parabolou $y=\frac{x^2}{2}$ na dve časti. Vypočítajte obsah menšej z nich. .... $\left[2\pi+\frac{4}{3}\right]$.

47. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x. Oblasť je určená čiarami $y=\frac{2x}{\pi}$, $y=\sin x$, $x\geq 0$. .... $\left[\frac{\pi^2}{12}\right]$.

Časť III

Vypočítajte nasledujúce integrály:

1. $\int x\ln x dx$. .... $\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\right]$.

2. $\int xe^{-x}dx$. ....$[-xe^{-x}-e^{-x}]$.

3. $\int \operatorname{arctg} x dx$. .... $\left[x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]$.

4. $\int x^2 3^x dx$. .... $\left[\frac{3^x}{\ln 3}\left(x^2-\frac{x}{\ln 3}+\frac{1}{(\ln 3)^2}\right)\right]$.

5. $\int x\operatorname{arccotg} x\mathrm{d}x$. .... $\left[\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arccotg} x+\frac{x}{2}\right]$.

6. $\int_0^{\pi} x^2\sin x dx$. .... $\left[\pi^2-4\right]$.

7. $\int\limits_{0}^{1} x\operatorname{arccotg} x\mathrm{d}x$. .... $\left[\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\right]$.

8. $\int \frac{x^2}{5+x^3} dx.$ .... $\left[\frac{1}{3}\ln|5+x^3|\right]$.

9. $\int \frac{1}{3+9x^2} dx.$ .... $\left[\frac{1}{3\sqrt{3}}\text{arctg}\,(\sqrt{3}x)\right]$.

10. $\int \frac{x}{3+9x^2} dx.$ .... $\left[\frac{1}{18}\ln(3+9x^2)\right]$.

11. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx.$ .... $\left[\frac{-1}{2\sin^2 x}\right]$.

12. $\int \frac{\sin x}{\cos x-1} dx.$ .... $[-\ln|\cos x-1|]$.

13. $\int \frac{x}{\sqrt{2-5x^2}} dx.$ .... $[-\frac{1}{5}\sqrt{2-5x^2}]$.

14. $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt[4]{\sin x+\cos x}} dx.$ .... $\left[-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(\sin x+\cos x)^3}\right]$.

15. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\frac{x^2|x-2|^5}{|x+2|^3}\right]$.

16. $\int \frac{x^2-x+2}{(x-3)(x-1)^2} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\ln(x-1)^2|x-3|+\frac{1}{x-1}\right]$.

17. $\int \frac{3x^2-11x+7}{(x-3)(x^2-4x+4)} \mathrm{d}x.$ .... $\left[2\ln|x-2|+\ln|x-3|-\frac{3}{x-2}\right]$.

18. $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5} dx.$ .... $\left[\ln\left(x^2+2x+5\right)-\frac{1}{2}\,\text{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]$.

19. $\int \frac{x-1}{x^2-4x+7} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+7)+\frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\,\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right]$.

20. $\int \frac{x^3+3x^2+1}{x^2+x} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x|-3\ln|x+1|\right]$.

21. $\int \frac{3x^2-x-14}{x^3+x^2-5x+3} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\ln|x+3|+2\ln|x-1|+\frac{3}{x-1}\right]$.

22. $\int \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x^2+2x+3)} \mathrm{d}x.$ ... $\left[\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3|-\frac{3}{\sqrt{2}}\text{arctg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]$.

23. $\int \frac{x^2}{(1-x^2)(1+x^2)} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{4}\ln|1+x|-\frac{1}{4}\ln|1-x|-\frac{1}{2}\text{arctg}\,x\right]$.

24. $\int\limits_0^1 \frac{x+2}{x^2+2x+5} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{16}\right]$.

25. $\int\limits_4^5 \frac{2x^2-3x+10}{x^3-7x^2+10x} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\ln\frac{5}{18}\right]$.

26. $\int\limits_1^2 \frac{x^3-3x^2-10x+6}{x^2-4x-5} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{5}{2}-\ln 3\right]$.

27. $\int\limits_2^3 \frac{x^2+2}{x^3-3x^2+3x-1} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\ln 2+\frac{9}{8}\right]$.

28. $\int \frac{e^x}{4e^{2x}-8e^x+13} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{6}\text{arctg}\,\frac{2}{3}(e^x-1)\right]$.

29. $\int \frac{2e^{2x}-3e^{x}+10}{e^{2x}-7e^{x}+10}\mathrm{d}x.$ .... $[x-2\ln|e^x-2|+3\ln|e^x-3|]$.

30. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}dx.$ .... $\left[6\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}+\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)\right)\right]$.

31. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$ .... $\left[\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right|+2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right]$.

32. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx.$ .... $[2\sqrt{1+x}+\ln|\sqrt{1+x}-1|-\ln|1+\sqrt{1+x}|]$.

33. $\int \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}dx.$ ...... $\left[-\frac{t^2}{2}-4t-9\ln|t-3|+\ln|t+1|,\ t=\sqrt{2x+3}\right]$.

34. $\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx.$ .... $[\ln 9]$.

35. $\int \frac{1}{\sqrt{8-6x-9x^2}}dx.$ .... $\left[\frac{1}{3}\left(\arcsin\left(x+\frac{1}{3}\right)\right)\right]$

36. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}}dx.$ .... $\left[\ln\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right]$.

37. $\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}dx.$

$\left[2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t+1|+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1},\ t=\sqrt{x^2-x+1}-x\right]$.

38. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+\cos x}dx.$ .... $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right]$.

39. $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}dx.$ .... $\left[\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-\ln\left(\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right]$.

40. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\sin x-2}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{3}\ln|\sin x-1|+\frac{2}{3}(\sin x+2)\right]$.

41. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x+\sin x-6}dx.$ .... $\left[\frac{1}{5}\ln\frac{3}{8}\right]$.

42. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{4-5\sin x}dx.$ .... $\left[\frac{1}{3}\ln 2\right]$.

43. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+\cos x-6}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{5}\ln\frac{2}{9}\right]$.

44. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}\,x}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2\right]$.

45. $\int \frac{1}{7\cos^2 x+2\sin^2 x}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{\sqrt{7}}{14}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\mathrm{tg}\,x\right)\right]$.

46. $\int\limits_0^{2\pi} \cos 3x\cos 4x\mathrm{d}x.$ .... $[0]$

47. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

(a) $y = x - 1, y^2 = 2x + 1$. .... $\left[\frac{16}{3}\right]$.

(b) $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 2$. .... $\left[\frac{8}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right)\right]$.

48. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x. Oblasť je určená čiarami $y = \sin x$, $y = \frac{2x}{\pi}$. .... $\left[\frac{\pi^2}{6}\right]$.

Chapter 2

Postupnosti a nekonečné rady

2.1 Postupnosti

Definícia 2 *Postupnosť (reálnych čísel) je funkcia* $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$. *Hodnotu* $f(n) = a_n$ *nazývame* n*-tý člen postupnosti. V tomto prípade postupnosť zapisujeme v tvare* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Ak existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, *tak hovoríme, že postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je konvergenná. Vo zvyšných prípadoch hovoríme, že postupnosť je divergentná.*

Veta 6 *Postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentná a* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *práve vtedy, keď pre každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *také že pre každé* $n > n_0,\ n \in \mathbb{N}^+$ *platí*

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Definícia 3 *Nech* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť reálnych čísel. Ak pre každé* $n \in \mathbb{N}^+$ *je*

- $a_n < a_{n+1}$, *tak hovoríme, že postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je rýdzo rastúca;*
- $a_n \leq a_{n+1}$, *tak hovoríme, že postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je rastúca;*
- $a_n > a_{n+1}$, *tak hovoríme, že postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je rýdzo klesajúca;*
- $a_n \geq a_{n+1}$, *tak hovoríme, že postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je klesajúca.*

Uvedené postupnosti sa nazývajú monotónne postupnosti.

Veta 7 *Každá rastúca zhora ohraničená postupnosť je konvergentná.*

Definícia 4 *Nech* $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+,\ f(k) = n_k$ *je rýdzo rastúca postupnosť prirodzených čísel a* $g : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R},\ g(n) = a_n$ *je postupnosť reálnych čísel. Potom zloženú funkciu (ktorá je tiež postupnosťou)* $g \circ f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R},\ (g\circ f)(k) = g(f(k)) = g(n_k) = a_{n_k}$ *nazývame vybraná postupnosť z postupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *pomocou postupnosti* $(n_k)_{k=1}^{\infty}$

Veta 8 *Nech* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. *potom pre každú jej vybranú postupnosť* $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ *platí* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Veta 9 *(Bolzano-Cauchyho kritérium konvergencie postupnosti) Postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentná práve vtedy, keď pre každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *také že pre každé* $m, n > n_0,\ m, n \in \mathbb{N}^+$ *platí*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

2.1.1 Príklady

Časť I

1. Pomocou definície limity postupnosti dokážte, že $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{2n-3}{n+1} = 2$, a nájdite príslušné n_0, ak $\varepsilon = \frac{1}{1000}$. .... $[n_0 = 4999]$.
2. Nájdite n-tý člen postupnosti $\{0,9; 0,99; 0,999; \dots\}$ a vypočítajte jej limitu. .... $\left[a_n = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n, \lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = 1\right]$.
3. Zistite, či sú postupnosti konvergentné
   (a) $\{1 + \cos(n\pi)\}_{n=1}^{\infty}$. .... [Divergentná].
   (b) $\left\{\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$. .... [Konverguje k $-\frac{1}{2}$].
4. Vypočítajte limitu postupnosti, ak
   (a) $\left\{\left(3 - \frac{1}{n}\right)\sqrt{\frac{n}{4n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$. .... $[\frac{3}{2}]$.
   (b) $\left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4n}\right)^{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. .... [0].
   (c) $\left\{\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2-4}\right\}_{n=2}^{\infty}$. .... [0].

Časť II

1. Pomocou definície limity postupnosti dokážte, že $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$, nájdite príslušné n_0, ak $\varepsilon = \frac{1}{10}$. .... $[n_0 = 19]$.
2. Vypočítajte limitu postupnosti, ak:
   (a) $a_n = \sqrt{1+n^2} - n$. .... [0].
   (b) $a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$. .... $\left[\frac{1}{2}\right]$.
   (c) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$. .... $\left[\frac{1}{2}\right]$.
   (d) $a_n = \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{1-3n}$. .... $\left[e^{-\frac{3}{4}}\right]$.

2.2 Nekonečné rady

Definícia 5 *Nech* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť reálnych čísel. Potom symbol*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

nazývame nekonečný číselný rad. Číslo a_n *nazývame* n*-tý člen radu.*

K radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je priradená taká postupnosť* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, *že platí*

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

pre každé $n \in \mathbb{N}^+$. *Postupnosť* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *nazývame postupnosť čiastočných súčtov radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ak postupnosť $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentná, tak hovoríme, že rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentný. Ak je divergentná, tak aj rad je divergentný.*

Definícia 6 *Nech sú dané rady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. *Potom rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

nazývame súčtom radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ak $c \in \mathbb{R}$, *tak rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n)$$

nazývame súčin radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a konštanty* c.

Veta 10 *Nech rad* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *je súčtom radov* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. *Nech tieto rady sú konvergentné a platí* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_1$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s_2$. *Potom aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *je konvergentný a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s_1 + s_2.$$

Nech $c \in \mathbb{R}$ *a* $c \neq 0$. *Potom rad* $\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n)$ *je konvergentný práve vtedy, keď je konvergentný rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *V prípade konvergencie, ak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, *tak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n) = cs = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Definícia 7 *Rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots$$

nazývame geometrický rad. Číslo q *nazývame kvocient geometrického radu.*

Veta 11 *Geometrický rad* $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ *je konvergentný práve vtedy, keď* $|q| < 1$. *V prípade konvergencie platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1-q}.$$

Veta 12 *(Bolzano-Cauchyho kritérium konvergencie nekonečného radu) Rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentný práve vtedy, keď pre každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *také že pre každé* $m > n > n_0,\ m, n \in \mathbb{N}^+$ *platí*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \varepsilon.$$

Veta 13 *(Nutná podmienka konvergencie nekonečného radu) Ak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentný, tak*

$$lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Definícia 8 *Rad* $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ *nazývame zvyšok radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *po k-tom člene.*

Veta 14 *Rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentný práve vtedy, keď je konvergentný jeho zvyšok*

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$$

po (ľubovolnom) k-tom člene.

Definícia 9 *Nech rady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sú také, že* $|a_n| \leq b_n$ *pre každé* $n \in \mathbb{N}^+$. *(Je zrejmé, že* $0 \leq b_n$.*) Potom hovoríme, že rad* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je majorantným radom radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Píšeme*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Veta 15 *Nech*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je konvergentný, tak je konvergentný aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dôsledok 4 *Nech*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentný, tak je divergentný aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Definícia 10 *Ak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *je konvergentný, tak hovoríme, že rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je absolútne konvergentný.*

Poznámka 1 *Pretože* $|a_n| \le |a_n|$, *je zrejmé, že rad* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *je majorantným radom radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Z toho už vyplýva, ak daný rad je absolútne konvergentný, tak je aj konvergentný. Tvrdenie neplatí v opačnom slede.*

Veta 16 *Uvažujme o radoch*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad a \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{takých, že} \quad b_n \neq 0 \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \dots .$$

1. *Ak*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = k, \quad \text{pričom} \quad 0 < k < \infty,$$
tak rady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ *sú buď oba konvergentné, alebo sú oba divergentné.*

2. *Ak*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = 0,$$
tak z konvergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ *vyplýva konvergencia radu* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

3. *Ak*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = \infty,$$
tak z divergencie radu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *vyplýva divergencia radu* $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$.

Veta 17 *(Cauchyho integrálne kritérium konvergencie radu) Nech pre rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *existuje taká funkcia* $f : A \to \mathbb{R}$, *že pre ňu platí:*

1. *je spojitá na intervale* $\langle 1, \infty)$,

2. *je klesajúca na intervale* $\langle 1, \infty)$ *(t.j. pre každé* $x_1, x_2 \in \langle 1, \infty)$ *také, že* $x_1 < x_2$, *platí* $f(x_1) \ge f(x_2)$*),*

3. $f(n) = |a_n|$ *pre* $n = 1, 2, \dots$.

Potom:

1. *Ak existuje vlastná limita*
$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)\, dt,$$
tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je absolútne konvergentný.*

2. *Ak*
$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)\, dt = \infty,$$
tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *je divergentný.*

Veta 18 *(d'Alembertovo kritérium konvergencie radu) Nech* $a_n \neq 0$ *pre každé* $n \in \mathbb{N}^+$. *Ak*

$$lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolútne konvergentný.*

Ak

$$lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1,$$

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentný.*

Veta 19 *(Cauchyho kritérium konvergencie radu) Nech*

$$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolútne konvergentný.*

Ak

$$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentný.*

Definícia 11 *Nech* $a_n > 0$ *pre každé* $n \in \mathbb{N}^+$. *Potom rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$$

nazývame radom so striedavým znamienkom.

Veta 20 *(Leibnitzovo kritérium konvergencie radu) Nech* $a_n > 0$ *pre každé* $n \in \mathbb{N}^+$ *a postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je klesajúca. Ak* $lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *tak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *je konvergentný.*

Definícia 12 *Rad*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

nazývame mocninovým radom. Číslo $a \in \mathbb{R}$ *sa nazýva stred radu. Čísla* a_n *sa nazývajú koeficienty mocninového radu.*

Veta 21 *Pre každý mocninový rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ *existuje* $0 \leq \rho \leq \infty$ *také, že daný rad konverguje pre každé* $x \in (a-\rho, a+\rho)$ *a diverguje pre každé* $x \in (-\infty, a) \cup (a, \infty)$. *Hodnotu* ρ *nazývame polomer konvergencie mocninového radu.*

Daný mocninový rad konverguje len pre $x = a$ *práve vtedy, keď* $\rho = 0$. *Rad konverguje pre každé* $x \in \mathbb{R}$ *práve vtedy, keď* $\rho = \infty$.

2.2.1 Príklady

Časť I

1. Pomocou definície nájdite súčet radu

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$. .... $[\frac{13}{36}]$.

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1})$. .... [0].

2. Vyšetrite konvergenciu geometrického radu

   (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{5^n}$. .... [Konverguje, $s = \frac{5}{6}$].

   (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n$. .... [Diverguje].

3. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-2}\right)^{2n}$. .... [Konverguje].

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$. .... [Diverguje].

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+3n}$. .... [Diverguje].

   (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$. .... [Diverguje].

   (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi \cdot \left(\frac{1}{n} + n\right)\right)$. .... [Konverguje].

   (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}$. .... [Konverguje].

   (g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n}{n^3+5n^2+2n+1}$. .... [Diverguje].

   (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+2n+5}$. .... [Konverguje].

4. V nasledujúcich príkladoch nájdite množinu všetkých čísel, pre ktoré dané rady konvergujú:

   (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+3)} \cdot (x-4)^n$. .... $[\langle 2, 6)]$.

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \cdot x^n$. .... $[\langle -1, 1\rangle]$.

   (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+3)} \cdot (x-4)^{2n}$. .... $[(4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2})]$.

   (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n \cdot (x+1)^n$. .... $[x \in \{-1\}]$.

Časť II

1. Pomocou definície nájdite súčet radu
   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3}$. .... $[\frac{5}{6}]$.
   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+2}})$. .... $[e + \sqrt{e} - 2]$.
   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. .... [Diverguje].
2. Nájdite súčet radu:
   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+2}{3^{n-1}}$. .... $[\frac{9}{4}]$.
   (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3+5(-1)^{n+1}}{4^n}$. .... [0].
3. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:
   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. .... [Konverguje].
   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+5}\right)^{2n}$. .... [Konverguje].
   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^{3n}$. .... [Diverguje].
   (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!}$. .... [Konverguje].
   (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$. .... [Diverguje].
   (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n}{3^n}$. .... [Konverguje].
   (g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$. .... [Konverguje].
   (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$. .... [Diverguje].
   (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} \sin \frac{\pi}{5n}$. .... [Konverguje].
   (j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}$. .... [Diverguje].
   (k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4^n}$. .... [Konverguje].
   (l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+4}{n^5+4n^2+2}$. .... [Konverguje].

(m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+5}{n^5+3n^4+1}$. .... [Diverguje].

(n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2\sqrt{n}}$. .... [Konverguje].

4. V nasledujúcich príkladoch nájdite všetky $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré dané rady konvergujú a určte polomer konvergencie:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} \cdot (x-3)^n$. .... $[x \in \langle 2, 4\rangle,\ \rho = 1]$.

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x-1)^n$. .... $[x \in \mathbb{R},\ \rho = \infty]$.

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} \cdot (x-4)^n$. .... $[x \in \left\langle \frac{11}{3}, \frac{13}{3}\right),\ \rho = \frac{1}{3}]$.

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)5^n} \cdot (x+3)^n$. .... $[x \in \langle -8, 2),\ \rho = 5]$.

(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot (x-2)^{2n}$. .... $[x \in (0, 4),\ \rho = 2]$.

Časť III

1. Pomocou definície nájdite súčet radu:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$. .... $[\frac{1}{3}]$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+2n}$. .... $[\frac{3}{2}]$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$. .... [Diverguje].

2. Nájdite súčet radu:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+4}{5^{n-1}}$. .... $[\frac{25}{6}]$.

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{6+4(-1)^{n+1}}{3^n}$. .... [6].

3. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{5^n}$. .... [Konverguje].

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{\pi}{5^n}$. .... [Konverguje].

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{1}{n^3}$. .... [Diverguje].

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6^{n+1}}$. .... [Konverguje].

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{n+1}\right)^{2n}$. .... [Diverguje].

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}$. .... [Konverguje].

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. .... [Konverguje].

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n-1}}$. .... [Konverguje].

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{n+1}\right)^{2}$. .... [Diverguje].

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2+2n}$. .... [Diverguje].

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^4+2n^2+3}$. .... [Konverguje].

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3+2n+1}$. .... [Diverguje].

4. V nasledujúcich príkladoch nájdite všetky $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré dané rady konvergujú a určte polomer konvergencie:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n n^2 \cdot (x-1)^n$. .... $[x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),\ \rho = \frac{1}{2}]$.

   (b)

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} \cdot (x-2)^n$. .... $[x \in \mathbb{R},\ \rho = \infty]$.

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+5)7^n} \cdot x^n$. .... $[x \in \langle -7, 7),\ \rho = 7]$.

Chapter 3

Diferenciálny počet FVP

3.1 Množiny

Znakom $\mathbb{R}^m$ budeme označovať množinu

$$\mathbb{R}^m = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ pre } i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Prvky množiny $\mathbb{R}^m$ nazývame body, alebo vektory.

Na množine $\mathbb{R}^m$ definujeme dve operácie

1. **Súčet vektorov**
   Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ sú dva vektory z $\mathbb{R}^m$. Potom ich súčtom nazývame vektor $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ taký, že

   $$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) + (y_1, y_2, \ldots, y_m) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_m + y_m).$$

2. **Súčin skaláru a vektora**
   Nech (skalár) $c \in \mathbb{R}$ a (vektor) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Potom súčinom skaláru c a vektora $\mathbf{x}$ nazývame vektor

   $$c\mathbf{x} = c(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_m).$$

Poznamenávame, že množina $\mathbb{R}^m$ spolu s uvedenými operáciami tvorí lineárny priestor.

Na množine $\mathbb{R}^m$ ďalej definujeme:

1. **Skalárny súčin vektorov**
   Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ sú dva vektory z $\mathbb{R}^m$. Potom ich skalárnym súčinom nazývame číslo (skalár)

   $$\mathbf{x}.\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_my_m.$$

2. **Normu (absolútnu hodnotu) vektora**
   Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Potom normou vektora $\mathbf{x}$ nazývame číslo
   $$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}.\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}.$$

3. **Vzdialenosť bodov**
   Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ sú dva body z $\mathbb{R}^m$. Potom ich vzdialenosťou nazývame číslo
   $$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_m - y_m)^2}.$$

Definícia 13 *Nech $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ a $\varepsilon > 0$. Epsilonovým okolím bodu $\mathbf{a}$ nazývame množinu $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \varepsilon\}$. Prstencovým epsilonovým okolím bodu $\mathbf{a}$ nazývame množinu $\mathcal{O}^o_\varepsilon(\mathbf{a}) = \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\}$.*

V prípade $\mathbb{R}^1$ definujeme aj epsilonové okolia $\pm\infty$. Množinu $\mathcal{O}_\varepsilon(\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$ nazývame ε-ovým okolím bodu ∞. Prstencové ε-ové okolie $\mathcal{O}^o_\varepsilon(\infty)$ definujeme predpisom $\mathcal{O}^o_\varepsilon(\infty) = \mathcal{O}_\varepsilon(\infty)$. Podobne definujeme epsilonové a prstencové epsilonové okolie mínus nekonečna vzťahom $\mathcal{O}^o_\varepsilon(-\infty) = \mathcal{O}_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$.

Definícia 14 *Nech $A \subseteq \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. Budeme hovoriť, že bod $\mathbf{a}$ je hromadným bodom množiny A, ak v každom $\mathcal{O}^o_\varepsilon(\mathbf{a})$ leží bod množiny A.*

Definícia 15 *Nech $A \subseteq \mathbb{R}^m$. Komplementom množiny A nazývame množinu $CA = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x} \notin A\}$.*

Definícia 16 *Budeme hovoriť, že množina $A \subseteq \mathbb{R}^m$ je otvorená, ak pre každé $\mathbf{a} \in A$ existuje $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset A$.*

Ak množina $A \subseteq \mathbb{R}^m$ obsahuje všetky svoje hromadné body, tak sa nazýva uzavretá množina.

Veta 22 *Množina $A \subseteq \mathbb{R}^m$ je otvorená práve vtedy, keď jej komplement CA je uzavretá množina.*

Definícia 17 *Budeme hovoriť, že množina $A \subseteq \mathbb{R}^m$ je ohraničená, ak existuje $\varrho > 0$ také, že $A \subset \mathcal{O}_\varrho(\mathbf{0})$.*

Ak množina $A \subseteq \mathbb{R}^m$ obsahuje všetky svoje hromadné body, tak sa nazýva uzavretá množina.

3.2 Limita a spojitosť funkcie

Definícia 18 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{a}$ je hromadným bodom množiny A.*

Ak pre každé $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{b})$ existuje $\mathcal{O}^o_\delta(\mathbf{a})$ také, že $f(\mathcal{O}^o_\delta(\mathbf{a}) \cap A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{b})$, hovoríme, že funkcia $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ má v bode $\mathbf{a}$ limitu $\mathbf{b}$. Píšeme $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Definícia 19 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $\mathbf{a} \in A$ *je hromadným bodom množiny* A. *Ak* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$, *budeme hovoriť, že funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá v bode* $\mathbf{a}$.

Ak funkcia f *je spojitá v každom bode* $\mathbf{a} \in C \subset A$, *tak budeme hovoriť, že funkcia* f *je spojitá na množine* C.

Ak funkcia f *je spojitá v každom bode* $\mathbf{a} \in A$, *tak budeme hovoriť, že funkcia* f *je spojitá.*

Veta 23 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^n$ *a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^n$. *Nech* $c \in \mathbb{R}$. *Potom*

1. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(cf)(\mathbf{x}) = c\mathbf{b}_1$,
2. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f+g)(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$,
3. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} |f|(\mathbf{x}) = |\mathbf{b}_1|$.

Dôsledok 5 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *sú spojité funkcie a* $c \in \mathbb{R}$. *Potom*

1. $(cf) : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá funkcia.*
2. $(f+g) : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá funkcia.*
3. $|f| : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia.*

Veta 24 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b_1 \in \mathbb{R}$ *a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = b_2 \in \mathbb{R}$. *Potom*

1. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(fg)(\mathbf{x}) = b_1 b_2$,
2. *ak* $b_2 \neq 0$ *a* $g(\mathbf{x}) \neq 0$ *pre každé* $\mathbf{x} \in A$, *tak*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{x}) = \frac{b_1}{b_2},$$

Dôsledok 6 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *sú spojité funkcie Potom*

1. $(fg) : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia.*
2. *Ak* $g(\mathbf{x}) \neq 0$ *pre každé* $\mathbf{x} \in A$, *tak* $\left(\frac{f}{g}\right) : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia.*

Definícia 20 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $C \subset A$. *Potom funkciu* $((f|C)) : \mathbb{R}^m \supset C \to \mathbb{R}^n$, $(f|C)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ *pre každé* $\mathbf{x} \in C$, *nazývame zúženie funkcie* f *na množine* C.

Veta 25 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *je hromadným bodom množiny* $C \subset A$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. *Potom aj* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f|C)(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Dôsledok 7 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *je hromadným bodom množiny* $C_1 \subset A$ *a aj množiny* $C_2 \subset A$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f|C_1)(\mathbf{x}) \neq \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f|C_2)(\mathbf{x})$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ *neexistuje. (Ak by existovala, tak by museli existovať limty všetkých zúžení a tieto limity by museli byť navzájom si rovné.)*

Veta 26 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^n$ *a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *je hromadným bodom množiny* $C_1 \subset A$ *a aj* $C_2 \subset A$. *Nech* $C_1 \cup C_2 = A$. *Ak* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f|C_1)(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f|C_2)(\mathbf{x})$, *potom aj* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Veta 27 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to B \subset \mathbb{R}^n$ *a* $g : \mathbb{R}^n \supset B \to \mathbb{R}^k$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ *a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{b}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$. *Nech je splnená aspoň jedna z nasledujúcich podmienok:*

- *Pre každé* $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{a}\}$ *je* $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{b}$.
- *Funkcia* g *je spojitá v bode* $\mathbf{b}$.

Potom $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(g \circ f)(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{c}$.

Veta 28 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to B \subset \mathbb{R}^n$ *je spojitá v bode* $\mathbf{a}$ *a funkcia* $g : \mathbb{R}^n \supset B \to \mathbb{R}^k$ *je spojitá v bode* $f(\mathbf{a})$. *Potom funkcia* $(g \circ f) : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}^k$ *je spojitá v bode* $\mathbf{a}$.

Dôsledok 8 *Zložená funkcia zo spojitých funkcií je spojitá.*

Veta 29 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to B \subset \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ *a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *je hromadným bodom množiny* A. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ *práve vtedy, keď* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = b_i$ *pre* $i = 1, , \dots, n$.

Veta 30 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to B \subset \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ *a* $\mathbf{a} \in A$ *je hromadným bodom množiny* A. *Potom funkcia* f *je spojitá v bode* $\mathbf{a}$ *práve vtedy, keď sú v tomto bode spojité funkcie* $f_i : \mathbb{R}^m \supset A \to B \subset \mathbb{R}$ *pre* $i = 1, 2, \dots, n$.

Dôsledok 9 *Funkcia je spojitá práve vtedy, keď sú spojité jej zložky.*

V prípade, že uvažujeme o jednozložkových funkciách typu $f : \mathbb{R}^m \supset A \to B \subset \mathbb{R}$, môžeme uvažovať o nevlastných limitách a aj o nerovnostiach medzi limitami.

Definícia 21 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to B \subset \mathbb{R}$ *je funkcia a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \in \{\infty, -\infty\}$. *Potom hovoríme, že funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *nevlastnú limitu.*

Veta 31 *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(-f(\mathbf{x})) = -\infty$.

Veta 32 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty$ *a existuje* $k \in \mathbb{R}$ *také, že* $g(\mathbf{x}) \geq k$ *pre každé* $\mathbf{x} \in A$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f+g)(\mathbf{x}) = \infty$.

Veta 33 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *a* $g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$. *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty$ *a existuje* $k \in \mathbb{R}$ *také, že* $k > 0$ *a* $g(\mathbf{x}) \geq k$ *pre každé* $\mathbf{x} \in A$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(f.g)(\mathbf{x}) = \infty$.

Veta 34 *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} |f|(\mathbf{x}) = \infty$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{1}{f}(\mathbf{x}) = 0$.

Veta 35 *Nech* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = 0$ *a pre každé* $\mathbf{x} \in A$ *je* $f(\mathbf{x}) > 0$. *Potom* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{1}{f}(\mathbf{x}) = \infty$.

Veta 36 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R},\ g : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$ *a* $h : \mathbb{R}^m \supset A \to \mathbb{R}$. *Potom*

1. *Ak pre každé* $\mathbf{x} \in A$ *je* $f(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x})$, *tak v prípade existencie vlastných limít* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ *a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$, *platí:* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \le \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$.
2. *Ak pre každé* $\mathbf{x} \in A$ *je* $f(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x}) \le h(\mathbf{x})$ *a* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h(\mathbf{x})$, *tak existuje aj* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})$ *a platí:* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} h(\mathbf{x})$.

Príklady

1. Vypočítajte nasledujúce limity

   (a) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{x}{x+y}$ .... $\left[\frac{2}{5}\right]$.

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$ .... [neexistuje].

   (c) $\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x}{x+y}$ .... [neexistuje].

   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y-3}{x+y-5}$ .... $[\frac{3}{5}]$.

   (e) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{y-3}{x+y-5}$ .... [neexistuje].

   (f) $\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$ .... $[\frac{3}{8}]$.

   (g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$ .... [0].

   (h) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+yz-xz+1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}-1}$ .... $[\infty]$.

   (i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3+5y^3}{x^2+y^2}$ .... [0].

   (j) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ .... [neexistuje].

   (k) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x-y}$, (polož $y = \sin x$, alebo $y = x - x^2$) . [neexistuje].

   (l) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^3+y}$, (polož $y = \sqrt[3]{y^3 - y}$) .... [neexistuje].

   (m) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, (polož $y = x^2$) .... [neexistuje].

   (n) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{4-xy}}{xy}$ .... $[\frac{1}{4}]$.

   (o) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .... $[\sqrt{2}]$.

   (p) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .... [neexistuje].

   (q) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$ .... [12].

   (r) $\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{\sin xy}{xy}$ .... [1].

   (s) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{tg} xy}{y}$ .... [0].

(t) $\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{\operatorname{tg} xy}{y}$ .... [3].

(u) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}}$ .... [e].

(v) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ .... [1].

2. Nech

(a)
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$................ [Je spojitá v $(0,0)$.]

(b)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$........... [Nie je spojitá v $(0,0)$.]

(c)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$................ [Je spojitá v $(0,0)$.]

(d)
$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{pre } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$
Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0,0)$. .... [Je spojitá v $(0,0,0)$.]

(e)
$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3} & \text{pre } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$
Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0,0)$........ [Nie je spojitá v $(0,0,0)$.]

(f)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$........... [Nie je spojitá v $(0,0)$.]

(g)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4} & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$................ [Je spojitá v $(0,0)$.]

(h)
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0,0)$. . . . . [Nie je spojitá v $(0,0)$.]

3.3 Diferencovateľnosť funkcie

3.3.1 Lineárne zobrazenia

Definícia 22 *1. Funkciu $L:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ nazývame lineárna funkcia, ak pre každé $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m$ a $c\in\mathbb{R}$ platí*

- $L(\mathbf{x}+\mathbf{y})=L(\mathbf{x})+L(\mathbf{y})$,
- $L(c\mathbf{x})=cL(\mathbf{x})$.

2. *Pre každé lineárne zobrazenie $L:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ existujú $l_1,l_2,\ldots,l_m\in\mathbb{R}$ také, že*
$$L(\mathbf{x})=L(x_1,x_2,\ldots,x_m)=l_1x_1+l_2x_2+\ldots+l_mx_m.$$
Maticu
$$[L]=\begin{bmatrix}l_1 & l_2 & \ldots & l_m\end{bmatrix}$$
nazývame matica lineárneho zobrazenia L.

3. *$L:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $L=(L_1,L_2,\ldots,L_n)$ je lineárne zobrazenie práve vtedy, keď jeho zložky*
$$L_i:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R},\ L_i(\mathbf{x})=L_i(x_1,x_2,\ldots,x_m)=l_{i1}x_1+l_{i2}x_2+\ldots+l_{im}x_m$$
sú lineárne zobrazenia pre $i=1,2,\ldots,n$. Potom maticu
$$[L]=\begin{bmatrix}l_{11} & l_{12} & \ldots & l_{1m}\\ l_{21} & l_{22} & \ldots & l_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & l_{nm}\end{bmatrix}$$
nazývame matica lineárneho zobrazenia L.

4. *Je zrejmé, že pri tomto označení platí $L(\mathbf{x})=\mathbf{y}$ práve vtedy, keď $[L]\,\mathbf{x}^T=\mathbf{y}^T$, kde $\mathbf{x}^T$ označuje transponovanú maticu riadkovej matice $\mathbf{x}$.*

3.3.2 Definícia diferencovateľnosti

Definícia 23 *Nech $f:\mathbb{R}^m\supseteq A\to\mathbb{R}^n$, A je otvorená množina a $\mathbf{a}\in A$ je hromadným bodom množiny A. Nech existuje také lineárne zobrazenie $L:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, že*
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\frac{|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})-L(\mathbf{x}-\mathbf{a})|}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|}=0.$$

Vtedy hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná bode $\mathbf{a}$*. Lineárne zobrazenie* $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *nazývame (prvý) diferenciál funkcie f v bode* $\mathbf{a}$*. Označujeme* $L = \mathcal{D}f(\mathbf{a})$.

Ak funkcia f je diferencovateľná v každom bode $\mathbf{a} \in M \subseteq A$, potom hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná na množine M. Ak funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná na množine A, tak hovoríme, že f je diferencovateľná funkcia.

Poznámka 2 *Je zrejmé, že funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$ (A je otvorená množina) práve vtedy, keď*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{x}-\mathbf{a})}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|} = 0.$$

Veta 37 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$. (A je otvorená množina.) Potom existuje taká funkcia $p : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$, že*

1. $p(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$,
2. *funkcia $p : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je spojitá v bode $\mathbf{a}$. To znamená, že $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.*
3. *Pre každé $\mathbf{x} \in A$ platí*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + p(\mathbf{x})|\mathbf{x}-\mathbf{a}|.$$

Veta 38 *(Nutná podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$. (A je otvorená množina.) Potom je v tomto bode spojitá.*

Veta 39 *Nech funkcie $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ a $g : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ sú diferencovateľné v bode $\mathbf{a} \in A$ (A je otvorená množina.) a $c \in \mathbb{R}$. Potom*

- *Funkcia $(cf) : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.*
- *Funkcia $(f+g) : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.*

Veta 40 *Nech A je otvorená množina. Funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$ práve vtedy, keď v bode $\mathbf{a}$ sú diferencovateľné jej zložky $f_i : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Navyše v prípade diferencovateľnosti platí*

$$\mathcal{D}f(\mathbf{a}) = (\mathcal{D}f_1(\mathbf{a})), \mathcal{D}f_2(\mathbf{a})), \ldots, \mathcal{D}f_n(\mathbf{a})).$$

3.3.3 Parciálne derivácie

Definícia 24 1. *Nech A je otvorená množina a $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in A$. Potom definujeme*

$$A_i = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_m) \in A\} \quad \textit{pre} \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

2. *Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$. Budeme uvažovať o funkciách*

$$\varphi_i : \mathbb{R} \supseteq A \to \mathbb{R},\ \varphi_i(t) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_m)$$

pre $i = 1, 2, \dots, m$.

3. *Nech existuje (vlastná) derivácia*

$$\begin{aligned}\varphi_i'(a_i) &= \lim_{t\to a_i} \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(a_i)}{t - a_i} \\ &= \lim_{t\to a_i} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_m) - f(\mathbf{a})}{t - a_i} \\ &= \frac{\delta f(\mathbf{a})}{\delta x_i} \\ &= f_{\cdot i}(\mathbf{a})\end{aligned}$$

Toto číslo nazývame parciálna derivácia funkcie f podľa i-tej premennej v bode $\mathbf{a}$.

4. *Nech $B_i \subseteq A$ je množina všetkých $\mathbf{a} \in A$ pre ktoré existuje $f_{\cdot i}(\mathbf{a})$. Potom funkciu*

$$f_{\cdot i} : \mathbb{R}^m \supseteq B_i \to \mathbb{R},\ \mathbf{x} \mapsto f_{\cdot i}(\mathbf{x})$$

nazývame parciálna derivácia funkcie f podľa i-tej premennej.

Príklady

Vypočítajte parciálne derivácie nasledujúcich funkcií:

1. $f(x, y) = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{y}\right),\ f_{\cdot 1}(x, y) =?,\ f_{\cdot 2}(x, y) =?$
2. $f(x, y, z) = x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5,\ f_{\cdot 1}(x, y, z) =?$
3. $f(x, y, z) = \frac{x-y}{\sqrt{z}},\ f_{\cdot 2}(1, -3, 4) =?$
4. $f(x, y) = \ln(\sin xy),\ f_{\cdot 2}(1, \frac{\pi}{2}) =?$
5. $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy},\ f_{\cdot 1}(1, 1) =?,\ f_{\cdot 2}(2, 1) =?$
6. $f(x, y) = e^{\sin \frac{x}{y}},\ f_{\cdot 1}(x, y) =?,\ f_{\cdot 2}(x, y) =?$
7. $f(x, y) = x^{xy},\ f_{\cdot 1}(x, y) =?,\ f_{\cdot 2}(x, y) =?$
8. $f(x, y) = (\ln x)^{\cos x},\ f_{\cdot 1}(x, y) =?,\ f_{\cdot 2}(x, y) =?$
9. $f(x, y, z) = ze^{x^3 \ln(\cos(x-y^2))}$,
   $f_{\cdot 1}(x, y, z) =?,\ f_{\cdot 2}(x, y, z) =?,\ f_{\cdot 3}(x, y, z) =?$
10. $f(x, y, z) = x^{\frac{1}{x}}z,\ f_{\cdot 1}(x, y, z) =?,\ f_{\cdot 2}(x, y, z) =?,\ f_{\cdot 3}(x, y, z) =?$

11. Nech
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}+x-y & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 1 & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}.$$
Vypočítajte $f_{\cdot 1}(0,0),\ f_{\cdot 2}(0,0)$. .... $[f_{\cdot 1}(0,0)=1,\ f_{\cdot 2}(0,0)=-1.]$

Veta 41 *(Nutná podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Nech A je otvorená množina a funkcia $f:\mathbb{R}^m\supseteq A\to\mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}\in A$. Potom existujú parciálne derivácie $f_{\cdot i}(\mathbf{a})$ pre $i=1,2,\ldots,m$ a navyše*

$$L(\mathbf{x})=\mathcal{D}f(\mathbf{a})(\mathbf{x})=\mathcal{D}f(\mathbf{a})(x_1,x_2,\ldots,x_m)=f_{\cdot 1}(\mathbf{a})x_1+f_{\cdot 2}(\mathbf{a})x_2+\ldots+f_{\cdot m}(\mathbf{a})x_m.$$

Veta 42 *(Postačujúca podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Uvažujme o funkcii $f:\mathbb{R}^m\supseteq A\to\mathbb{R}$, kde A je otvorená množina a $\mathbf{a}\in A$. Nech existujú parciálne derivácie $f_{\cdot i}:\mathbb{R}^m\supseteq A\to\mathbb{R}$ pre $i=1,2,\ldots,m$ a navyše tieto parciálne derivácie sú spojité v bode $\mathbf{a}$. Potom je funkcia f diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.*

Dôsledok 10 *Nech $f:\mathbb{R}^m\supseteq A\to\mathbb{R}^n$, $f=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$, A je otvorená množina a $\mathbf{a}\in A$. Nech parciálne derivácie $(f_j)_{\cdot i}:\mathbb{R}^m\supseteq A\to\mathbb{R}$ sú spojité v bode $\mathbf{a}$ pre $j=1,2,\ldots,n$, $\quad i=1,2,\ldots,m$. Potom je funkcia f diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.*

Príklady

1. Nech
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$
Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0,0)$................. $[f_{\cdot 1}(0,0)=0=f_{\cdot 2}(0,0)$, nie je spojitá, nie je diferencovateľná v $(0,0)$.]

2. Nech
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$
Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0,0)$................. $[f_{\cdot 1}(0,0)=0=f_{\cdot 2}(0,0)$, nie je spojitá, nie je diferencovateľná v $(0,0)$.]

3. Nech
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$
Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0,0)$................. $[f_{\cdot 1}(0,0)=1=f_{\cdot 2}(0,0)$, je spojitá, nie je diferencovateľná v $(0,0)$.]

4. Nech
$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0,0)$................. $[f_{\cdot 1}(0,0) = 0 = f_{\cdot 2}(0,0),$ je spojitá, je diferencovateľná v $(0,0),$ parciálne derivácie nie sú spojité v $(0,0).]$

5. Nech $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$. Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0,0)$.$[f_{\cdot 1}(0,0) = 1 = f_{\cdot 2}(0,0),$ je spojitá, nie je diferencovateľná v $(0,0).]$

6. Nech $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0,0)$.$[f_{\cdot 1}(0,0),\ f_{\cdot 2}(0,0)$neexistujú, nie je difer

7. Nech $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Vyšetrite diferencovateľnosť v bode $(0,0,0)$. $[f_{\cdot 1}(0,0,0),\ f_{\cdot 2}(0,0,0),\ f_{\cdot 3}(0,0,0)$neexistujú, nie je diferencovateľná v $(0,0,0).]$

3.3.4 Geometrický význam parciálnych derivácií

Z podmienky

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + p(\mathbf{x})|\mathbf{x}-\mathbf{a}|$$

odvodzujeme dva dôsledky:

1. $f(\mathbf{x}) \doteq f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x}-\mathbf{a})$.

2. V prípade funkcie dvoch premenných dostávame:

$$z = f(a,b) + f_{\cdot 1}(a,b)(x-a) + f_{\cdot 2}(a,b)(y-b)$$

je rovnica dotykovej roviny grafu funkcie f v bode $T = (a,b,f(a,b))$.

Príklady

1. Vypočítajte približnú hodnotu $(1,94)^2 e^{0,12}$.

2. Vypočítajte približnú hodnotu $4,004(2,002)^2(3,003)^3$.

3. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie $f(x,y) = 2x^2+y^2$ v bode $T = (1,1,?)$.

4. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie $f(x,y) = x^4+2x^2y-xy+x$ v bode $T = (1,?,2)$.

5. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie $f(x,y) = xy$ v bode $T = (?,2,2)$.

6. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku ploche $x^2+2y^2+3z^2 = 6$ v bode $T = (1,-1,1)$.

7. Ukážte, že plochy $x^2-xy-8x+z+5 = 0$ a $4+x+2y = \ln z$ sa dotýkajú (majú spoločnú dotykovú rovinu) v bode $T = (2,-3,1)$.

3.3.5 Diferencovateľnosť zloženej funkcie

Veta 43 *(Veta o diferencovateľnosti zloženej funkcie) Nech $A \subseteq \mathbb{R}^m$ a $B \subseteq \mathbb{R}^n$ sú otvorené množiny. Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to B \subset \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$ a funkcia $g : \mathbb{R}^n \supseteq B \to \mathbb{R}^k$ je diferencovateľná v bode $f(\mathbf{a}) \in B$. Potom zložená funkcia $(g \circ f) : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}^k$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$ a platí*

$$\mathcal{D}(g \circ f)(\mathbf{a}) = \mathcal{D}g(f(\mathbf{a})) \circ \mathcal{D}f(\mathbf{a}).$$

Pre matice zložených lineárnych zobrazení platí:

$$[\mathcal{D}(g \circ f)(\mathbf{a})] = [\mathcal{D}g(f(\mathbf{a}))]\,[\mathcal{D}f(\mathbf{a})]\,.$$

Nech

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to B \subset \mathbb{R}^n,\ f = (f_1, f_2, \ldots, f_n),\ \mathbf{a} \in A \\ g : \mathbb{R}^n \supseteq B \to \mathbb{R},\ f(\mathbf{a}) = \mathbf{b} \end{array}$$

Potom

$$[\mathcal{D}g(\mathbf{b})] = [g_{\cdot 1}(\mathbf{b}), g_{\cdot 2}(\mathbf{b}), \ldots, g_{\cdot n}(\mathbf{b})]\,.$$

Ďalej

$$[\mathcal{D}f(\mathbf{a})] = \begin{bmatrix} f_{1\cdot 1}(\mathbf{a}) & f_{1\cdot 2}(\mathbf{a}) & \ldots & f_{1\cdot m}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ f_{n\cdot 1}(\mathbf{a}) & f_{n\cdot 2}(\mathbf{a}) & \ldots & f_{n\cdot m}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

Potom z podmienky

$$[\mathcal{D}(g \circ f)(\mathbf{a})] = [\mathcal{D}g(\mathbf{b})]\,[\mathcal{D}f(\mathbf{a})]$$

dostávame

$$(g \circ f)_{\cdot k}(\mathbf{a}) = (g_{\cdot 1}(\mathbf{b}) f_{1\cdot k}(\mathbf{a}) + g_{\cdot 2}(\mathbf{b}) f_{2\cdot k}(\mathbf{a}) + \ldots + g_{\cdot n}(\mathbf{b}) f_{n\cdot k}(\mathbf{a}))_{\mathbf{b}=f(\mathbf{a})}.$$

Tento výsledok sa zapisuje symbolicky v tvare tzv. reťazového pravidla:

$$\frac{\delta(g \circ f)}{\delta x_k} = \frac{\delta g}{\delta y_1}\frac{\delta y_1}{\delta x_k} + \frac{\delta g}{\delta y_2}\frac{\delta y_2}{\delta x_k} + \ldots + \frac{\delta g}{\delta y_n}\frac{\delta y_n}{\delta x_k}.$$

3.3.6 Zmiešané parciálne derivácie

Z parciálnych derivácií (prvého rádu) je možné opäť získavať parciálne derivácie. Sú to parciálne derivácie druhého rádu. Ich derivovaním získavame parciálne derivácie tretieho rádu, atď. Napríklad, ak uvažujeme o parciálnej derivácii podľa druhej premennej, je možné počítať jej parciálnu deriváciu podľa štvrtej premennej nasledujúcim spôsobom:

$$(f_{\cdot 2})_{\cdot 4} = f_{\cdot 24} = \frac{\delta}{\delta x_4}\left(\frac{\delta f}{\delta x_2}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x_4 \delta x_2}.$$

Podobne

$$(f_{\cdot 2})_{\cdot 2} = f_{\cdot 22} = \frac{\delta}{\delta x_2}\left(\frac{\delta f}{\delta x_2}\right) = \frac{\delta^2 f}{\delta {x_2}^2}.$$

Pre derivácie tretieho rádu dostávame

$$(f_{\cdot 24})_{\cdot 3} = (f_{\cdot 243}) = \frac{\delta}{\delta x_3}\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x_4 \delta x_2}\right) = \frac{\delta^3 f}{\delta x_3 \delta x_4 \delta x_2}.$$

Všimnime si, že pri rôznych zápisoch derivácie dostávame opačné poradia derivovania.

Veta 44 *Nech $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je otvorená množina a je daná funkcia $f : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$. Nech existujú $f_{\cdot 1} : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$, $f_{\cdot 2} : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$ a $f_{\cdot 12} : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$. Nech funkcia $f_{\cdot 12} : \mathbb{R}^2 \supseteq A \to \mathbb{R}$ je spojitá v bode $\mathbf{a} \in A$. Potom existuje $f_{\cdot 21}(\mathbf{a})$ a platí*

$$f_{\cdot 12}(\mathbf{a}) = f_{\cdot 21}(\mathbf{a}).$$

Veta 45 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ má na otvorenej množine A spojité všetky parciálne derivácie až do r-tého rádu vrátane. Potom tie parciálne derivácie k-tého rádu ($2 \le k \le r$), v ktorých sa podľa rovnakých premenných rovnako veľa razy derivuje (bez ohľadu na poradie), sú rovnaké.*

Definícia 25 *Ak funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ má na otvorenej množine A spojité všetky parciálne derivácie až do r-tého rádu vrátane, tak hovoríme, že je r-razy spojito diferencovateľná.*

Príklady

1. Vypočítajte parciálne derivácie druhého rádu funkcie
$$f(x,y) = yx^{\frac{x}{y}}.$$
2. Vypočítajte parciálne derivácie druhého rádu funkcie
$$f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2).$$
3. Vypočítajte parciálne derivácie druhého rádu funkcie
$$f(x,y,z) = 2^{xyz}.$$
4. Nech
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Vypočítajte $f_{\cdot 12}(0,0)$ a $f_{\cdot 21}(0,0)$. .... [$f_{\cdot 12}(0,0) = -1$, $f_{\cdot 21}(0,0) = 1$.]
5. Nech
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pre } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Vypočítajte $f_{\cdot 12}(0,0)$ a $f_{\cdot 21}(0,0)$. .... [$f_{\cdot 12}(0,0) = 0$, $f_{\cdot 21}(0,0) = 1$.]

3.3.7 Derivácia vo smere, gradient

Nech je daná funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ a A je otvorená množina. Nech funkcia f je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$. Uvažujme o jednotkovom vektore $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_m) \in \mathbb{R}^m$. Pretože A je otvorená množina, musí existovať $\tau > 0$ také, že pre každé $t \in (-\tau, \tau)$ platí $\mathbf{a} + \mathbf{e}t \in A$.

Potom je zrejmé, že funkcia

$$h : \mathbb{R} \supseteq (-\tau, \tau) \to A \subseteq \mathbb{R}^m, \; h(t) = \mathbf{a} + \mathbf{e}t = (a_1 + e_1 t, a_2 + e_2 t, \ldots, a_m + e_m t)$$

je diferencovateľná v bode 0. Tak isto v bode 0 je diferencovateľná aj funkcia

$$r = (f \circ h) : \mathbb{R} \supseteq (-\tau, \tau) \to A \subseteq \mathbb{R}, \; r(t) = f(h(t)) = f(\mathbf{a} + \mathbf{e}t).$$

Preto existuje

$$r'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{r(t) - r(0)}{t - 0}.$$

Túto deriváciu môžeme vypočítať pomocou reťazového pravidla nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} r'(0) =& f_{\cdot 1}(h(0))h_1'(0) + f_{\cdot 2}(h(0))h_2'(0) + \cdots + f_{\cdot m}(h(0))h_m'(0) \\ &= f_{\cdot 1}(\mathbf{a})e_1 + f_{\cdot 2}(\mathbf{a})e_2 + \cdots + f_{\cdot m}(\mathbf{a})e_m \\ &= (f_{\cdot 1}(\mathbf{a}), f_{\cdot 2}(\mathbf{a}), \ldots, f_{\cdot m}(\mathbf{a})) \cdot (e_1, e_2, \ldots, e_m) \\ &= (f_{\cdot 1}(\mathbf{a}), f_{\cdot 2}(\mathbf{a}), \ldots, f_{\cdot m}(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{e} \\ &= f_{\cdot \mathbf{e}}(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

Číslo $r'(0) = f_{\cdot \mathbf{e}}(\mathbf{a})$ nazývame derivácia funkcie f v bode $\mathbf{a}$ vo smere (jednotkového) vektora $\mathbf{e}$.

Vektor $(f_{\cdot 1}(\mathbf{a}), f_{\cdot 2}(\mathbf{a}), \ldots, f_{\cdot m}(\mathbf{a}))$ nazývame gradient funkcie f v bode $\mathbf{a}$. Označujeme

$$\text{grad}\, f(\mathbf{a}) = (f_{\cdot 1}(\mathbf{a}), f_{\cdot 2}(\mathbf{a}), \ldots, f_{\cdot m}(\mathbf{a})).$$

Pri tomto označení dostávame

$$f_{\cdot \mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \text{grad}\, f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}.$$

Z vlastnosti skalárného súčinu vyplýva, že

$$|f_{\cdot \mathbf{e}}(\mathbf{a})| = |\text{grad}\, f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}| \leq |\text{grad}\, f(\mathbf{a})||\mathbf{e}| = |\text{grad}\, f(\mathbf{a})|.$$

Z toho už vyplýva: Ak zvolíme jednotkový vektor v tvare

$$\mathbf{e} = \frac{\text{grad}\, f(\mathbf{a})}{|\text{grad}\, f(\mathbf{a})|},$$

potom dostaneme

$$f_{\cdot \mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \frac{\text{grad}\, f(\mathbf{a}) \cdot \text{grad}\, f(\mathbf{a})}{|\text{grad}\, f(\mathbf{a})|} = |\text{grad}\, f(\mathbf{a})|.$$

Z toho vyplýva, že gradient udáva smer, v ktorom sa funkcia najrýchlejšie mení.

Príklady

1. Nech $f(x,y) = e^{xy^2}$, $\mathbf{e} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$. Vypočítajte $f_{\cdot\mathbf{e}}(2,1)$. .... $[f_{\cdot\mathbf{e}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-8e^4).]$

2. Nájdite jednotkový vektor, v ktorého smere sa funkcia $f(x,y,z) = y^2\sin(xyz)$ v bode $\mathbf{a} = (1,1,\pi)$ mení najrýchlejšie. Určite rýchlosť (veľkosť) tejto zmeny. .... $[\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{1+2\pi^2}}(-\pi,-\pi,-1), f_{\cdot\mathbf{e}} = \sqrt{1+2\pi^2}.]$

3. Nech $f(x,y) = x^2 - 2xy + x - y^2 + 3y$. Nájdite bod, v ktorom je derivácia tejto funkcie v každom smere nulová. .... $[(\frac{1}{2},1).]$

3.3.8 Lokálne extrémy

Definícia 26 *Nech* $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ *a* $\mathbf{a} \in A$.
Nech existuje také prstencové okolie $\mathcal{O}^o_\delta(\mathbf{a})$, *že:*

1. *Pre každé* $\mathbf{x} \in \mathcal{O}^o_\delta(\mathbf{a}) \cap A$ *je* $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$. *Potom hovoríme, že funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *rýdze lokálne maximum.*

2. *Pre každé* $\mathbf{x} \in \mathcal{O}^o_\delta(\mathbf{a}) \cap A$ *je* $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$. *Potom hovoríme, že funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *rýdze lokálne minimum.*

Nech existuje také okolie $\mathcal{O}_\delta(\mathbf{a})$, *že:*

1. *Pre každé* $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_\delta(\mathbf{a}) \cap A$ *je* $f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{a})$. *Potom hovoríme, že funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *lokálne maximum.*

2. *Pre každé* $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_\delta(\mathbf{a}) \cap A$ *je* $f(\mathbf{x}) \ge f(\mathbf{a})$. *Potom hovoríme, že funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *lokálne minimum.*

Všetky uvedené pojmy nazývame spoločným termínom lokálne extrémy.
Ak pre každé $\mathbf{x} \in A$ *je* $f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{a})$, *tak hovoríme, že funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *totálne (globálne) maximum.*
Ak pre každé $\mathbf{x} \in A$ *je* $f(\mathbf{x}) \ge f(\mathbf{a})$, *tak hovoríme, že funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *totálne (globálne) minimum.*
Je zrejmé, že v bodoch, v ktorých funkcia nadobúda totálne extrémy, nadobda aj lokálne extrémy.

Veta 46 *(Nutná podmienka pre existenciu lokálnho extrému) Nech* $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$. *Nech*

1. A *je otvorená množina a* $\mathbf{a} \in A$.

2. *Funkcia* f *je diferencovateľná v bode* $\mathbf{a}$.

3. *Funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *lokálny extrém.*

Potom $\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Poznámka 3 *Ak funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ je dva razy spojito diferencovateľná, tak nezáleží na poradí derivovania v parciálnych deriváciách druhého rádu.*

Definícia 27 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ je dva razy spojito diferencovateľná na otvorenej množine A a $\mathbf{a} \in A$. Potom definujem druhý diferenciál funkcie f ako funkciu*

$$\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ \mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x}) = \mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f_{\cdot ij}(\mathbf{a}) x_i x_j.$$

To znamená, že hodnota druhého diferenciálu je homogenný polynóm druhého stupňa

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}) &= P(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ &= \mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ &= f_{\cdot 11}(\mathbf{a}) x_1 x_1 + f_{\cdot 12}(\mathbf{a}) x_1 x_2 + \ldots + f_{\cdot 1m}(\mathbf{a}) x_1 x_m + \\ &+ f_{\cdot 21}(\mathbf{a}) x_2 x_1 + f_{\cdot 22}(\mathbf{a}) x_2 x_2 + \ldots + f_{\cdot 2m}(\mathbf{a}) x_2 x_m + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ f_{\cdot m1}(\mathbf{a}) x_m x_1 + f_{\cdot m2}(\mathbf{a}) x_m x_2 + \ldots + f_{\cdot mm}(\mathbf{a}) x_m x_m \end{aligned}$$

Je zrejmé, že v tomto polynóme platí

$$f_{\cdot ij}(\mathbf{a}) = f_{\cdot ji}(\mathbf{a}).$$

Veta 47 *(Taylorova veta) Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ je dva razy spojito diferencovateľná na otvorenej množine A a nech pre každé $t \in \langle 0, 1\rangle$ je $(\mathbf{a}+t\mathbf{x}) \in A$. Potom existuje $t \in (0, 1)$ také, že*

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{x}) = \frac{\mathcal{D}^0 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})}{0!} + \frac{\mathcal{D}^1 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})}{1!} + \frac{\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a} + t\mathbf{x})(\mathbf{x})}{2!}.$$

Vo všeobecnosti homogenný polynóm druhého stupňa m-premenných je v tvare

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}) &= P(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ &= a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + \ldots + a_{1m} x_1 x_m + \\ &+ a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + \ldots + a_{2m} x_2 x_m + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ a_{m1} x_m x_1 + a_{m2} x_m x_2 + \ldots + a_{mm} x_m x_m \end{aligned}$$

V tomto polynóme platí $a_{ij} = a_{ji}$, pre $i, j = 1, 2, \ldots, m$.

Definícia 28 *Nech*

$$P(\mathbf{x}) = P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \text{pre} \quad i, j = 1, 2, \ldots, m$$

je homogenný polynóm druhého stupňa m-premenných (symetrická kvadratická forma). Ak

1. *pre každé* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ *je* $P(\mathbf{x}) > 0$*, tak hovoríme, že polynóm* $P(\mathbf{x})$ *je kladne definitný.*

2. *pre každé* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ *je* $P(\mathbf{x}) \geq 0$ *a existuje* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *také, že* $P(\mathbf{x}) = 0$*, tak hovoríme, že polynóm* $P(\mathbf{x})$ *je kladne semidefinitný.*

3. *pre každé* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ *je* $P(\mathbf{x}) < 0$*, tak hovoríme, že polynóm* $P(\mathbf{x})$ *je záporne definitný.*

4. *pre každé* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ *je* $P(\mathbf{x}) \leq 0$ *a existuje* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *také, že* $P(\mathbf{x}) = 0$*, tak hovoríme, že polynóm* $P(\mathbf{x})$ *je záporne semidefinitný.*

5. *existujú* $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in \mathbb{R}^m$ *také, že* $P(\mathbf{x_1})P(\mathbf{x_2}) < 0$*, tak hovoríme, že polynóm* $P(\mathbf{x})$ *je indefinitný.*

S každou symetrickou kvadratickou formou sú spojené nasledujúce determinanty

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad \text{pre} \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Veta 48 *(Sylvestrovo kritérium) Nech je symetrický homogenný polynóm druhého stupňa* $P(\mathbf{x}) = P(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$.

1. *Polynóm* $P(\mathbf{x})$ *je kladne definitný práve vtedy keď* $\Delta_k > 0$ *pre* $k = 1, 2, \dots, m$.

2. *Polynóm* $P(\mathbf{x})$ *je záporne definitný práve vtedy keď* $(-1)^k \Delta_k > 0$ *pre* $k = 1, 2, \dots, m$.

3. *Ak* $\Delta_m \neq 0$ *a* $P(\mathbf{x})$ *nie je definitný (kladne, alebo záporne), tak je indefinitný.*

Veta 49 *(Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému) Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ *je dva razy spojito diferencovateľná na otvorenej množine* A*. Nech pre* $\mathbf{a} \in A$ *platí* $\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$*. Potom*

1. *ak* $\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})$ *je kladne definitný, tak funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *rýdze lokálne minimum.*

2. *ak* $\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})$ *je záporne definitný, tak funkcia* f *má v bode* $\mathbf{a}$ *rýdze lokálne maximum.*

3. *ak* $\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})$ *je indefinitný, tak funkcia* f *nemá v bode* $\mathbf{a}$ *extrém.*

Definícia 29 *Nech* $A \subseteq \mathbb{R}^m$ *je ohraničená a uzavretá množina. Potom hovoríme, že* A *je kompaktná množina.*

Veta 50 *Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \to \mathbb{R}$ *je spojitá na kompaktnej množine* A*. Potom na tejto množine nadobúda (totálne) maximum a aj minimum. To znamená, že existujú* $\mathbf{c}, \mathbf{C} \in A$ *také, že pre každé* $\mathbf{x} \in A$ *platí:*

$$f(\mathbf{c}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{C}).$$

Príklady

Vyšetrite lokálne extrémy nasledujúcich funkcií:

1. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$. [$\mathbf{a} = (0,0,-1)$, nemá extrém, $\mathbf{b} = (24,-144,-1)$, rýdze lokálne minimum.]
2. $f(x,y,z) = 35 - 6x + 2z + x^2 - 2xy + 2y^2 + 2yz + 3z^2$. .... [$\mathbf{a} = (8,5,-2)$, rýdze lokálne minimum.]
3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - 2x + 3y - 4z + 6$. .... [$\mathbf{a} = (\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}, 2)$, rýdze lokálne minimum, $f(\mathbf{a}) = \frac{-1}{3}$.]
4. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. .... [$\mathbf{a} = (0,0,0)$, nemá extrém.]
5. $f(x,y,z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + 1$. .... [$\mathbf{a} = (0,0,0)$, rýdze lokálne minimum, $f(0,0,0) = 1$.]
6. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$. .... [$\mathbf{a} = (-1,-2,-3)$, rýdze lokálne minimum.]
7. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 2$. .... [$\mathbf{a} = (0,0)$, nemá extrém.]
8. $f(x,y) = x^2 + y^3$. .... [$\mathbf{a} = (0,0)$, nemá extrém.]
9. $f(x,y) = x^2 + y^4$. .... [$\mathbf{a} = (0,0)$, rýdze lokálne minimum.]
10. $f(x,y) = x^2(1 + y^2)$. .... [$\mathbf{a} = (0,y)$, lokálne minimum.]
11. $f(x,y) = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$. .... [$\mathbf{a} = (\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3})$, nemá extrém.]
12. $f(x,y) = x^3 + 3y^2 - 6xy - 6x + 6y$. .... [$\mathbf{a} = (0,-1)$, nemá extrém, $\mathbf{b} = (2,1)$, rýdze lokálne minimum.]
13. $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$. ... [$\mathbf{a} = (1,0)$, rýdze lokálne minimum.]
14. $f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$. .... [$\mathbf{a} = (0,0)$, rýdze lokálne minimum, $\mathbf{b} = (\frac{-1}{4}, \frac{-1}{2})$, nemá extrém.]

Nájdite (totálne, globálne) extrémy funkcií:

1. $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ na množine $A = \{(x,y) \mid$ je ohraničená priamkami $x = 0,\ y = 0,\ x + y - 3\}$. .... [$-19 \leq f(x,y) \leq -1$.]
2. $f(x,y) = x^2y(2 - x - y)$ na trojuholníku $A = \{(x,y) \mid$ je ohraničený priamkami $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 6\}$. .... [$-128 \leq f(x,y) \leq \frac{1}{4}$.]

3. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ na obdĺžniku $A = \{(x,y) \mid$ je ohraničený priamkami $x = 0,\ x = 2,\ y = -1,\ y = 2\}$. ....$[-1 \leq f(x,y) \leq 13.]$

4. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16)$ na množine $A = \{(x,y) \mid\ x^2 + y^2 \leq 49\}$. $[-20 \leq f(x,y) \leq 149.]$

5. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ na kruhu $A = \{(x,y) \mid\ x^2 + y^2 \leq 25\}$. $[0 \leq f(x,y) \leq 5.]$

Chapter 4

Integrálny počet FVP

4.1 Úvodné pojmy

Definícia 30 *Množinu*

$$\begin{aligned} I &= \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \ldots \times \langle a_m, b_m\rangle \\ &= \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid a_i \leq x_i \leq b_i \text{ pre } i = 1, 2, \ldots, m\} \end{aligned}$$

nazývame uzavretý interval. Číslo

$$\mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_m - a_m)$$

nazývame miera intervalu I.

Definícia 31 *Nech $A \subset \mathbb{R}^m$. Ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje taká konečná množina intervalov $I_1, I_2, \ldots, I_k$, že*

$$\mu(I_1) + \mu(I_2) + \ldots + \mu(I_k) < \varepsilon,$$

tak hovoríme, že A je množina miery nula.

Definícia 32 *Nech $A \subset \mathbb{R}^m$. Bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ nazývame hraničným bodom množiny A, ak v každom jeho okolí $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a})$ existujú body aj z množiny A a aj body, ktoré do množiny A nepatria. Množinu všetkých hraničných bodov množiny A nazývame hranica množiny a označujeme znakom* $\mathrm{hr}\,(A)$.

Definícia 33 *Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je ohraničená množina. Ak hranica $\mathrm{hr}\,(A)$ tejto množiny je množina miery nula, tak hovoríme, že množina A je merateľná množina.*

Definícia 34 *Nech $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ a $g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ sú také dve spojité funkcie, že $f(x) \leq g(x)$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$. Potom množinu*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

nazývame elementárna oblasť typu $[x, y]$.

Analogicky definujeme elementárnu oblasť typu $[y, x]$.

Definícia 35 *Nech $B \subset \mathbb{R}^2$ je elementárna oblasť typu $[x, y]$. Nech $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \to \mathbb{R}$ a $\psi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \to \mathbb{R}$ sú také dve spojité funkcie, že $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$ pre každé $(x, y) \in B$. Potom množinu*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B,\ \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

nazývame elementárna oblasť typu $[x, y, z]$.

Množina $A \subset \mathbb{R}^3$ je elementárnou oblasťou typu $[x, y, z]$ práve vtedy, keď

- *existujú spojité funkcie $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ a $g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ také, že $f(x) \leq g(x)$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$,*
- *$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$,*
- *existujú spojité funkcie $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \to \mathbb{R}$ a $\psi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \to \mathbb{R}$ také, že $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$ pre každé $(x, y) \in B$,*
- *$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x),\ \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$.*

Podobným spôsobom definujeme v $\mathbb{R}^3$ elementárne oblasti aj iných typov Elementárne oblasti je možné definovať aj v priestore $\mathbb{R}^m$ pre $m > 3$.

Veta 51 *Všetky elementárne oblasti sú merateľné množiny.*

4.2 Opakovanie z integrálneho počtu reálnej funkcie jednej reálnej premennej

Definícia 36

1. *Nech $\langle a, b\rangle$ je uzavretý interval. Nech $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$ sú také, že $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b$. Potom $k + 1-$ticu $D = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ nazývame delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ nazývame deliace intervaly.*
2. *Nech $D = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom číslo $\|D\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, \ldots, k\}$ nazývame norma delenia D.*
3. *Nech $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$. Ak $\lim_{n\to\infty} \|D_n\| = 0$, potom hovoríme, že postupnosť $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ je normálna postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$.*
4. *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$ a $D = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ je ľubovolné delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Nech body $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ sú ľubovolne zvolené pre $i = 1, 2, \ldots, k$. Potom číslo*

   $$S_D(f) = \sum_{i=1}^{k} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

   nazývame integrálny súčet funkcie f pre dané delenie D intervalu $\langle a, b\rangle$ a voľbu bodov $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$.

Definícia 37 *Nech funkcia* $f : A \to \mathbb{R}$ *je ohraničená na intervale* $\langle a, b\rangle \subseteq A$. *Ak pre každú normálnu postupnosť delení* $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ *intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a každú voľbu bodov* c_i *v integrálnych súčtoch* $S_{D_n}(f)$, *postupnosť* $(S_{D_n}(f))_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k tomu istému číslu* J, *tak hovoríme, že funkcia* f *je integrovateľná na intervale* $\langle a, b\rangle$. *Číslo*

$$J = \lim_{n\to\infty} S_{D_n}(f)$$

nazývame určitý integrál funkcie f *na intervale* $\langle a, b\rangle$ *a označujeme*

$$J = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Veta 52 *(Prvá postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech funkcia* $f : A \to \mathbb{R}$ *je spojitá na intervale* $\langle a, b\rangle \subseteq A$. *Potom je na tomto intervale integrovateľná.*

Definícia 38 *Nech sú splnené nasledujúce podmienky:*

1. *Funkcia* $f : A \to \mathbb{R}$ *je ohraničená na intervale* $\langle a, b\rangle \subseteq A$.
2. *V intervale* $\langle a, b\rangle$*existuje len konečný počet bodov, v ktorých táto funkcia nie je spojitá.*
3. *V každom bode z intervalu* (a, b) *existuje vlastná limita funkcie* f *sprava a aj zľava.*
4. *Existujú vlastné limity* $\lim_{x\to a+} f(x)$ *a* $\lim_{x\to b-} f(x)$.

Potom hovoríme, že funkcia f *je po čiastkach spojitá na intervale* $\langle a, b\rangle$.

Veta 53 *(Druhá postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech funkcia* $f : A \to \mathbb{R}$ *je po čiastkach spojitá na intervale* $\langle a, b\rangle \subseteq A$. *Potom je na tomto intervale integrovateľná.*

4.3 Definícia integrálu na intervale

Definícia 39 *1. Nech*

$$\begin{aligned} I &= \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \ldots \times \langle a_m, b_m\rangle \\ &= \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid a_i \le x_i \le b_i \text{ pre } i = 1, 2, \ldots, m\} \end{aligned}$$

je uzavretý interval. Nech D_i *je delenie intervalu* $\langle a_i, b_i\rangle$ *pre* $i = 1, 2, \ldots, m$. *Potom* m*-ticu* $D = (D_1, D_2, \ldots, D_m)$ *nazývame delenie intervalu* I. *Číslo* $\|D\| = \max\{\|D_i\| \mid i = 1, 2, \ldots, m\}$ *nazývame norma delenia* D. *Každým delením* m*-rozmerného intervalu* I *je určený konečný počet* m*-rozmerných deliacich intervalov* $I_1, I_2, \ldots, I_k$, *na ktoré je rozdelený interval* I. *To znamená, že* $I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k$ *a deliace intervaly môžu mať spoločné len hraničné body.*

2. *Nech* $(D^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť delení intervalu* I. *Ak* $\lim_{n\to\infty} \|D^{(n)}\| = 0$, *potom hovoríme, že postupnosť* $(D^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ *je normálna postupnosť delení intervalu* I.

3. *Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je ohraničená na intervale* $I \subseteq M$ *a* D *s deliacimi intervalmi* $I_1, I_2, \dots, I_k$ *je ľubovolné delenie intervalu* I. *Nech body* $\mathbf{c}_i \in I_i$ *sú ľubovolne zvolené pre* $i = 1, 2, \dots, k$. *Potom číslo*
$$S_D(f) = \sum_{i=1}^{k} f(\mathbf{c}_i)\mu(I_i)$$
nazývame integrálny súčet funkcie f *pre dané delenie* D *intervalu* I *a voľbu bodov* $c_i \in I_i$.

Definícia 40 *Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je ohraničená na intervale* $I \subseteq M$. *Ak pre každú normálnu postupnosť delení* $(D^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ *intervalu* I *a každú voľbu bodov* c_i *v integrálnych súčtoch* $S_{D^{(n)}}(f)$, *postupnosť* $(S_{D^{(n)}}(f))_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k tomu istému číslu* J, *tak hovoríme, že funkcia* f *je integrovateľná na intervale* I. *Číslo*
$$J = \lim_{n\to\infty} S_{D^{(n)}}(f)$$
nazývame integrál funkcie f *na intervale* I *a označujeme*
$$J = \int_I f = \int_I f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \iint_I f(x,y)\,dxdy = \iiint_I f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Veta 54 *(Prvá postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je spojitá na intervale* $I \subseteq M$. *Potom je na tomto intervale integrovateľná.*

Veta 55 *(Druhá postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je ohraničená na intervale* $I \subseteq M$. *Nech množina bodov z intervalu* I, *v ktorých* f *nie je spojitá, je množina miery nula. Potom je funkcia* f *na intervale* I *integrovateľná.*

4.4 Definícia integrálu na množine

Definícia 41 *Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je ohraničená na ohraničenej množine* $A \subseteq M$. *Nech* $I \supseteq A$ *je ľubovolný interval. Nech*
$$f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ f_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \textit{pre } \mathbf{x} \in A, \\ 0 & \textit{pre } \mathbf{x} \notin A. \end{cases}$$
Ak funkcia $f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *je integrovateľná na intervale* I, *tak hovoríme, že funkcia* f *je integrovateľná na množine* A *a píšeme*
$$\int_A f = \int_I f_A = \iint_A f(x,y)\,dxdy = \iiint_A f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Veta 56 *(Postačujúca podmienka integrovateľnosti na množine) Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ je ohraničená na merateľnej množine $A \subseteq M$. Nech množina tých bodov z množiny A, v ktorých f nie je spojitá, je množina miery nula. Potom je funkcia f na množine A integrovateľná.*

4.5 Vlastnosti integrálu

Veta 57 *Nech funkcie $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ sú integrovateľné na množine $A \subseteq M$ a $c \in \mathbb{R}$ je ľubovolná konštanta. Potom*

1. *Funkcia $(f+g) : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na množine A a platí*

$$\int\limits_A (f+g) = \int\limits_A f + \int\limits_A g.$$

2. *Funkcia $(cf) : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na množine A a platí*

$$\int\limits_A (cf) = c \int\limits_A f.$$

3. *Funkcia $|f| : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na množine A a platí*

$$|\int\limits_A f| \leq \int\limits_A |f|.$$

Veta 58 *Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je množina miery nula a funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ je ohraničená na množine A. Potom $\int\limits_A f = 0$.*

Veta 59 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na množinách $A, B \subseteq M$, pričom $A \cap B$ je množina miery nula. Potom*

$$\int\limits_{A \cup B} f = \int\limits_A f + \int\limits_B f.$$

Definícia 42 *Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je merateľná množina. Potom mieru $\mu(A)$ množiny A definujeme pomocou predpisu:*

$$\mu(A) = \int\limits_A 1.$$

4.6 Fubiniho vety

Veta 60 *Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^2 \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je integrovateľná na elementárnej oblasti*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

typu $[x, y]$. *Nech pre každé* $x \in \langle a, b\rangle$ *existuje integrál*

$$\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy.$$

Potom

$$\iint\limits_{A} f(x, y)\, dxdy = \int\limits_{a}^{b} (\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy)dx.$$

Podobná veta platí pre elementárnu oblasť typu $[y, x]$.

Veta 61 *Nech funkcia* $f : \mathbb{R}^3 \supseteq M \to \mathbb{R}$ *je integrovateľná na elementárnej oblasti*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B,\ \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

typu $[x, y, z]$. *Nech pre každé* $(x, y) \in B$ *existuje integrál*

$$\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Potom

$$\iiint\limits_{A} f(x, y, z)\, dxdydz = \iint\limits_{B} (\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz)dxdy.$$

Dôsledok 11 *Nech* A *je elementárna oblasť typu* $[x, y, z]$ *a na elementárnej oblasti* $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}$ *sú splnené podmienky Fubiniho vety pre funkciu dvoch premenných. Potom*

$$\iiint\limits_{A} f(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_{a}^{b} (\int\limits_{g(x)}^{h(x)} (\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\, dz)dy)dx.$$

Podobné vety platia pre zvyšné typy elementárnych oblastí v $\mathbb{R}^3$.

Príklady

Vypočítajte:

1. $\iint\limits_I x^2 y \cos(xy^2)dxdy$, ak $I = \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0, 2\rangle$. .... $[-\frac{\pi}{16}.]$
2. $\iint\limits_I ye^{x+y}dxdy$, ak $I = \langle 0, 4\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. .... $[e^4 - 1.]$
3. $\iint\limits_I \ln(1+x)^{2y}dxdy$, ak $I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. ....$[2\ln 2 - 1.]$
4. $\iint\limits_I \frac{1}{(1-xy)^2}dxdy$, ak $I = \langle 2, 3\rangle \times \langle 1, 2\rangle$. .... $[\ln \frac{6}{5}.]$
5. $\iint\limits_A \cos(x+y)dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \pi,\ x \le y \le \pi\}$. .... $[0.]$
6. $\iint\limits_A ye^x dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid y^2 \le x \le y+2\}$. ....$[\frac{1}{2}(e^4 + e).]$
7. $\iint\limits_A (x+y)dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ y \le x \le 2y\}$. ....$[\frac{7}{3}.]$
8. $\iint\limits_A \frac{x^2}{y^2}dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid 0 < \frac{1}{x} \le y \le x,\ x \le 2\}$. ....$[\frac{9}{4}.]$
9. $\iint\limits_A |x|dxdy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y = x^2,\ 4x^2 + y^2 = 12$, a platí, že $y \ge 0$. .... $[4\sqrt{3} - \frac{10}{3}.]$
10. $\iint\limits_A \sqrt{xy - y^2}dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 3,\ \frac{x}{10} \le y \le x\}$. .....$[162.]$
11. Vypočítajte plošný obsah množiny A, ktorá je ohraničená krivkami $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1,\ y^2 = x + 1$ a obsahuje bod $(0,0)$. ....$[8\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right).]$
12. $\iint\limits_A (x^2 y)dxdy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y = x,\ y = x^2$. .[.]
13. $\iint\limits_A (x^2 + y)dxdy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y = \frac{1}{2}x,\ y = 2x,\ xy = 2$, pričom $x \ge 0$. .... [.]
14. $\iint\limits_A (x^2 y)dxdy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y = x - 4,\ y^2 = 2x$. [.]
15. $\iint\limits_A (x+y)dxdy$, ak množina A je ohraničená krivkami $x = 0,\ y = \frac{3}{2}x,\ y = 4 - (x-1)^2$, pričom $x \ge 0$. .... [.]
16. $\iiint\limits_A y\cos(x+z)dxdydz$, ak množina A je ohraničená plochami $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ z = 0,\ x + z = \frac{\pi}{2}$. ....$[\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.]$

17. $\iiint\limits_A xyz dxdydz$, ak množina A je ohraničená plochami $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x^2+y^2+z^2=1$, pričom $x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0.$ .... $[\frac{1}{48}.]$

18. $\iiint\limits_A \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dxdydz$, ak množina A je ohraničená plochami $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1.$ .... $[\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).]$

19. $\iiint\limits_A x^2yz^3 dxdydz$, ak $A=\{(x,y,z)\mid 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x,\ 0\leq z\leq xy\}.$ .... [.]

20. $\iiint\limits_A \frac{xy^3z}{(1+z^2)^2} dxdydz$, ak $A=\{(x,y,z)\mid \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 5,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}.$ .... [.]

4.7 Transformácie integrálu

Veta 62 *(Transformácia pomocou polárnych súradníc) Nech* $Z=\langle 0,\infty)\times\langle -\pi,\pi\rangle$. *Nech*

$$g:\mathbb{R}^2\supset Z\to\mathbb{R}^2,\ g(\varrho,\varphi)=(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi),\quad J_g(\varrho,\varphi)=\varrho.$$

Nech $A,B\subset\mathbb{R}^2$ *sú také kompaktné a merateľné množiny, že*

1. $B\subseteq Z$,
2. $g(B)=A$.

Nech $f:\mathbb{R}^2\supseteq A\to\mathbb{R}$ *je spojitá funkcia. Potom*

$$\iint\limits_A f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_B f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi)|J_g(\varrho,\varphi)|\,d\varrho d\varphi.$$

Veta 63 *(Transformácia pomocou cylindrických súradníc) Nech* $Z=\langle 0,\infty)\times\langle -\pi,\pi\rangle\times(-\infty,\infty)$. *Nech*

$$g:\mathbb{R}^3\supset Z\to\mathbb{R}^3,\ g(\varrho,\varphi,u)=(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,u),\quad J_g(\varrho,\varphi,u)=\varrho.$$

Nech $A,B\subset\mathbb{R}^3$ *sú také kompaktné a merateľné množiny, že*

1. $B\subseteq Z$,
2. $g(B)=A$.

Nech $f:\mathbb{R}^3\supseteq A\to\mathbb{R}$ *je spojitá funkcia. Potom*

$$\iiint\limits_A f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_B f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi,u)|J_g(\varrho,\varphi,u)|\,d\varrho d\varphi du.$$

Veta 64 *(Transformácia pomocou sférických súradníc) Nech* $Z = \langle 0, \infty) \times \langle -\pi, \pi \rangle \times \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. *Nech*

$$g : \mathbb{R}^3 \supset Z \to \mathbb{R}^3,\ g(\varrho, \varphi, \vartheta) = (\varrho \cos\varphi \cos\vartheta, \varrho \sin\varphi \cos\vartheta, \varrho \sin\vartheta), \quad J_g(\varrho, \varphi, \vartheta) = \varrho^2 \cos\vartheta.$$

Nech $A, B \subset \mathbb{R}^3$ *sú také kompaktné a merateľné množiny, že*

1. $B \subseteq Z$,
2. $g(B) = A$.

Nech $f : \mathbb{R}^3 \supseteq A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia. Potom*

$$\iiint\limits_A f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_B f(\varrho \cos\varphi \cos\vartheta, \varrho \sin\varphi \cos\vartheta, \varrho \sin\vartheta) |J_g(\varrho, \varphi, \vartheta)|\, d\varrho d\varphi d\vartheta.$$

Veta 65 *(Transformácia pomocou afinných súradníc) Nech*

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ g(u, v, w) = (a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w, a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w, a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w).$$

Nech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad a \quad J_g(u, v, w) = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Nech

1. $J_g(u, v, w) \neq 0$,
2. $A, B \subset \mathbb{R}^3$ *sú také kompaktné a merateľné množiny, že* $g(B) = A$.

Nech $f : \mathbb{R}^3 \supseteq A \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia. Potom*

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_A f(x, y, z)\, dxdydz = \\ &= \iiint\limits_B f(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w, a_{21}u + a_{22}v + \\ &+ a_{23}w, a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w) |J_g(u, v, w)|\, dudvdw. \end{aligned}$$

Príklady

1. Vypočítajte $\iint\limits_A \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$, ak $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$. $\ldots [\frac{16\pi}{3}]$.
2. Vypočítajte $\iint\limits_A 2(x^2 + y^2) dxdy$, ak $A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq |x|\}$. .... [].
3. Vypočítajte $\iint\limits_A \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$, ak $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$. ..... [].

4. Vypočítajte $\iint\limits_A \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$. .... $[\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}]$.
5. Vypočítajte $\iint\limits_A \ln(1+x^2+y^2)dxdy$, ak $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 9,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$. .... $[(10\ln 10 - 9)\frac{\pi}{4}]$.
6. Pomocou transformácie polárnymi súradnicami vypočítajte objem kužela $A = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2\}$. .... $[\frac{8}{3}\pi.]$
7. Vypočítajte $\iiint\limits_A (x^2+y^2)dxdydz$, ak ak množina A je ohraničená plochami $x^2+y^2 = 2z,\ z = 2$. .... $[\frac{16\pi}{3}]$.
8. Vypočítajte $\iiint\limits_A x^2ydxdydz$, ak ak množina A je ohraničená plochami $x^2+y^2 = 1,\ x^2+y^2 = 4,\ z = 0\ x+z = 3$. .... [.]
9. Vypočítajte $\iiint\limits_A xy\sqrt{z}dxdydz$, ak ak množina A je ohraničená plochami $x^2+y^2 = 4z^2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 1$, pričom $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$. . $[\frac{4}{11}]$.
10. Vypočítajte objem telesa $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq z \leq 4-(x^2+y^2)\}$. $[4\pi]$
11. Vypočítajte objem telesa A, ktoré je ohraničené plochami $x^2+y^2 = 4x,\ x^2+y^2+z^2 = 16,\ y = 0\ z = 0$, pričom $z \geq 0$. .... [.]
12. $\iiint\limits_A zdxdydz$, ak množina A je ohraničená plochami $x = 0,\ y = 0,\ x^2+y^2+z^2 = 2,\ x^2+y^2 = z^2$, pričom $x \geq 0,\ y \geq 0$. .... $[\frac{\pi}{8}.]$
13. Vypočítajte $\iiint\limits_A (x^2+y^2)dxdydz$, ak $A = \{(x,y,z) \mid 0 \leq z,\ 4 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9\}$. .... $[\left(\frac{3^5-2^5}{15}\right)2\pi]$.
14. Vypočítajte $\iiint\limits_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, ak $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq z\}$. .... $[\frac{\pi}{10}]$.
15. Vypočítajte $\iiint\limits_A z^2dxdydz$, ak $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x^2+y^2+z^2 \leq 4z\}$. .... $[\frac{59}{15}\pi.]$
16. Vypočítajte objem telesa A, ktoré je ohraničené rovinami $2x-y+z-3 = 0,\ 2x-y+z = 0,\ x+y+z-5 = 0,\ x+y+z = 0, x+2y+2z-4 = 0,\ x+2y+2z = 0$. .... [30.]
17. Vypočítajte objem elipsoidu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$. .... $[32\pi.]$
18. Vypočítajte objem telesa $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq z \leq 4-(x^2+y^2)\}$. [].

19. Vypočítajte objem telesa $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2-6z \le 0,\ x^2+y^2 < \frac{z^2}{3}\}$. .... [.]

20. $\iiint\limits_A x^2yz^3\,dxdydz$, ak $A = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le xy\}$. .... [.]

21. $\iiint\limits_A \frac{xy^3z}{(1+z^2)^2}\,dxdydz$, ak $A = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 5,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$. .... [.]