Matematika 2

Ľ. Marko

March 9, 2022

CONTENTS

Part I

Predhovor

Matematika je univerzálny jazyk pre fyzikálne a technické vedy. Preto je nutné aby študenti FEI STU Bratislava rozumeli základným matematickým pojmom z matematickej analýzy funkcií jednej a komplexnej premennej. Tento učebný text z matematickej analýzy som vytvoril po novej akreditácii pre študijné odbory RK, EL, TLK počas letného semestra školského roku 2017/2018. Nemožno ho považovať za konečnú verziu. Pretože predmet "Matematika 2" sa vyučuje prvý krát, budem text dopĺňať a adaptovať v priebehu letného semestra školského roku 2018/19. Ľ. Marko

Part II

Matematická analýza I.

Mnohé fyzikálne a elektrotechnické aplikácie si vyžadujú, aby študenti rozumeli základným pojmom z matematickej analýzy, integrálneho počtu, integračných metód, diferenciálneho aj integrálneho počtu funkcií viacerých premenných. Tieto poznatky nutne patria k "povinnej výbave" každého študenta FEI STU.

Chapter 1 INTEGRÁLNY POČET FUNKCIí JEDNEJ REÁLNEJ PREMENNEJ.

Mnohé fyzikálne a technické aplikácie si vyžadujú, aby sme vedeli vypočítať napríklad prácu premennej sily po určitej dráhe, dĺžky kriviek v rovine, plošné obsahy rôznych rovinných útvarov, objemy priestorových telies. Vhodným aparátom vo všetkých predošlých prípadoch je znalosť integrálneho počtu. V tejto časti aj v ďalších častiach sa budeme venovať integrálnemu počtu.

Určitý integrál.

Predpokladajme, že chceme nájsť plošný obsah obrazca R ohraničeného osou o_x, priamkami $x = a$, $x = b$ a grafom spojitej funkcie $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $(f(x) > 0)$. Naša snaha bude nájsť obsah pomocou obdĺžnikov opísaných a vpísaných grafu funkcie.

Delenie intervalu.

Definition 1 *Delením intervalu $\langle a, b\rangle$ budeme nazývať konečnú množinu bodov $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, takých, že $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$.*

Delenie P delí interval $\langle a, b\rangle$ na podintervaly $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$, $\langle x_2, x_3\rangle$, ..., $\langle x_{n-1}, x_n\rangle$. Ak dĺžku podintervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ označíme $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, ..., n$, potom dĺžka intervalu $\langle a, b\rangle$ je rovná $b - a = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + ... + (x_n - x_{n-1}) = \Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n$.

Definition 2 *Nech P je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$ a nech $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je ohraničená funkcia. Sumu*

$$D(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k,\ H(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

nazývame dolným, respektíve horným integrálnym súčtom ohraničenej funkcie f pre delenie P, kde $m_k = \inf_{x\in\langle x_{k-1}, x_k\rangle} f(x)$, $M_k = \sup_{x\in\langle x_{k-1}, x_k\rangle} f(x)$.

Example 3 *Nájdime $D(f, P)$, $H(f, P)$, $D(f, T)$, $H(f, T)$ ak $f : \langle 0, 2\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^2$ a $P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ a $T = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$.*

Solution 4 *Pre delenie P máme*

$$m_1 = 0, m_2 = \frac{1}{4}, m_3 = 1, m_4 = \frac{9}{4}, M_1 = \frac{1}{4}, M_2 = 1, M_3 = \frac{9}{4}, M_4 = 4,$$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_4 = \frac{1}{2}.$$

Potom $D(f, P) = \frac{7}{4}$ a $H(f, P) = \frac{15}{4}$. Podobne dostaneme $D(f, T) = \frac{113}{64}$ a $H(f, T) = \frac{237}{64}$. $\square$

Z definície delenia uzavretého intervalu je jasné, že $\forall P$ platí: $D(f,P) \leq H(f,P)$. Okrem toho, ak $f(x) \geq 0, \forall x \in \langle a,b\rangle$ pre plochu obrazca R medzi grafom funkcie f osou o_x a priamkami $x=a$, $x=b$ máme:

$$D(f,P) \leq R \leq H(f,P).$$

Definition 5 *Delenie $\tilde{P}$ intervalu $\langle a,b\rangle$, ktoré vznikne z delenia P pridaním konečného počtu bodov sa nazýva zjemnenie delenia P.*

Example 6 *Delenie T v predchádzajúcom príklade je zjemnením delenia P intervalu $\langle 0,2\rangle$.*

Theorem 7 *Ak T je zjemnením delenia P intervalu $\langle a,b\rangle$, potom $D(f,P) \leq D(f,T)$ a $H(f,T) \leq H(f,P)$.*

Theorem 8 *Nech P a Q sú dve ľubovoľné rôzne delenia intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom pre každú ohraničenú funkciu $f:\langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ platí $D(f,P) \leq H(f,Q)$.*

Definition 9 *Ohraničená funkcia $f:\langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sa nazýva (riemannovsky) integrovateľná ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje delenie P_ε také, že $H(f,P_\varepsilon) - D(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$. Definícia je ekvivalentná s podmienkou, že existuje číslo I, také že*

$$I = \sup\{D(f,P) : P \text{ je delenie } \langle a,b\rangle\} = \inf\{H(f,T) : T \text{ je delenie } \langle a,b\rangle\}.$$

Hodnota I, ktorá vyhovuje podmienke sa nazýva určitý integrál z funkcie f na $\langle a,b\rangle$ a označujeme ju

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

čítame integrál od a po b z funkcie f.

Tak $\int_a^b f(x)\,dx$ je jediné reálne číslo I také, že

$$D(f,P) \leq I \leq H(f,P), \forall P \text{ delenie } \langle a,b\rangle.$$

> Majme danú spojitú funkciu $f:\langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, pre ktorú poznáme hodnotu $\int_a^b f(x)\,dx$. Plošný obsah obrazca ohraničeného osou o_x, priamkami $x=a$, $x=b$ a grafom spojitej funkcie $f:\langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ vytvára geometrickú interpretáciu určitého integrálu. Určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ je číslo, ktoré závisí iba od f, a, b. Premenná x, ktorá sa objavuje v integrále je „nemá", môžeme ju zameniť za inú. Tak napríklad $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$.

Remark 10 *Symbol $\int$ je označením integrálu, číslo a nazývame dolnou hranicou určitého integrálu, číslo b nazývame hornou hranicou určitého integrálu.*

Example 11 *Ukážeme, že funkcia $f:\langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x)=k$ je integrovateľná funkcia.*

Solution 12 *Platí $D(f,P) = k(b-a) = H(f,P), \forall P$. Odkiaľ dostávame $\int_a^b f(x)\,dx = k(b-a)$.* $\square$

Example 13 *Ukážeme, že funkcia* $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = x$ *je riemannovsky integrovateľná funkcia a platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Solution 14 *Nech* $P = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$, *je delenie intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Potom* $m_k = x_{k-1}, M_k = x_k$ *a platí:* $x_{k-1} < \frac{x_{k-1}+x_k}{2} < x_k$. *Potom* $D(f, P) = \sum_{k=1}^n x_{k-1}(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^n \frac{x_{k-1}+x_k}{2}(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^n x_k(x_k - x_{k-1}) = H(f, P)$, $\sum_{k=1}^n \frac{x_{k-1}+x_k}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left(x_k^2 - x_{k-1}^2\right) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$, *t.j.*

$$D(f, P) < \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) < H(f, P), \forall P,$$

odkiaľ máme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.\square$$

Example 15 *Ukážeme, že funkcia* $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^2$, $a \geq 0$ *je riemannovsky integrovateľná funkcia a platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Solution 16 *Nech* P *je ako v predchádzajúcom príklade, potom* $m_k = x_{k-1}^2, M_k = x_k^2$ *a* $\forall x_{k-1}, x_k \in \boldsymbol{R}$ *platí:*

$$x_{k-1}^2 < \frac{x_{k-1}^2 + x_{k-1}x_k + x_k^2}{3} < x_k^2.$$

Potom použitím postupu z predchádzajúceho príkladu dostaneme výsledok. $\square$

Vlastnosti a existencia určitého integrálu.

Theorem 17 *(Veta o vlastnostiach určitého integrálu) Nech* f, g *sú integrovateľné funkcie na* $\langle a, b\rangle$ *a nech* $k \in \boldsymbol{R}$. *Potom platí*

1) $kf + g$ *je integrovateľná a platí*

$$\int_a^b (kf + g)(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \quad \textit{(lineárnosť).}$$

2) Ak $f(x) \geq 0$, *pre každé* $x \in \langle a, b\rangle$, *potom* $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$; *ak* $f(x) \geq g(x)$, *pre každé* $x \in \langle a, b\rangle$, *potom* $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

3) Ak $m \leq f(x) \leq M$, *pre každé* $x \in \langle a, b\rangle$, *potom*

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a).$$

4) Ak f *je integrovateľná, potom aj* $|f|$ *je integrovateľná a platí*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f|(x)\,dx.$$

Example 18 *Ukážme, že platí* $2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^4}dx \leq \frac{8}{3}$.

Solution 19 *Platí nerovnica*

$$1 \leq 1+x^4 \leq 1+2x^2+x^4 = (1+x^2)^2,$$

teda

$$1 \leq \sqrt{1+x^4} \leq 1+x^2,$$

s využitím predchádzajúcej vety a príkladov **??** *a* **??** *dostávame*

$$2 = \int_{-1}^{1} 1dx \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^4}dx \leq \int_{-1}^{1} \left(1+x^2\right) dx = 2 + \frac{1^3-(-1)^3}{3} = \frac{8}{3}.\square$$

Doteraz sme predpokladali, že funkcia f je ohraničená a integrovateľná. Teraz sa budeme zaujímať o podmienky za akých je funkcia integrovateľná. Nie každá ohraničená funkcia musí byť integrovateľná ako ukazuje nasledujúci príklad.

Example 20 *Daná je funkcia*

$$f : \langle 0,1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{pre} \quad x \textit{ iracionálne} \\ 0 & \textit{pre} \quad x \textit{ racionálne} \end{cases}.$$

Ukážme, že f nie je riemannovsky integrovateľná.

Solution 21 *Každý horný súčet $H(f,P) = 1$ a každý dolný súčet $D(f,P) = 0$, pre ľubovoľné delenie P intervalu $\langle 0,1\rangle$, pretože každý jeho podinterval vždy obsahuje racionálne aj iracionálne číslo. Máme:*

$$\sup\{D(f,P) : P \textit{ je delenie } \langle 0,1\rangle\} = 0,\ \inf\{H(f,T) : T \textit{ je delenie } \langle 0,1\rangle\} = 1,$$

neexistuje teda číslo I, také aby

$$I = \sup\{D(f,P) : P \textit{ je delenie } \langle a,b\rangle\} = \inf\{H(f,T) : T \textit{ je delenie } \langle a,b\rangle\},$$

funkcia f nie je riemannovsky integrovateľná. Okrem toho nie je spojitá v každom bode z $\langle 0,1\rangle$.$\square$

Dá sa dokázať veta: každá spojitá funkcia definovaná na uzavretom intervale je rovnomerne spojitá. Teraz môžeme sformulovať postačujúcu podmienku integrovateľnosti.

Postačujúca podmienka integrovateľnosti funkcie.

Theorem 22 *(Postačujúca podmienka integrovateľnosti funkcie) Ak $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia, potom je na $\langle a,b\rangle$ riemannovsky integrovateľná.*

Theorem 23 *(Veta o aditívnosti určitého integrálu) Nech $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia a nech $c \in (a,b)$. Potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Example 24 *Vypočítajte* $\int_{-1}^{2} |x|\, dx$.

Solution 25 *Funkcia* $f(x) = |x|$ *je spojitá na intervale* $\langle -1, 2\rangle$, *keď využijeme vetu o aditívnosti určitého integrálu a výsledok príkladu dostaneme:*

$$\int_{-1}^{2} |x|\, dx = \int_{-1}^{0} |x|\, dx + \int_{0}^{2} |x|\, dx = \int_{-1}^{0} (-x)\, dx + \int_{0}^{2} x dx =$$

$$= -\int_{-1}^{0} x dx + \int_{0}^{2} x dx = -\frac{0^2 - (-1)^2}{2} + \frac{2^2 - 0^2}{2} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.\square$$

Veta o strednej hodnote pre integrály.

Theorem 26 *(Veta o strednej hodnote pre integrály). Nech* $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je spojitá funkcia. Potom existuje bod* $c \in \langle a, b\rangle$ *taký, že*

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = f(c)(b - a).$$

Hodnota $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} f(x)\, dx$ sa nazýva stredná hodnota funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$.

Example 27 *Nájdime strednú hodnotu funkcie* $f : \langle 1, 3\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}, f(x) = x$.

Solution 28 *Máme* $\int_{1}^{3} x dx = \frac{3^2 - 1^2}{2} = 4$. *Podľa vety o strednej hodnote existuje* $c \in \langle 1, 3\rangle$ *taký, že* $\int_{1}^{3} x dx = f(c)(3 - 1)$. *V našom prípade strednou hodnotou funkcie* $f(x) = x$ *na intervale* $\langle 1, 3\rangle$ *je hodnota*

$$f(2) = 2,$$

pretože

$$f(2) = 2 = \frac{1}{3 - 1} \int_{1}^{3} x dx. \square$$

Pomocné definície.

V definícii $\int_{a}^{b} f(x)\, dx$ sme explicitne predpokladali, že $a < b$. Ale pre teoretické dôvody v ďalších aplikáciách je vhodné definovať

Definition 29 *Nech* $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}, a < b$ *je spojitá funkcia. Potom definujeme*

$$\int_{a}^{a} f(x)\, dx = 0, \int_{b}^{a} f(x)\, dx = -\int_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

Hlavná veta integrálneho počtu.

V tejto časti rozvinieme metódy pre výpočet $\int_{b}^{a} f(x)\, dx$ bez počítania horných a dolných integrálnych súčtov.

Určitý integrál ako funkcia hornej hranice a primitívna funkcia.
Nech $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia a $c \in \langle a, b\rangle$ je ľubovoľné pevné číslo, potom pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je funkcia f spojitá na intervale $\langle c, x\rangle$, alebo $\langle x, c\rangle$. Teda $\forall x$ existuje integrál $\int_c^x f(t)\,dt$. Takto dostaneme funkciu $G : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $G(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, pre $a \le x \le b$. Ak napríklad $f : \langle 0, 10\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = x$, $c = 1$, potom

$$G(0) = \int_1^0 tdt = -\int_0^1 tdt = -\frac{1}{2}\left(1^2 - 0^2\right) = -\frac{1}{2},$$

$$G(1) = \int_1^1 tdt = 0$$

a pre každé $x \in \langle 0, 10\rangle$ máme

$$G(x) = \int_1^x tdt = \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right).$$

Všimnime si, že $G' = f$ na $\langle 0, 10\rangle$. Skutočne, pre každú spojitú funkciu na intervale $\langle a, b\rangle$, ak $G(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, potom $G'(x) = f(x)$.

Theorem 30 *(O diferencovateľnosti určitého integrálu ako funkcie hornej hranice) Nech $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia a nech $c \in \langle a, b\rangle$. Definujeme funkciu $G : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $G(x) = \int_c^x f(t)\,dt$. Potom G je diferencovateľná na $\langle a, b\rangle$ a platí $G'(x) = f(x)$ pre $x \in \langle a, b\rangle$.*

My sme predpokladali, že f je definovaná na $\langle a, b\rangle$. Ale jediný fakt o $\langle a, b\rangle$, ktorý sme použili v predchádzajúcej vete bol, že interval $\langle x, y\rangle$ (alebo $\langle y, x\rangle$) leží v $\langle a, b\rangle$. Tvrdenie vety však zostane v platnosti, ak interval $\langle a, b\rangle$ zameníme za nejaký iný ľubovoľný interval I (napríklad aj neohraničený). Tak sme vlastne dokázali vetu:

Theorem 31 *Nech $f : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia (I je interval) a nech $c \in I$ je ľubovoľný bod. Definujeme $G : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $G(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, $x \in I$. Potom G je diferencovateľná na I a platí $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.*

Definition 32 *Nech I je interval a $f : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $F : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sú také funkcie, že $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$. Potom hovoríme, že funkcia F je primitívna funkcia k funkcii f na I.*

Example 33 *Zistite, či funkcie x^2, x^2+1, $x^2-\pi$, x^2+1000 sú primitívne funkcie k funkcii $2x$ na ľubovoľnom intervale I.*

Solution 34 *Ak C je ľubovoľná konštanta, potom $x^2 + C$ je primitívna funkcia k funkcii $2x$ na I, pretože $\left(x^2 + C\right)' = 2x$, $\forall x \in I$.$\square$*

Theorem 35 *(Veta o primitívnej funkcii) a) Nech $G : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je primitívna funkcia k funkcii $f : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$. Potom funkcia $F : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $F(x) = G(x) + C$, kde C je ľubovoľná konštanta, je tiež primitívna funkcia k funkcii f.*

b) Ak $F(x)$ a $G(x)$ sú dve rôzne primitívne funkcie k funkcii f, potom $F(x) = G(x) + C$.

Hlavná veta integrálneho počtu.

Theorem 36 *(Hlavná veta integrálneho počtu) Nech $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia.*

a) Potom f má primitívnu funkciu na $\langle a, b\rangle$.

b) Ak F je nejaká primitívna funkcia k funkcii f na $\langle a, b\rangle$, potom

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b\,.$$

Posledný vzťah sa nazýva Newtonov - Leibnizov vzorec.

Example 37 *Vypočítajte $\int_0^2 x^2 dx$.*

Solution 38 *V tomto prípade primitívnou funkciou ku $f(x) = x^2$ je napríklad funkcia $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Potom*

$$\int_0^2 x^2 dx = F(2) - F(0) = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{3}(8-0) = \frac{8}{3}.\square$$

Example 39 *Vypočítajte $\int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx$.*

Solution 40 *Primitívnou funkciou ku $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ je napríklad funkcia $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Potom*

$$\int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{14}{3}.\square$$

Example 41 *Vypočítajte $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.*

Solution 42 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1.\square$

Theorem 43 *Nech $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia. Potom pre každú primitívnu funkciu F k funkcii f platí*

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b) = [F(x)]_b^a\,.$$

Diferencovanie a integrovanie ako inverzné procesy.

Môžeme písať: ak $f : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá a $a \in I$, potom

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x).$$

Z druhej strany ak $F : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ má spojitú deriváciu, dostaneme

$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a)\,,$$

t.j. derivovanie a integrovanie sú inverzné procesy.

Neurčitý integrál a integračné pravidlá.

Ak počítame určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ pomocou hlavnej vety integrálneho počtu, potom základným problémom je nájsť primitívnu funkciu k funkcii f. V tejto časti ukážeme niektoré elementárne pravidlá, ktoré nám pomôžu pri hľadaní primitívnych funkcií.

Definition 44 *Nech $f : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá (I je interval). Ľubovoľná primitívna funkcia ku f na I sa tiež nazýva neurčitým integrálom k f na I a označuje sa $\int f(x)\,dx$.*

Samozrejme, ak F je neurčitý integrál funkcie f, potom pre každú konštantu $C \in \boldsymbol{R}$, funkcia $F+C$ je tiež neurčitým integrálom, pretože $(F+C)' = F'+C' = f$. Preto napríklad pre neurčitý integrál z funkcie $f(x) = x^2$ píšeme

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Theorem 45 *(Veta o násobku neurčitého integrálu a súčte neurčitých integrálov) Nech $f, g : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sú spojité funkcie a $c \in \boldsymbol{R}$ je ľubovoľná konštanta. Potom*

$$\int (cf)(x)\,dx = c\int f(x)\,dx,\ \int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Example 46 *Vypočítajte integrál $\int (2x - 3\cos x)\,dx$.*

Solution 47 $\int (2x - 3\cos x)\,dx = 2\int x dx - 3\int \cos x dx = x^2 - 3\sin x + C.\square$

Example 48 *Vypočítajte integrál $\int_0^1 (4x^2 + 5x^3)\,dx$.*

Solution 49 $\int_0^1 (4x^2 + 5x^3)\,dx = 4\int_0^1 x^2 dx + 5\int_0^1 x^3 dx = 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 5\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{31}{12}.\square$

Pre polynóm dostaneme:

$$\int \left(c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + ... + c_{n-1}x + c_n\right) dx = c_0\frac{x^{n+1}}{n+1} + c_1\frac{x^n}{n} + ... + c_{n-1}\frac{x^2}{2} + c_n x + C.$$

Pripomenieme niektoré neurčité integrály, ktoré už poznáme z diferenciálneho počtu:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arccotg} x + C \end{array} \right. ,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{c} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{array} \right. ,$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a^2} \right| + C,$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

Cvičenia.

Pomocou priameho integrovania, využívajúc len vzorce integrálov elementárnych funkcií, vypočítajme:

1. $\int (3x^3 + 2x - 4)\, dx.$ $\left[\frac{3}{4}x^4 + x^2 - 4x\right].$
2. $\int \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{5}\right)\, dx.$ $\left[\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{10}\right].$
3. $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\, dx.$ $\left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - 2x^{\frac{1}{2}}\right].$
4. $\int \frac{x^3+x^2-x}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx.$ $\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right].$
5. $\int \frac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3}\, dx.$ $\left[\ln|x| - \frac{1}{4x^4}\right].$
6. $\int \frac{x\left(\sqrt[3]{x} - x\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[4]{x}}\, dx.$ $\left[-\frac{12\sqrt[12]{x^{37}}}{37} + \frac{12\sqrt[12]{x^{25}}}{25}\right].$
7. $\int \frac{x^3-1}{x-1}\, dx.$ $\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right].$
8. $\int e^x a^x\, dx.$ $\left[\frac{e^x a^x}{1+\ln a}\right].$
9. $\int \left(5\cos x - 2x^5 + \frac{3}{1+x^2}\right)\, dx.$ $\left[5\sin x - \frac{x^6}{3} + 3\,\mathrm{arctg}\, x\right].$
10. $\int \left(10^{-x} + \frac{x^2+3}{x^2+1}\right)\, dx.$ $\left[-\frac{10^{-x}}{\ln 10} + x + 2\,\mathrm{arctg}\, x\right].$
11. $\int (2\sin x - 3\cos x)\, dx.$ $[-2\cos x - 3\sin x].$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{3-3x^2}}\, dx.$ $\left[\frac{\arcsin x}{\sqrt{3}}\right].$
13. $\int \frac{3.2^x - 2.3^x}{2^x}\, dx.$ $\left[3x - \frac{3^x}{2^{x-1}(\ln 3 - \ln 2)}\right].$
14. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos(2x)}\, dx.$ $\left[\frac{\mathrm{tg} x}{2} + \frac{x}{2}\right].$
15. $\int \frac{\cos(2x)}{(\cos^2 x)\sin^2 x}\, dx.$ $[-\mathrm{cotg} x - \mathrm{tg}\ x].$
16. $\int^2 \mathrm{tg}^2 x\, dx.$ $[\mathrm{tg}\ x - x].$
17. $\int \mathrm{cotg}^2 x\, dx.$ $[-\mathrm{cotg}\ x - x].$
18. $\int \frac{1}{\cos(2x)+\sin^2 x}\, dx.$ $[\mathrm{tg}\ x].$
19. $\int \frac{(1+2x^2)}{x^2(1+x^2)}\, dx.$ $\left[-\frac{1}{x} + \mathrm{arctg}\ x\right].$
20. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\, dx.$ $[\ln|x| + 2\,\mathrm{arctg}\ x].$

Metódy integrálneho počtu.

V tejto časti sa oboznámime s rôznymi metódami výpočtu určitých aj neurčitých integrálov.

Integračná metóda per partes.

Theorem 50 *Nech $f, g : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sú spojite diferencovateľné funkcie. Potom platí*

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx.$$

Theorem 51 *Nech $f, g : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sú spojite diferencovateľné funkcie. Potom platí*

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx.$$

Výber funkcií $f(x)$ a $g'(x)$ sa na prvý pohľad môže zdať náročný. Väčšinou je výber prirodzený, čo znamená, že ani iný nie je možný. Po prepočítaní niekoľkých príkladov už obyčajne nerobí ťažkosti. Dobrou zásadou voľby je, aby sa integrál po aplikácii metódy per partes zjednodušil a nie skomplikoval.

Example 52 *Nájdime $\int x \cos x dx$.*

Solution 53 *Zvoľme f, f', g, g' nasledovne:* $\int x \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = x & g'(x) = \cos x \\ f'(x) = 1 & g(x) = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$

Ak by sme zvolili $f(x) = \cos x$, $g'(x) = x$, potom $f'(x) = -\sin x$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$ a dostaneme vzťah $\int x \cos x dx = -\frac{x^2}{2} \cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x dx$,

ktorý nevedie bezprostredne k nájdeniu integrálu.$\square$

Example 54 *Nájdime $\int x \ln x dx$.*

Solution 55 *V tomto príklade volíme $f(x) = \ln x$, $g'(x) = x$.*

$\int x \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = \ln x & g'(x) = x \\ f'(x) = \frac{1}{x} & g(x) = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} dx =$

$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$\square$

Example 56 *Vypočítajme $\int_1^2 x \ln^2 x dx$.*

Solution 57 *V tomto príklade volíme $f(x) = \ln^2 x$, $g'(x) = x$.* $\int_1^2 x \ln^2 x dx =$ $\left| \begin{array}{ll} f(x) = \ln^2 x & g'(x) = x \\ f'(x) = 2 \ln x \frac{1}{x} & g(x) = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left[\frac{x^2}{2} \ln^2 x \right]_1^2 - \int_1^2 2 \ln x \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} dx =$

$= 2 \ln^2 2 - \int_1^2 x \ln x dx = 2 \ln^2 2 - 2 \ln 2 + \frac{3}{4}.$$\square$

Example 58 *Ukážeme, že pre $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ platia nasledujúce rekurentné vzťahy:*

$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx,$
$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx.$
Ak $n - 2 = 0$, potom $\sin^{n-2} x = \cos^{n-2} x = 1$.

Solution 59 *Výsledok ukážeme pre funkciu sínus. Odporúčame Vám prepočítať rekurentný vzťah pre funkciu kosínus. Zvolíme $f(x) = \sin^{n-1} x$, $g'(x) = \sin x$. Iná voľba ani nie je možná, pretože nepoznáme primitívnu funkciu k funkcii $\sin^{n-1} x$. Potom*

$$\int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \sin x dx = \left| \begin{array}{cc} f(x) = \sin^{n-1} x & g'(x) = \sin x \\ f'(x) = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x & g(x) = -\cos x \end{array} \right| =$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \left(1 - \sin^2 x\right) dx =$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx.$$

Tak sme dostali rovnicu: $\int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx$,
z ktorej dostaneme: $n \int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx$,
odkiaľ vyjadríme hľadanú neznámu $\int \sin^n x dx$: $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx.\square$

Substitučná metóda.

Začneme s príkladom. Derivovaním zloženej funkcie napríklad $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $F(x) = \sin^2 x$ dostaneme:

$$\left(\sin^2 x\right)' = 2 \sin x \cos x.$$

Teda funkcia $\sin^2 x$ je primitívna funkcia k funkcii $2 \sin x \cos x$, to znamená, že

$$\int 2 \sin x \cos x dx = \sin^2 x + C.$$

Theorem 60 *Nech I, J sú intervaly, $g : I \longrightarrow J$ je spojite diferencovateľná funkcia a $f : J \longrightarrow \mathbf{R}$ je spojitá funkcia.*
a) Ak $F : J \longrightarrow \mathbf{R}$ je primitívna funkcia ku f na intervale J, potom

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C,$$

b) ak $a, b \in I$, tak

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.$$

Example 61 *Vypočítajte $\int 3 \sin^2 x \cos x dx$.*

Solution 62 *Nech je $u = \sin x$, potom* $\int 3 \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{array} \right| = 3 \int u^2 du = u^3 + C = \sin^3 x + C.\square$

Example 63 *Vypočítajte* $\int \frac{x^4}{x^5+1}dx.$

Solution 64 *Nech* $u = (x^5+1)$, *potom* $\int \frac{x^4}{x^5+1}dx = \frac{1}{5}\int \frac{5x^4}{x^5+1}dx = \left| \begin{array}{c} u = x^5+1 \\ du = 5x^4dx \end{array} \right| =$
$\frac{1}{5}\int \frac{1}{u}du =$
$= \ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|x^5+1| + C.$

Tento výpočet podľa definície prirodzeného logaritmu platí, ak funkcia $x^5+1 > 0$, *alebo* $x^5+1 < 0.\square$

Example 65 *Vypočítajte* $\int_{-3}^{-2} \frac{x^4}{x^5+1}dx$ *a* $\int_{-2}^{1} \frac{x^4}{x^5+1}dx.$

Solution 66 *V prvom integrále je funkcia* $x^5+1 < 0$, *teda integrál existuje a platí:*
$\int_{-3}^{-2} \frac{x^4}{x^5+1}dx = \left[\frac{1}{5}\ln|x^5+1|\right]_{-3}^{-2} = \frac{1}{5}\ln\frac{31}{242}.$

V druhom integrále však funkcia $x^5+1 = 0$ *pre* $x = -1$, *teda neplatí* $x^5+1 > 0$, *ani* $x^5+1 < 0$ *na* $\langle -2, 1\rangle$ *preto* $\int_{-2}^{1} \frac{x^4}{x^5+1}dx$ *nemá zmysel.* $\square$

Example 67 *Vypočítajte* $\int x\sqrt{2x+1}dx.$

Solution 68 *Nech* $u = 2x+1$, *potom máme*
$\int x\sqrt{2x+1}dx = \left| \begin{array}{c} u = 2x+1 \\ du = 2dx \Longrightarrow dx = \frac{1}{2}du \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int (u-1)\sqrt{u}du =$
$= \frac{1}{4}\int u\sqrt{u}du - \frac{1}{4}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{10}u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}} + C =$
$= \frac{\sqrt{(2x+1)^5}}{10} - \frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{6} + C.\square$

Lemma 69 *Nech* I, J *sú intervaly,* $g : I \longrightarrow J$ *je spojite diferencovateľná bijekcia a* $f : J \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je spojitá funkcia. Nech* $G : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je primitívna funkcia k funkcii* $(f \circ g)\, g' : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$. *Potom* $G \circ g^{-1} : J \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je primitívna funkcia k funkcii* $f : J \longrightarrow \boldsymbol{R}$.

Theorem 70 *Nech* I, J *sú intervaly,* $g : I \longrightarrow J$ *je spojite diferencovateľná bijekcia a* $f : J \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je spojitá funkcia. Potom pre každé* $a, b \in J$ *platí*
$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\, g'(t)\, dt.$

Example 71 *Vypočítajte integrál* $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}+2}{6}} \frac{1}{\sqrt{6x-9x^2}}dx$.

Solution 72 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}+2}{6}} \frac{1}{\sqrt{6x-9x^2}}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}+2}{6}} \frac{1}{\sqrt{1-(9x^2-6x+1)}}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}+2}{6}} \frac{1}{\sqrt{1-(3x-1)^2}}dx =$
$= \left| \begin{array}{ll} t = 3x-1 & dt = 3dx \Longrightarrow dx = \frac{1}{3}dt \\ x = \frac{1}{2} \to\; t = \frac{1}{2} & x = \frac{\sqrt{3}+2}{6} \to\; t = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt =$
$= \frac{1}{3}\left[\arcsin t\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}\left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right] = \frac{\pi}{18}.\square$

Example 73 *Nech* $F(x)$ *je primitívna funkcia k funkcii* $f(x)$. *Nájdime* $\int f(ax+b)\, dx$, *kde* $a, b \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$.

Solution 74 *Použijeme substitúciu* $u = ax+b$, *potom* $du = adx \Longrightarrow dx = \frac{1}{a}du.$
$\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\int f(u)\, du = \frac{1}{a}(F(u) + C) = \frac{1}{a}F(ax+b) + K.\square$

Cvičenia.

Počítajte integrály metódou per partes:

1. $\int x \sin x \, dx.$ $\quad [\sin x - x \cos x]\,.$
2. $\int x e^{2x} \, dx.$ $\quad \left[\frac{(2x-1)e^{2x}}{4}\right].$
3. $\int (x^3 - x + 1) e^{2x} \, dx.$ $\quad \left[\frac{e^{2x}}{2}\left(x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)\right].$
4. $\int\limits_0^{\pi} (2x^2 + 3) \cos 2x \, dx.$ $\quad [\pi]\,.$
5. $\int \ln x \, dx.$ $\quad [x \ln x - x]\,.$
6. $\int x \log_{10} 2x \, dx.$ $\quad \left[\frac{x^2}{2}\left(\log_{10} 2x - \frac{1}{2 \ln 10}\right)\right].$
7. $\int e^x \sin x \, dx.$ $\quad \left[\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)\right].$
8. $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx.$ $\quad [x\mathrm{tg}\ x + \ln|\cos x|]\,.$
9. $\int \mathrm{arccotg}\, x \, dx.$ $\quad \left[x \mathrm{arccotg}\, x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)\right].$
10. $\int x \ln(x^2 + 3x - 10) \, dx.$ $\quad \left[\frac{x^2}{2} \ln(x^2 + 3x - 10) - \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} - 2 \ln|x - 2| - \frac{25}{2} \ln|x + 5|\right].$
11. $\int \ln(x^2 - 4x + 6) \, dx.$ $\quad \left[(x - 2) \ln(x^2 - 4x + 6) - 2x + \frac{4}{\sqrt{2}} \mathrm{arctg} \frac{(x-2)}{\sqrt{2}}\right].$
12. $\int x \mathrm{arctg}(x + 3) \, dx.$ $\quad \left[\frac{(x^2 - 8)}{2} \mathrm{arctg}(x + 3) - \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \ln(x^2 + 6x + 10)\right].$
13. $\int x \ln x \, dx.$ $\quad \left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\right].$
14. $\int x e^{-x} \, dx.$ $\quad [-x e^{-x} - e^{-x}]\,.$
15. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x \, dx.$ $\quad \left[\frac{(1 + 2e^{\pi})}{5}\right].$
16. $\int \mathrm{arctg} x \, dx.$ $\quad \left[x \mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)\right].$
17. $\int x^2 3^x \, dx.$ $\quad \left[\frac{3^x}{\ln 3}\left(x^2 - \frac{2x}{\ln 3} + \frac{2}{(\ln 3)^2}\right)\right].$
18. $\int x \mathrm{arccotg}\ x \, dx.$ $\quad \left[\frac{x^2 + 1}{2} \mathrm{arccotg}\ x + \frac{x}{2}\right].$
19. $\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx.$ $\quad [\pi^2 - 4]\,.$
20. $\int\limits_0^1 x \mathrm{arccotg}\ x \, dx.$ $\quad \left[\frac{1}{2}\right].$
21. $\int \mathrm{arccotg}\ x \, dx.$ $\quad \left[x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}\right].$

22. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} x\mathrm{arctg}x\, dx.$ $\quad\left[\frac{5\pi}{12} - \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}\right]$

Pomocou vety o substitúcii počítajme integrály:

23. $\int \frac{1}{3+4x^2}\, dx.$ $\quad\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\frac{2x}{\sqrt{3}}\right].$

24. $\int \frac{x}{3+4x^2}\, dx.$ $\quad\left[\frac{1}{8}\ln(3+4x^2)\right].$

25. $\int \frac{x}{(x^2+5)^4}\, dx.$ $\quad\left[-\frac{1}{6(x^2+5)^3}\right].$

26. $\int e^x \mathrm{tg}\, e^x\, dx.$ $\quad[-\ln|\cos e^x|].$

27. $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+5}\, dx.$ $\quad\left[\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+5) - 4\mathrm{arctg}\,(x+2)\right].$

28. $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5}\, dx.$ $\quad\left[\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{2}\right].$

29. $\int \frac{5x-1}{x^2+2x+3}\, dx.$ $\quad\left[\frac{5}{2}\ln(x^2+2x+3) - \frac{6}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\,\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}\right].$

30. $\int \frac{2^x}{(2^x+3)^7}\, dx.$ $\quad\left[-\frac{1}{6\ln 2(2^x+3)^6}\right].$

31. $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}}\, dx.$ $\quad\left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}\right].$

32. $\int \frac{x}{\sqrt{3-4x^2}}\, dx.$ $\quad\left[-\frac{1}{4}\sqrt{3-4x^2}\right].$

33. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{(e^x-2)e^x}{e^{2x}+2e^x+7}\, dx.$ $\quad\left[\frac{1}{2}(\ln 42 - \ln 15) - \frac{3}{\sqrt{6}}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{6}{\sqrt{6}} - \mathrm{arctg}\,\frac{3}{\sqrt{6}}\right)\right].$

34. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x+5\sin x-6}\, dx.$ $\quad\left[\frac{1}{7}\ln\left|\frac{1-\sin x}{6+\sin x}\right|\right].$

35. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x+1}{\cos^4 x+\cos^3 x}\sin x\, dx.$ $\quad\left[\frac{1}{2} + 2\ln\frac{3}{2}\right].$

36. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos^2 x-5\cos x+6}\, dx.$ $\quad\left[\ln\frac{4}{3}\right].$

37. $\int \frac{2}{x(\ln x-2)\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)}\, dx.$ $\quad\left[\ln\frac{|\ln x-2|}{\sqrt{(\ln x-1)^2+1}} - \mathrm{arctg}\,(\ln x-1)\right]$

38. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\, dx.$ $\quad\left[\frac{12}{\sqrt[12]{x}} - \frac{6}{\sqrt[6]{x}} + 24\ln\left|\frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[12]{x}+1}\right|\right].$

39. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}\, dx.$ $\quad\left[\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right),\ t = \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}\right].$

40. $\int\limits_1^{64} \frac{2\sqrt{x}}{x\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)}\, dx.$ $\quad\left[12\ln\frac{3}{2}\right].$

41. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+3}}\, dx.$ $\quad\left[\frac{3t}{2} - \frac{\ln|1-2t|}{2} - \frac{33}{4(1-2t)},\ t = -x + \sqrt{x^2+x+3}\right].$

42. $\int \sqrt{x^2+4x+3}\, dx.$ $\left[-\frac{t^2}{8}-\frac{t}{2}+\frac{\ln|t+2|}{2}+\frac{1}{8(t+2)^2},\, t=x-\sqrt{x^2+4x+3}\right].$

43. $\int \frac{1}{\sqrt{4-3x-x^2}}\, dx.$ $\left[-2\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{4-3x-x^2}-2}{x}\right)\right].$

44. $\int\limits_0^1 \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}\, dx.$ $[-8,345]$.

45. $\int \frac{1}{\cos x}\, dx.$ $\left[\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-1}\right|\right].$

46. $\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\, dx.$ $\left[\frac{\sqrt{5}}{5}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{5}}{5}\left(3\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right].$

47. $\int \frac{1}{\sin x-\cos x}\, dx.$ $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1-\sqrt{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}\right|\right].$

48. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}^2\, x+\mathrm{tg}\, x+1}\, dx.$ $\left[\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\right].$

49. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\, dx.$ $\left[\frac{\pi}{4}\right].$

50. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\, dx.$ $[1,246]$.

51. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x-2\sin x+3}\, dx.$ $\left[\frac{\pi}{4}\right].$

52. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{5+2\cos x}\, dx.$ $[0,152]$.

53. $\int \cos(\ln x)\, dx.$ $\left[\frac{x}{2}\left(\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right)\right]$

Vypočítajme kombináciou doterajších metód

54. $\int x^2 e^{\sqrt{x}}\, dx.$

$\left[\left(2\left(\sqrt{x}\right)^5-10x^2+40\left(\sqrt{x}\right)^3-120x+240\sqrt{x}-240\right)e^{\sqrt{x}}\right]$

55. $\int (3x^3+2x-4)\, dx.$ $\left[\frac{3}{4}x^4+x^2-4x\right].$

56. $\int \left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{5}\right)\, dx.$ $\left[\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{10}\right].$

57. $\int \left(\sqrt{x^3}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\, dx.$ $\left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}-2x^{\frac{1}{2}}\right].$

58. $\int \frac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3}\, dx.$ $\left[\ln|x|-\frac{1}{4x^4}\right].$

59. $\int \frac{x\left(\sqrt[3]{x}-x\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[4]{x}}\, dx.$ $\left[-\frac{12\sqrt[12]{x^{37}}}{37}+\frac{12\sqrt[12]{x^{25}}}{25}\right].$

60. $\int \frac{x^3-1}{x-1}\, dx.$ $\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right].$

61. $\int e^x a^x\ dx.$ $\left[\frac{e^x a^x}{1+\ln a}\right].$

62. $\int \left(5\cos x - 2x^5 + \frac{3}{1+x^2}\right)\ dx.$ $\left[5\sin x - \frac{x^6}{3} + 3\,\mathrm{arctg}\, x\right].$

63. $\int \left(10^{-x} + \frac{x^2+3}{x^2+1}\right)\ dx.$ $\left[-\frac{10^{-x}}{\ln 10} + x + 2\,\mathrm{arctg}\, x\right].$

64. $\int (2\sin x - 3\cos x)\ dx.$ $[-2\cos x - 3\sin x].$

65. $\int \frac{1}{\sqrt{3-3x^2}}\ dx.$ $\left[\frac{\mathrm{arcsin} x}{\sqrt{3}}\right].$

66. $\int \frac{3.2^x - 2.3^x}{2^x}\ dx.$ $\left[3x - \frac{3^x}{2^{x-1}(\ln 3 - \ln 2)}\right].$

67. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos(2x)}\ dx.$ $\left[\frac{\mathrm{tg} x}{2} + \frac{x}{2}\right].$

68. $\int \frac{\cos(2x)}{(\cos^2 x)\sin^2 x}\ dx.$ $[-\mathrm{cotg} x - \mathrm{tg}\ x].$

69. $\int^2 \mathrm{tg}^2 x\ dx.$ $[\mathrm{tg}\ x - x].$

70. $\int \mathrm{cotg}^2 x\ dx.$ $[-\mathrm{cotg}\ x - x].$

71. $\int \frac{1}{\cos(2x)+\sin^2 x}\ dx.$ $[\mathrm{tg}\ x].$

72. $\int \frac{\left(1+2x^2\right)}{x^2(1+x^2)}\ dx.$ $\left[-\frac{1}{x} + \mathrm{arctg}\ \ x\right].$

73. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\ dx.$ $[\ln|x| + 2\,\mathrm{arctg}\ \ x].$

Špeciálne integračné metódy.

Integrovanie racionálnych funkcií.

Zo znalostí z lineárnej algebry vieme, že

a) každú nerýdzo racionálnu funkciu možno vyjadriť ako súčet polynómu a rýdzo racionálnej funkcie,

b) každú rýdzo racionálnu funkciu možno napísať ako konečný súčet nasledujúcich elementárnych zlomkov:

$$\frac{A}{(x-a)^n} \text{ a } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},$$

kde $A, M, N, p, q \in \boldsymbol{R}$, $m, n \in \boldsymbol{N}$ a $p^2-4q<0$. Integrovať racionálnu funkciu teda znamená integrovať výrazy predchádzajúceho typu.

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \begin{cases} \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} & \text{pre} \quad n \neq 1 \\ A \ln|x-a| & \text{pre} \quad n = 1 \end{cases}.$$

Druhý výraz nemožno vo všeobecnom prípade integrovať priamo, je potrebné ho najskôr upraviť:

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} = \frac{M}{2}\frac{2x+\frac{2N}{M}}{(x^2+px+q)^m} = \frac{M}{2}\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{(x^2+px+q)^m}.$$

Prvý výraz po substitúcii $u = x^2+px+q$, vieme integrovať a dostaneme

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m} dx = \begin{cases} \frac{-1}{(m-1)(x^2+px+q)^{m-1}} & \text{pre} \quad m \neq 1 \\ \ln\left(x^2+px+q\right) & \text{pre} \quad m = 1 \end{cases}.$$

Druhý výraz je integrál, ktorý upravíme na tvar

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^m} dx = \int \frac{1}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right)^m} dx,$$

a pomocou substitúcie $x = -\frac{p}{2} + t\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}$ transformujeme na integrál

$$\frac{\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}}{\left(\frac{4q-p^2}{4}\right)^m} \int \frac{1}{(t^2+1)^m} dt.$$

a integrál, ktorý označíme $I_m = \int \frac{1}{(t^2+1)^m} dt$ integrujeme nasledovne:

1. $I_1 = \int \frac{1}{t^2+1} dt = \operatorname{arctg} t$.
2. Pomocou rekurentného vzťahu $I_{m+1} = \frac{2m-1}{2m} I_m + \frac{t}{2m(t^2+1)^m}$, $m \in \boldsymbol{N}$.

Dôkaz rekurentného vzťahu: Aplikujeme metódu per partes na integrál I_m, kde zvolíme $f(t) = (t^2+1)^{-m}$, $g'(t) = 1$.

$$I_m = \int \frac{1}{(t^2+1)^m} dt = \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m \int \frac{t^2}{(t^2+1)^{m+1}} dt = \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2mI_m - 2mI_{m+1}. \blacksquare$$

Example 75 *Vypočítajme* $\int \frac{2x+3}{x(x+1)^2}dx$.

Solution 76 *Máme* $\int \frac{2x+3}{x(x+1)^2}dx = \int \frac{3}{x}dx - \int \frac{3}{(x+1)}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx = 3\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + C.\square$

Example 77 *Vypočítajme* $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx$.

Solution 78 *Dostávame:* $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{(x^2+1)}dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx =$
$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C.\square$

Example 79 *Vypočítajme* $\int \frac{2x-1}{x^2+2x+2}dx$.

Solution 80 *Dostávame:*

$$\int \frac{2x-1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - \int \frac{3}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= \ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = \ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{arctg}\,(x+1) + C.\square$$

Integrovanie iracionálnych funkcií.

Nech $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$ a nech $ad - bc \neq 0$. Nech k_1, k_2, ..., k_s sú prirodzené čísla. Nech $f : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je funkcia, ktorá vznikne z funkcií
$h : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $h(x) = c$,
$g : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $g(x) = x$,
$g_1 : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $g_1(x) = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_1}}$,
...,
$g_s : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $g_s(x) = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_s}}$, pomocou konečného počtu racionálnych operácií, t.j. sčitovania, odčitovania, násobenia a delenia funkcií. Nech k je spoločný násobok čísel k_1, k_2, ..., k_s. To znamená, že $\frac{k}{k_1}$, $\frac{k}{k_2}$, ..., $\frac{k}{k_s}$ sú prirodzené čísla. Potom neurčitý integrál

$$\int f(x)\,dx$$

počítame pomocou substitúcie

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}} \Longrightarrow x = \frac{b - dt^k}{ct^k - a},\; dx = \frac{ad - bc}{\left(ct^k - a\right)^2} k t^{k-1} dt,$$

podmienka $ad - bc \neq 0$ zaručuje, že ku x existuje inverzná funkcia, pričom

$$t^{\frac{k}{k_1}} = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_1}}, ..., t^{\frac{k}{k_s}} = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_s}}.$$

Po tejto substitúcii dostaneme integrál z racionálnej funkcie.

Example 81 *Vypočítajte* $\int \frac{1}{(x+2)(3x+5)}\sqrt{\frac{x+2}{2x+3}}dx$.

Solution 82 *Použijeme substitúciu*

$$t = \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}},$$

potom

$$x = \frac{2 - 3t^2}{2t^2 - 1}$$

a

$$dx = \frac{-2t\,dt}{\left(2t^2 - 1\right)^2}.$$

Integrovaním dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+2)(3x+5)}\sqrt{\frac{x+2}{2x+3}}dx &= -2\int \frac{1}{1+t^2}dt = -2\operatorname{arctg} t + C = \\ &= -2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+2}{2x+3}} + C.\square \end{aligned}$$

Integrovanie trigonometrických funkcií.

Pri integrovaní trigonometrických funkcií sa používajú spravidla substitúcie: $u = \sin x$, $u = \cos x$ a substitúcie, ktoré závisia od tvaru integrálu, alebo tzv. univerzálna trigonometrická substitúcia $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Ak použijeme univerzálnu trigonometrickú substitúciu, potom využívame vzťahy: $\sin x = \sin 2\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \cos 2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Example 83 *Vypočítajte* $\int \frac{\sin x\cos x}{(\sin x-\cos x-1)^2}dx$.

Solution 84 *Položme* $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. *Potom dostaneme:* $\int \frac{\sin x\cos x}{(\sin x-\cos x-1)^2}dx = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ x = 2\operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}-1\right)^2}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}-1\right)^2}\frac{2}{1+t^2}dt =$$
$$= \int \frac{2t\left(1-t^2\right)}{(2t-2)^2}\frac{2}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{t(1-t)(1+t)}{(t-1)^2}\frac{2}{1+t^2}dt = -\frac{1}{2}\int \frac{t(1+t)}{(t-1)}\frac{2}{1+t^2}dt =$$
$$= -\int \frac{1}{t-1}dt - \int \frac{1}{1+t^2}dt = -\ln|t-1| - \operatorname{arctg} t + C =$$
$$= -\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right| - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.\square$$

Trigonometrické substitúcie pre výrazy $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{\pm a^2 \pm b^2x^2}$.

Výraz	Substitúcia	Zjednodušenie
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t,\ t\in\left\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$	$\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\,\mathrm{tg}\,t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$\sqrt{a^2+a^2\,\mathrm{tg}^2 t}=\frac{a}{\cos t}$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=\frac{a}{\cos t}, 0\le t\le\pi,\ t\neq\frac{\pi}{2}$	$\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=a\,\mathrm{tg}\,t,\ 0\le t<\frac{\pi}{2}$ $\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=-a\,\mathrm{tg}\,t,\ \frac{\pi}{2}<t\le\pi$
$\sqrt{\pm a^2\pm b^2x^2}$	$t=bx$	$\sqrt{\pm a^2\pm t^2}$

Example 85 *Vypočítajte* $\int_{-5}^{5}\sqrt{9-\frac{9}{25}x^2}dx$.

Solution 86 *Ak položíme* $v=\frac{3}{5}x$, *potom* $dx=\frac{5}{3}dv$, $x=-5\Longrightarrow v=-3$, $x=5\Longrightarrow v=3$ *a po ďalšej substitúcii* $v=3\sin u$, *t.j.* $dv=3\cos u du$, $v=-3\Longrightarrow u=-\frac{\pi}{2}$, $v=3\Longrightarrow u=\frac{\pi}{2}$ *dostaneme*

$$\int_{-5}^{5}\sqrt{9-\frac{9}{25}x^2}dx=\frac{5}{3}\int_{-3}^{3}\sqrt{9-v^2}dv=\frac{5}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-9\sin^2 u}.3\cos u du=$$

$$=15\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u du=\frac{15}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)\,du=\frac{15}{2}\left[u+\frac{\sin 2u}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{15}{2}\pi.\square$$

Integrály typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

$m, n \in \boldsymbol{N}$	Substitúcia	Vhodná identita
n - nepárne	$u = \sin x$	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
m - nepárne	$u = \cos x$	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
n a m - párne	redukovať na menšie mocniny n a m	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

Example 87 *Vypočítajte* $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

Solution 88 *V tomto prípade je* $n = 3$ *- nepárne, tak položíme* $u = \sin x$*, t.j.* $du = \cos x dx$*. Potom* $\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x dx =$
$= \int \left(u^2 - u^4\right) du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.\square$

Example 89 *Vypočítajte* $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Solution 90 *V tomto prípade je* m, n *párne. Podintegrálny výraz zredukujeme na tvar mocniny funkcie kosínus a potom použijeme rekurentné vzťahy:* $\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - \cos^2 2x\right) dx =$
$= \frac{1}{4} \int 1 dx - \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx =$
$= \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \frac{1}{4} \sin 4x + C = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.\square$

Integrály typu $\int \sin ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$.

V tomto prípade použijeme jednu z trigonometrických identít

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right],$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right],$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right].$$

Example 91 *Vypočítajte* $\int \sin 5x \sin 3x dx$.

Solution 92 $\int \sin 5x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x dx - \frac{1}{2}\int \cos 8x dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$. *Použili sme výsledok predchádzajúceho príkladu.*

Eulerove substitúcie.

Nech $g : A \longrightarrow B$, $g(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$ a $f : C \longrightarrow \mathbf{R}$, $H(g) \subset C = D(f)$ je racionálna funkcia. Potom

$$\int (f \circ g)(x)\, dx = \int f\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

počítame pomocou Eulerových substitúcií.

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x \pm t$	ak	$a > 0$
$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$	ak	$c > 0$
$t = \sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$, α, β sú korene rovnice $ax^2+bx+c=0$	ak	$a < 0 \wedge c < 0$

Po aplikácii týchto substitúcií dostaneme integrály z racionálnych funkcií.

Example 93 *Vypočítajte* $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

Solution 94 *Pretože* $a > 0$ *uvažujme Eulerovu substitúciu:* $\sqrt{x^2+x+1} = x - t$, *potom* $x = \frac{t^2-1}{2t+1}$ *a* $dx = \frac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2}dt$, $\sqrt{x^2+x+1} = x - t = \frac{-(t^2+t+1)}{2t+1}$. *Potom* $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = -2\int \frac{1}{2t+1}dt = -\ln|2t+1| + C = -\ln\left|2x - 2\sqrt{x^2+x+1}+1\right| + C$.□

Example 95 *Vypočítajte* $\int \frac{1}{\sqrt{4-2x-5x^2}}dx$.

Solution 96 *V tomto prípade je* $c > 0$ *uvažujme Eulerovu substitúciu:* $\sqrt{4-2x-5x^2} = xt + \sqrt{4}$, *potom* $x = \frac{-4t-2}{t^2+5}$ *a*

$$dx = \frac{4(t^2+t-5)}{(t^2+5)^2}dt, \sqrt{4-2x-5x^2} = xt + \sqrt{4} = \frac{-2(t^2+t-5)}{(t^2+5)}.$$

Potom $\int \frac{1}{\sqrt{4-2x-5x^2}}dx = -2\int \frac{1}{t^2+5}dt = -\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) + C = -\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{4-2x-5x^2}-2}{\sqrt{5}x}\right) + C$.□

Example 97 *Vypočítajte* $\int \frac{\sqrt{-x^2+6x-8}}{(x-4)(2x-3)}dx$.

Solution 98 *V tomto prípade je* $a < 0 \wedge c < 0$, *korene rovnice* $-x^2+6x-8 = 0$ *sú* $x = 2, 4$. *Pre* $x \in \langle 2, 4)$ *môžeme upraviť výraz* $\sqrt{-x^2+6x-8} = \sqrt{-(x-2)(x-4)} = (x-4)\sqrt{(-1)\frac{x-2}{x-4}}$.

Uvažujme Eulerovu substitúciu: $t = \sqrt{(-1)\frac{x-2}{x-4}} = \sqrt{\frac{2-x}{x-4}}$, *potom* $x = \frac{4t^2+2}{t^2+1}$ *a* $dx = \frac{4t}{(t^2+1)^2}dt$, $\sqrt{-x^2+6x-8} = \sqrt{(2-x)(x-4)} = (x-4)\sqrt{\frac{2-x}{x-4}}$,

$2x - 3 = \frac{5t^2+1}{t^2+1}$.

Potom $\int \frac{\sqrt{-x^2+6x-8}}{(x-4)(2x-3)}dx = \int \frac{(x-4)\sqrt{\frac{2-x}{x-4}}}{(x-4)(2x-3)}dx = \int \frac{4t^2}{(5t^2+1)(t^2+1)}dt =$

$= -\int \frac{dt}{5t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{5}t\right) + \operatorname{arctg} t + C =$

$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{5\frac{2-x}{x-4}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2-x}{x-4}}\right) + C$.□

Cvičenia.

Počítajte integrály z racionálnych funkcií:

1. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}\,dx.$ $\quad [5x + 2\ln|x| + 3\ln|x-2| + 4\ln|x+2|]\,.$

2. $\int \frac{-2x+19}{x^2+x-6}\,dx.$ $\quad \left[\ln\frac{|x-2|^3}{|x+3|^5}\right].$

3. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^3}\,dx.$ $\quad \left[2\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - 2\ln|x+1|\right].$

4. $\int \frac{5x^2-7x+10}{x^3-x^2-4x-6}\,dx.$ $\quad \left[2\ln|x-3| + \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+2) - 5\operatorname{arctg}(x+1)\right].$

5. $\int \frac{4x^2+x-13}{2x^3+12x^2+11x+5}\,dx.$ $\quad [2\ln|x+5| - 3\operatorname{arctg}(2x+1)]\,.$

6. $\int \frac{1}{x^3+1}\,dx.$ $\quad \left[\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right].$

7. $\int \frac{x^5+x^4-7x^3+8x-3}{x^3+x^2-6x}\,dx.$ $\quad \left[\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2}\ln|x(x-2)|\right].$

8. $\int \frac{6x-13}{(4x^2+4x+17)}\,dx.$ $\quad \left[-\frac{x+2}{2(4x^2+4x+17)} - \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{4}\right].$

9. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx.$ $\quad \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\frac{x^2|x-2|^5}{|x+2|^3}\right]$

10. $\int \frac{x^2-x+2}{(x-3)(x-1)^2}\,dx.$ $\quad \left[2\ln|x-3| - \ln|x-1| + \frac{1}{x-1}\right]$

11. $\int \frac{3x^2-11x+7}{(x-3)(x^2-4x+4)}\,dx.$ $\quad \left[2\ln|x-2| + \ln|x-3| - \frac{3}{x-2}\right]$

12. $\int \frac{x^3+3x^2+1}{x^2+x}\,dx.$ $\quad \left[\frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| - 3\ln|x+1|\right]$

13. $\int \frac{3x^2-x-14}{x^3+x^2-5x+3}\,dx.$ $\quad \left[\ln|x+3| + 2\ln|x-1| + \frac{3}{x-1}\right]$

14. $\int \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x^2+2x+3)}\,dx.$ $\quad \left[\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3| - \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]$

15. $\int \frac{x^2}{(1-x^2)(1+x^2)}\,dx.$ $\quad \left[\frac{1}{4}\ln|1+x| - \frac{1}{4}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\right]$

16. $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+2x+5}\,dx.$ $\quad \left[\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right]$

17. $\int_3^4 \frac{2x^2-3x+10}{x^3-7x^2+10x}\,dx.$ $\quad \left[\ln\frac{1}{24}\right]$

18. $\int_1^2 \frac{x^3-3x^2-10x+6}{x^2-4x-5}\,dx.$ $\quad \left[\frac{5}{2} - \ln 3\right]$

19. $\int_2^3 \frac{x^2+2}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx.$ $\quad \left[\ln 2 + \frac{17}{8}\right]$

    Počítajme metódou per partes.

20. $\int \ln(x^2-2x-3)\,dx.$ $\quad [x\ln(x^2-2x-3) - 2x + \ln|x+1| - 3\ln|x-3|]\,.$

21. $\int \ln(x^2-6x+9)\,dx$. $\quad [x\ln(x^2-6x+9)-2x-6\ln|x-3|]$.

22. $\int \ln(x^2+2x+3)\,dx$. $\quad \left[(x+1)\ln(x^2+2x+3)-2x+\frac{4}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}\right]$.

23. $\int x^2\mathrm{arctg}\,(x-1)\,dx$. $\quad \left[\frac{1}{3}\left((x^3+2)\mathrm{arctg}(x-1)-\frac{x^2}{2}-2x-\ln(x^2-2x+2)\right)\right]$.

Pomocou viet o substitúcii počítajme integrály:

24. $\int \frac{x}{\sqrt{2-5x^2}}\,dx$. $\quad \left[-\frac{1}{5}\sqrt{2-5x^2}\right]$.

25. $\int \frac{e^x}{4e^{2x}-8e^x+13}\,dx$. $\quad \left[\frac{1}{6}\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{3}(e^x-1)\right)\right]$.

26. $\int \frac{2e^{2x}-3e^x+10}{e^{2x}-7e^x+10}\,dx$. $\quad [x-2\ln|e^x-2|+3\ln|e^x-5|]$.

27. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x+2\cos x+5}\,dx$. $\quad \left[-\ln(\cos^2 x+2\cos x+5)+\mathrm{arctg}\left(\frac{\cos x+1}{2}\right)\right]$.

28. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\sin x-2}\,dx$. $\quad \left[\frac{1}{3}\ln|\sin x-1|+\frac{2}{3}\ln(\sin x+2)\right]$.

29. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x+\sin x-6}\,dx$. $\quad \left[\frac{1}{5}\ln\frac{3}{8}\right]$.

30. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+\cos x-6}\,dx$. $\quad \left[\frac{1}{5}\ln\frac{16}{27}\right]$.

31. $\int \frac{e^x+10}{e^{2x}-2e^x+5}\,dx$. $\quad \left[2x-\ln(e^{2x}-2e^x+5)+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\frac{e^x-1}{2}\right]$.

32. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,dx$. $\quad \left[6\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}+\ln(\sqrt[6]{x}+1)\right)\right]$.

33. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$. $\quad \left[\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right|+2\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right]$.

34. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx$. $\quad [2\sqrt{1+x}+\ln|\sqrt{1+x}-1|-\ln|1+\sqrt{1+x}|]$.

35. $\int \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}\,dx$. $\quad .\left[-\frac{t^2}{2}-4t-9\ln|t-3|+\ln|t+1|,\ t=\sqrt{2x+3}\right]$.

36. $\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$. $\quad [\ln 9]$.

37. $\int \frac{1}{\sqrt{8-6x-9x^2}}\,dx$. $\quad \left[\frac{1}{3}\left(\arcsin\left(x+\frac{1}{3}\right)\right)\right]$.

38. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}}\,dx$. $\quad \left[\ln\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right]$.

39. $\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$. $\quad \left[2\ln|t|+\frac{1}{2}\ln|2t+1|+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1},\ t=\sqrt{x^2-x+1}-x\right]$.

40. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+\cos x}\,dx$. $\quad \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right]$.

41. $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx$. $\quad \left[\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-\ln\left(\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right]$.

42. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{4-5\sin x}\,dx$. $\quad \left[\frac{1}{3}\ln 2\right]$.

43. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\, dx.$ $\quad \left[\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2\right].$

44. $\int \frac{1}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x}\, dx.$ $\quad \left[\frac{\sqrt{14}}{14}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\operatorname{tg} x\right)\right].$

45. Vypočítajme $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\, dx.$ $\quad [4-\pi].$

46. Vypočítajme $\int\limits_0^{2\pi} \cos 3x \cos 4x\, dx.$ $\quad [0].$

Počítajte integrály (použite vhodné metódy)

1. $\int \frac{1}{4+3x^2}\, dx.$ $\quad \left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{2}\right].$

2. $\int \frac{x}{4+3x^2}\, dx.$ $\quad \left[\frac{1}{6}\ln(4+3x^2)\right].$

3. $\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\, dx.$ $\quad \left[-\frac{1}{4(x^2+1)^2}\right].$

4. $\int \frac{3x-3}{x^2+2x+2}\, dx.$ $\quad \left[\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+2) - 6\operatorname{arctg}(x+1)\right].$

5. $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+7}\, dx.$ $\quad \left[\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+7) - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right].$

6. $\int e^x \operatorname{cotg} e^x\, dx.$ $\quad [\ln|\sin e^x|].$

7. $\int \frac{2}{9x^2-1}\, dx.$ $\quad \left[\frac{1}{3}\ln\frac{|3x-1|}{|3x+1|}\right].$

8. $\int \frac{1-x}{x^2+x}\, dx.$ $\quad [\ln|x| - 2\ln|x+1|].$

9. $\int \frac{x^3-2x^2+9}{x^2-x-2}\, dx.$ $\quad \left[\frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x-2| - 2\ln|x+1|\right].$

10. $\int \frac{x}{x^3-3x+2}\, dx.$ $\quad \left[\frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{9}\ln|x+2|\right].$

11. $\int \frac{x^2+x+12}{x^3+7x^2+11x+5}\, dx.$ $\quad \left[2\ln|x+5| - \ln|x+1| - \frac{3}{x+1}\right].$

12. $\int \frac{x+2}{x^3+x^2+5x-7}\, dx.$ $\quad \left[\frac{3}{10}\ln|x-1| - \frac{3}{20}\ln\left(x^2+2x+7\right) + \frac{\sqrt{6}}{15}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{6}(x+1)}{6}\right)\right].$

13. $\int \frac{5x^3-5x^2-11x+5}{x^2-x-2}\, dx.$ $\quad \left[\frac{5x^2}{2} + \ln|x-2| - 2\ln|x+1|\right].$

14. $\int \frac{7-x}{x^3-x^2+3x+5}\, dx.$ $\quad \left[\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-2x+5}} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)\right].$

15. $\int \frac{2x^3-2x^2+4x-4}{x^4+4}\, dx.$ $\left[\frac{1}{2}\ln\left[\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)\right] - 2\operatorname{arctg}(x+1)\right].$

16. $\int x\operatorname{arctg}x\, dx.$ $\quad \left[\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\right].$

17. $\int x^2 e^{3x}\, dx.$ $\quad \left[\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)\right].$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(2x) \sin x \, dx.$ $\quad \left[\frac{2}{5}e^{\pi} + \frac{1}{5}\right].$

19. $\int x \ln x^2 \, dx.$ $\quad \left[\frac{x^2}{2}(\ln x^2 - 1)\right].$

20. $\int \ln(x^2+1) \, dx.$ $\quad [x\ln(x^2+1) - 2x + 2\mathrm{arctg} x].$

21. $\int\limits_1^e \ln^2 x \, dx.$ $\quad [(e-2)]$

22. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos(3x) \, dx.$ $\quad \left[-\frac{3}{13}\left(e^{\pi} + \frac{2}{3}\right)\right].$

23. $\int x \ln(x^2 - 2x + 5) \, dx.$

$\left[\frac{1}{2}(x^2+3)\ln(x^2-2x+5) - \frac{x^2}{2} - x + 4\mathrm{arctg}\frac{(x-1)}{2}\right].$

24. $\int \ln(x^2 + x - 2) \, dx.$

$[x\ln(x^2+x-2) - 2x - \ln|x-1| + 2\ln|x+2|].$

25. $\int x^2 \ln(x^2+4x+4) \, dx.$

$\left[\frac{x^3}{3}\ln(x^2+4x+4) - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8\ln|x+2|\right)\right].$

26. $\int x^2 \mathrm{arctg}\frac{1}{x} \, dx.$ $\quad \left[\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}\frac{1}{x} + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{6}\ln(x^2+1)\right].$

27. $\int e^{\sqrt{x}} \, dx.$ $\quad \left[2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)\right].$

28. $\int \mathrm{arctg}\frac{1}{x-1} \, dx.$ $\quad \left[x\mathrm{arctg}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x^2 - 2x + 2| + \mathrm{arctg}\,(x-1)\right].$

29. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} \, dx.$ $\quad \left[\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} + 4\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} - 4\right].$

30. $\int \frac{e^x+10}{(e^{2x}-2e^x+5)} \, dx.$ $\quad \left[2x - \ln|e^{2x} - 2e^x + 5| + \frac{3}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{e^x-1}{2}\right)\right].$

31. $\int \frac{e^x(e^x-1)}{e^{2x}+1} \, dx.$ $\quad \left[\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) - \mathrm{arctg}\,(e^x)\right].$

32. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^{2x}+2e^x-3}{e^{2x}+e^x-6} \, dx.$ $\quad \left[\ln\sqrt{5}\right].$

33. $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{2e^x+3}{e^{2x}+2e^x+2} e^x \, dx.$ $\quad [\ln 2 + \mathrm{arctg}\,3 - \mathrm{arctg}\,2].$

34. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \sin x + 3} \, dx.$

$\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sin^2 x + \sin x + 3\right) - \frac{\sqrt{11}}{11}\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{11}}{11}(2\sin x + 1)\right)\right].$

35. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(5-\cos x)\sin x}{\cos^2 x - \cos x - 2} \, dx.$ $\quad [-3\ln 2].$

36. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x+\sin^2 x+\sin x}\,dx.$

$\left[\ln|\sin x| - \frac{1}{2}\ln|\sin^2 x + \sin x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} + \sin x\right)\right)\right].$

37. $\int x\sqrt[3]{x+2}\,dx.$ $\left[\frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+2)^7} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^4}\right].$

38. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})}\,dx.$ $[6\ln(1+\sqrt[6]{x})].$

39. $\int \frac{x}{(1+\sqrt{x-1})}\,dx.$

$\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - x + 1 + 4\sqrt{x-1} - 4\ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)\right].$

40. $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx.$ $[7+\ln 4].$

41. $\int \frac{1-\sqrt[6]{x+1}}{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^4}}\,dx.$

$\left[\ln|x+1| - 3\ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right| - 6\operatorname{arctg}\left(\sqrt[6]{x+1}\right)\right].$

42. $\int \frac{1}{x+\sqrt{2x-1}}\,dx.$ $\left[2\ln\left(x+\sqrt{2x-1}\right) + \frac{2}{1+\sqrt{2x-1}}\right].$

43. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+2\sqrt{x-1}}\,dx.$ $\left[2\sqrt{x-1} - \ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)^4 - \frac{2}{1+\sqrt{x-1}}\right].$

44. $\int\limits_1^{27} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$ $\left[8 + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}\right].$

45. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x-2x^2}}\,dx.$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arcsin\left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)\right)\right].$

46. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx.$ $\left[\ln\left|\frac{-x-1+\sqrt{x^2+x+1}}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}}\right|\right].$

47. $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx.$ $[2\pi].$

48. $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx.$ $\left[-2\operatorname{arctg} t,\ t = \frac{\sqrt{3-2x-x^2}-\sqrt{3}}{x}\right].$

49. $\int\limits_0^4 \frac{1}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}\,dx.$ $\left[\frac{4}{45}\right].$

50. $\int \frac{1}{\sin x}\,dx.$ $\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|\right].$

51. $\int \frac{1}{3-\cos x}\,dx.$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right].$

52. $\int \frac{1}{3+\cos x+\sin x}\,dx.$ $\left[\frac{2\sqrt{7}}{7}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}\left(2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)}{7}\right)\right].$

53. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x-2\sin x+3}\,dx.$ $\left[-\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right)\right].$

54. $\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}\, dx.$ $\quad \left[2(\ln|t-1| - \ln|t| - \operatorname{arctg} t),\ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right].$

55. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}\, dx.$ $\quad \left[\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right].$

56. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\cos^2 x+2}.$ $\quad \left[\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg} x\right)\right].$

57. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 5x \cos x\, dx.$ $\quad [\frac{1}{6}].$

Integrovateľnosť po častiach spojitých funkcií.

V časti „Integrálny počet - Určitý integrál" sme zaviedli dolné a horné integrálne súčty, definovali sme určitý integrál ako hodnotu $\int_a^b f(x)\,dx$ takú, že $D(f,P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq H(f,P)$, $\forall P$ delenie intervalu $\langle a,b\rangle$. Aj keď pre výpočet integrálov existuje množstvo metód je často ťažké ba dokonca nemožné vyjadriť neurčitý integrál pomocou známych funkcií a tak vypočítať presnú numerickú hodnotu odpovedajúceho určitého integrálu. Napríklad integrál

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^4}dx.$$

Niektoré určité integrály vieme nájsť napríklad

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln 2,$$

ale pre praktické použitie je vhodné vedieť numerickú hodnotu $\ln 2$ s určitou presnosťou. Preto definujeme Riemannove integrálne súčty, ktoré nám ako jedna z aproximačných metód pomôžu nájsť hodnotu určitých integrálov.

Definition 99 *Nech P je delenie intervalu $\langle a,b\rangle$ a nech $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je ohraničená funkcia. Pre každé $k \in \{1,2,...,n\}$ nech $t_k \in \langle x_{k-1},x_k\rangle$ je ľubovoľný bod. Sumu $R(f,P) = \sum_{k=1}^n f(t_k)\Delta x_k$ nazývame Riemannovým integrálnym súčtom ohraničenej funkcie f.*

Akokoľvek vyberieme body $t_k \in \langle x_{k-1},x_k\rangle$ vždy platí $D(f,P) \leq R(f,P) \leq H(f,P)$, $\forall P$ delenie intervalu $\langle a,b\rangle$. Pretože pre riemannovsky integrovateľnú funkciu f tak $D(f,P)$ ako aj $H(f,P)$ aproximujú $\int_a^b f(x)\,dx$, tak aj riemannove integrálne súčty aproximujú túto hodnotu. Teda môžme písať:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n f(t_k)\,\Delta x_k.$$

Tento vzorec slúži ako základ pre približný výpočet určitých integrálov. Nutná podmienka integrovateľnosti funkcie hovorí, že každá spojitá funkcia na uzavretom intervale je riemannovsky integrovateľná. Najdôležitejšou vlastnosťou Riemannových integrálnych súčtov je, že aproximujú numerickú hodnotu určitého integrálu. Nasledujúca veta, ktorú uvádzame bez dôkazu je presnou matematickou formuláciou tohto tvrdenia.

Theorem 100 *Nech $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá na $\langle a,b\rangle$. K ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že platí: Ak $P = \{x_0,x_1,...,x_n\}$ je nejaké delenie intervalu $\langle a,b\rangle$, ktorého každý podinterval má dĺžku menšiu ako δ a ak $x_{k-1} \leq t_k \leq x_k$ pre každé $k = 1,2,...,n$, potom pre odpovedajúci Riemannov integrálny súčet $\sum_{k=1}^n f(t_k)\,\Delta x_k$ je splnený odhad $\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^n f(t_k)\,\Delta x_k\right| < \varepsilon$.*

Túto vlastnosť často zapisujeme v tvare:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\longrightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k)\,\Delta x_k,$$

kde $\|P\|$ označuje dĺžku najväčšieho podintervalu delenia P a nazýva sa norma delenia P. Riemannove integrálne súčty však majú zmysel aj pre funkcie, ktoré nie sú nutne spojité na intervale $\langle a, b\rangle$.

Definition 101 *Nech $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ s výnimkou konečného počtu bodov, v ktorých má vlastné limity sprava aj zľava (okrem bodu a, v ktorom má iba limitu sprava a bodu b, v ktorom má iba limitu zľava). Potom f nazývame po častiach spojitá funkcia na $\langle a, b\rangle$.*

Nech funkcia $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je po častiach spojitá funkcia. Označme jej body nespojitosti $c_1, c_2, ..., c_n$, $a < c_1 < c_2 < ... < c_n < b$. Potom je funkcia f spojitá na každom z intervalov $(a, c_1), (c_1, c_2), ..., (c_{n-1}, c_n), (c_n, b)$. Pri výpočte integrálu $\int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\, dx$ nahradíme funkciu f funkciou spojitou na intervale $\langle c_{k-1}, c_k\rangle$, ktorá je totožná s funkciou f na intervale (c_{k-1}, c_k) . Potom je f integrovateľná na každom z intervalov $\langle a, c_1\rangle$, $\langle c_1, c_2\rangle$, ..., $\langle c_{n-1}, c_n\rangle$, $\langle c_n, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{c_1} f(x)\, dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\, dx + ... + \int_{c_n}^b f(x)\, dx.$$

Example 102 *Vypočítajte $\int_0^3 f(x)\, dx$, pričom $f(x) = \begin{cases} 1 & pre \quad x \in \langle 0, 2\rangle \\ x & pre \quad x \in (2, 3\rangle \end{cases}$.*

Solution 103 *Platí $f(2-) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = 1$, a $f(2+) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = 2$, vidíme, že funkcia f je spojitá s výnimkou bodu $x = 2$ t.j. je po častiach spojitá a teda integrovateľná. Potom $\int_0^3 f(x)\, dx = \int_0^2 f(x)\, dx + \int_2^3 f(x)\, dx = \int_0^2 1dx + \int_2^3 xdx = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$.*$\square$

Aplikácie integrálneho počtu.

Plošný obsah rovinných útvarov.

Definition 104 *Nech* $f, g : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *sú spojité funkcie. Nech* R *je rovinný útvar ohraničený zhora a zdola grafmi* f *a* g *a zľava a sprava priamkami* $x = a$ *a* $x = b$. *Potom* R *nazývame rovinným útvarom medzi grafmi* f *a* g *na intervale* $\langle a, b\rangle$ *a jeho plocha* A *je definovaná vzťahom* $A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$.

Example 105 *Nech* $f, g : \langle -1, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + 1$, $g(x) = x^3 + x + 1$.*Nájdite plochu útvaru medzi grafmi* f *a* g *na* $\langle -1, 1\rangle$.

Solution 106 *Podľa definície máme*

$$A = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{-1}^{1} \left|x^3 + x^2 + 1 - x^3 - x - 1\right| dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left|x^2 - x\right| dx = \int_{-1}^{0} \left(x^2 - x\right) dx + \int_{0}^{1} \left(x - x^2\right) dx = 1.\Box$$

Niekedy môžeme namiesto útvaru medzi grafmi funkcií f, g závislých od premennej x skúmať aj plochu útvaru medzi grafmi funkcií závislých od premennej y: $\int_c^d |f(y) - g(y)|\, dy$.

Objem priestorových útvarov.

Uvažujme trojrozmerné teleso D, ktoré môžme popísať nasledujúcim spôsobom: pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ priesečníkom roviny kolmej na os o_x v bode x s telesom D je rovinný útvar s plošným obsahom vyjadreným funkciou $A(x)$.

Definition 107 *Nech teleso* D *má plochu kolmého rezu definovanú funkciou* $A : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *a predpokladáme, že* $A(x)$ *je spojitá na* $\langle a, b\rangle$. *Potom objem* V *telesa* D *definujeme:* $V = \int_a^b A(x)\, dx$.

Example 108 *Ukážte, že objem rotačného kužeľa s výškou* h *a polomerom základne* r *je daný vzťahom* $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Solution 109 *Najskôr nájdeme plochu kolmého rezu rotačného kužeľa. Je zrejmé, že kolmým rezom bude kruh s polomerom* $r(x)$, *ak projekciu kužeľa umiestnime do kartézskeho súradnicového systému* $[0, x, y]$ *tak, že jeho vrchol je v začiatku a os rotačného kužeľa je totožná s kladným smerom osi* o_x, *potom z podobnosti trojuholníkov dostaneme:* $\frac{r(x)}{x} = \frac{r}{h} \Longrightarrow r(x) = \frac{r}{h}x$

a plocha kolmého rezu je

$A(x) = \pi r^2(x) = \pi \frac{r^2}{h^2} x^2$,

potom

$V = \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3}\pi r^2 h.\Box$

Ak graf spojitej nezápornej funkcie $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ rotuje okolo osi o_x, vytvára teleso s plochou kolmého rezu

$$A(x) = \pi f^2(x).$$

Potom z predchádzajúcej definície plynie, že

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Definition 110 *Nech $f, g : \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ sú spojité funkcie a $0 \le g(x) \le f(x),\ x \in \langle a, b\rangle$. Nech R je obrazec medzi grafmi f a g na $\langle a, b\rangle$. Potom objem V telesa, ktoré vznikne rotáciou obrazca R okolo osi o_x definujeme $V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx$.*

Dĺžka krivky.

Definition 111 *Nech $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ je spojite diferencovateľná funkcia. Potom dĺžku krivky l, ktorú vytvára graf funkcie f medzi bodmi $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ definujeme $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$.*

Example 112 *Vypočítajte dĺžku krivky danej grafom funkcie $f(x) = \ln x,\ x \in \left\langle \sqrt{3}, \sqrt{8}\right\rangle$.*

Solution 113 *Funkcia $f(x) = \ln x$ je na intervale $\left\langle \sqrt{3}, \sqrt{8}\right\rangle$ spojite diferencovateľná a platí $f'(x) = \frac{1}{x}$. Potom dĺžka krivky, ktorú vytvára graf funkcie f na intervale $\left\langle \sqrt{3}, \sqrt{8}\right\rangle$ je definovaná: $l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\left(1+x^2\right)}{x^2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx =$*

$$= \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{1+x^2} \Longrightarrow dt = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \Longrightarrow dt = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}dx \\ x = \sqrt{3} \Longrightarrow t = 2,\ x = \sqrt{8} \Longrightarrow t = 3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1}dt =$$

$$= \int_2^3 1dt + \int_2^3 \frac{1}{(t-1)(t+1)}dt = 1 + \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_2^3 = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.\square$$

Cvičenia.

1. Vypočítajte integrál $\int_0^4 f(x)dx$, ak $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre} \quad x \in \langle 0,2) \\ 3 & \text{pre} \quad x \in \langle 2,3) \\ 4-x & \text{pre} \quad x \in \langle 3,4\rangle \end{cases}$. $\left[\frac{37}{6}\right]$

2. Vypočítajte integrál $\int_0^{1+\frac{\pi}{2}} f(x)dx$, ak $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pre} \quad x \in \langle 0,\frac{\pi}{4}) \\ x & \text{pre} \quad x \in \langle \frac{\pi}{4},1) \\ \cos(x-1) & \text{pre} \quad x \in \langle 1, 1+\frac{\pi}{2}\rangle \end{cases}$. $\left[\frac{3-\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2}{32}\right]$

3. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

   (a) $y = x\ln x,\ x = \frac{1}{2},\ x = 2,\ y = 0.$ $\left[-\frac{9}{16} + \frac{15}{8}\ln 2\right]$.

   (b) parabolou $y = x^2 - 6x + 8$ a jej dotyčnicami v bodoch $A = [1,3]$, $B = [4,0]$. $\left[\frac{9}{4}\right]$.

   (c) parabolami $y = x^2, y = \sqrt{x}.$ $\left[\frac{1}{3}\right]$.

4. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

   (a) $y = \frac{27}{x^2+9},\ y = \frac{x^2}{6}.$ $\left[\frac{3}{2}(3\pi - 2)\right]$.

   (b) $y = \ln x,\ \ y = \ln^2 x.$ $[3 - e]$.

5. Vypočítajme plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

   (a) $y = x - 1, y^2 = 2x + 1.$ $\left[\frac{16}{3}\right]$.

   (b) $y = x^2,\ y = \frac{1}{2}x^2,\ y = 2.$ $\left[\frac{8}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right)\right]$.

6. Kruh $x^2 + y^2 = 8$ je rozdelený parabolou $y = \frac{x^2}{2}$ na dve časti. Vypočítajme plošný obsah menšej z nich. $\left[2\pi + \frac{4}{3}\right]$.

7. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej čiarami $yx = 4,\ x+y = 5$. Načrtnite obrázok! $\left[\frac{15}{2} - 2\ln 8\right]$

8. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej čiarami $y = 0,\ y = xe^{-2x}$ na $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$. Načrtnite obrázok!$\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2e}\right]$

9. Vypočítajte objem zrezaného kužeľa, ktorý vznikne rotáciou elementárnej oblasti okolo osi o_x. Polomery jeho podstáv sú $r = 1,\ R = 2$ a výška $v = 3$. $[7\pi]$.

10. Vypočítajme objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x. Oblasť je určená čiarami $y = \frac{2x}{\pi},\ y = \sin x,\ x \geq 0.$ $\left[\frac{\pi^2}{12}\right]$.

11. Vypočítajme objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x. Oblasť je určená čiarami $y = \sin x,\ y = \frac{2x}{\pi}.$ $\left[\frac{\pi^2}{6}\right]$.

12. Zistite plochu kolmého rezu a vypočítajte objem gule s polomerom r. $\left[A(x) = \pi r^2(x) = \pi(r^2 - x\right.$

13. Zistite plochu kolmého rezu a vypočítajte objem pravidelného štvorbokého ihlana so základňou dĺžky a a výškou h. $\left[A(x) = a^2(x) = \frac{a^2x^2}{h^2},\ V = \int_0^h \frac{a^2x^2}{h^2}dx = \frac{1}{3}a^2h.\right]$

14. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnej oblasti ohraničenej čiarami $y = 1 - x^2,\ y = x^2$ okolo osi o_x. $\left[\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\right]$

15. Vypočítajte dĺžku krivky $y = 2\sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 2$. $\left[\sqrt{6} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{2\sqrt{6}+5}{2\sqrt{2}+3}\right]$

16. Vypočítajte dĺžku krivky $y = \ln\frac{e^x+1}{e^x-1},\ x \in \langle \ln 2, \ln 5\rangle$. $\left[\ln\frac{16}{5}\right]$

Part III

Matematická analýza III

Chapter 2 KOMPLEXNÉ ČíSLA A FUNKCIE KOMPLEXNEJ PREMENNEJ.

Komplexné čísla a algebraické operácie s nimi.

Definícia komplexného čísla.

V množine reálnych čísel $\boldsymbol{R}$ neexistuje číslo, ktoré by bolo riešením rovnice

$$x^2 + 1 = 0. \tag{1}$$

Chceme model rozširujúci množinu reálných čísel $\boldsymbol{R}$, ktorý by obsahoval element (imaginárnu jednotku) i tak, že $i^2 = -1$.

Definition 114 *Symbolom $\boldsymbol{C}$ označíme množinu usporiadaných dvojíc $\{(x,y) : x, y \in \boldsymbol{R}\}$ s nasledujúcimi operáciami:*
Sčítanie: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
Násobenie: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$
$\boldsymbol{C}$ nazývame množina komplexných čísel.

Platí : $(1,0) \cdot (x,y) = (x,y)$, $(0,1) \cdot (x,y) = (-y,x)$ a teda pre $i \sim (0,1)$ platí $i^2 = (-1,0)) \sim -1$. Všeobecne: $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \sim x + iy$. Komplexné čísla sa násobia ako dvojčleny s využitím rovnosti $i^2 = -1$.

Terminológia a označenie $z = x+iy$, $x, y \in \boldsymbol{R}$, $x = \operatorname{Re} z$ je reálna časť, $y = \operatorname{Im} z$ je imaginárna časť komplexného čísla z, $\overline{z} = x - iy$ je komplexne združené číslo, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ je absolútna hodnota (modul) . Pre moduly komplexných čísel máme

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \,.$$

Platia algebraické zákony:

$$z_1z_2 = z_2z_1, \; z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3,$$

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3.$$

Pravidlá konjugácie:
(i) $\overline{\overline{z}} = z$,
(ii) $\overline{zw} = \overline{zw}$
(iii) $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$
(iv) $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$
(v) $|z| = |\overline{z}|$.
Komplexná - (Gaussova) rovina

$$\operatorname{Re} z = |z| \cos \varphi, \; \operatorname{Im} z = |z| \; \sin \varphi.$$

Argument (používa sa aj názov amplitúda) $z \neq 0$

$$Arg z = \{\varphi \in \boldsymbol{R} : z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)\}.$$

Hlavná hodnota argumentu: $z \neq 0 : \arg z \in Arg\ z$, $\arg : \boldsymbol{C} \backslash \{0\} \longrightarrow (-\pi, \, \pi\rangle$,

$$\arg z \in (-\pi, \pi\rangle \tag{2}$$

ktorú nazývame hlavná hodnota (alebo hlavná vetva) argumentu z a $|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ nazývame trigonometrický tvar komplexného čísla z.

Pripomeňme si, že za predpokladu (2) má hlavná hodnota argumentu $\arg z$ nespojitosť na zápornej časti reálnej osi:

a) ak sa bod z „blíži" ku bodu na zápornej časti reálnej osi „zhora" potom $\arg z$ sa „blíži" k hodnote π,

b) ak sa bod z „blíži" ku bodu na zápornej časti reálnej osi „zdola" potom $\arg z$ sa „blíži" k hodnote $-\pi$.

Pre komplexné čísla $z = 0$ a $z = \infty$ (ktoré zavedieme neskôr) Arg z nie je definovaná.

Remark 115 *Niektorí autori zavádzajú funkciu hlavná hodnota argumentu z takto:* $\arg : \boldsymbol{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \langle 0, 2\pi)$.

Ak z je rýdzo reálne kladné číslo, potom arg $z = 0$. Ak z je rýdzo reálne záporné číslo, potom $\arg z = \pi$. Ak z je rýdzo imaginárne číslo s kladnou imaginárnou časťou, potom $\arg z = \frac{\pi}{2}$.Ak z je rýdzo imaginárne číslo so zápornou imaginárnou časťou, potom $\arg z = -\frac{\pi}{2}$. Ľahko nahliadneme, že

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}\ \text{ ak }\ x \neq 0,\ \operatorname{cotg}\varphi = \frac{x}{y}\ \text{ ak }\ y \neq 0. \tag{3}$$

Potom pre hlavnú hodnotu argumentu $\arg z$ za predpokladov, že

$$-\pi < \arg z \leq \pi \quad \text{a} \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \leq \frac{\pi}{2}$$

dostávame

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{pre} \quad x > 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{pre} \quad x < 0,\ y \geq 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{pre} \quad x < 0,\ y < 0 \end{cases}.$$

Ľahko vidieť, že

$$|z| = |\overline{z}| \quad \text{a} \quad \arg\overline{z} = -\arg z.$$

Example 116 *Nájdite trigonometrický tvar komplexného čísla* $z = 1 - i$.

Solution 117 *Použitím vzťahov (2) a (3) máme*

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad a \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{1} = -1,$$

t.j.

$$\arg z = -\frac{\pi}{4} \quad a \quad z = 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].\square$$

Example 118 *Nájdite trigonometrický tvar nasledujúcich komplexných čísel:* $z_1 = 2,\ z_2 = -3,\ z_3 = 3i,\ z_4 = -2i$.

Solution 119 *Priamo môžeme písať: pretože*

$$|z_1| = 2, \arg z_1 = 0, \quad \textit{tak} \;\; z_1 = 2 = 2(\cos 0 + i \sin 0),$$

$$|z_2| = 3, \arg z_2 = \pi, \quad \textit{tak} \;\; z_2 = -3 = 3\left(\cos \pi + i \sin \pi\right),$$

$$|z_3| = 3, \arg z_3 = \frac{\pi}{2}, \quad \textit{tak} \;\; z_3 = 3i = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

$$|z_4| = 2, \arg z_4 = -\frac{\pi}{2}, \quad \textit{tak} \;\; z_4 = -2i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right). \square$$

Použitím Eulerovej formuly (ktorú dokážeme neskôr)

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

môžeme definovať exponenciálny tvar komplexného čísla z

$$z = |z|\, e^{i\varphi}.$$

Example 120 *Nájdite exponenciálny tvar komplexných čísel z predchádzajúcich príkladov.*

Solution 121 *Máme*

$$z = 1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}, \; z_1 = 2e^{i0}, \; z_2 = -3 = 3e^{i\pi},$$

$$z_3 = 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}, \; z_4 = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}. \square$$

Je jasné, že v množine komplexných čísel nemožno zaviesť usporiadanie ale je možné porovnávať moduly komplexných čísel. Napríklad

$$|10i| > |i| \quad \text{alebo} \quad |2+3i| < |6+5i|.$$

Modul rozdielu dvoch komplexných čísel z_1, z_2 je rovný vzdialenosti bodov (x_1, y_1) a (x_2, y_2) t.j.

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Odtiaľto dostaneme, že množina

$$S(a, \rho) = \{z \in \boldsymbol{C};\; |z - a| = \rho\}$$

je kružnica v komplexnej rovine $\boldsymbol{C}$ so stredom v bode $z = a$ a s polomerom ρ a množina

$$K(a, \rho) = \{z \in \boldsymbol{C}; |z - a| < \rho\}$$

je vnútro kruhu so stredom v bode $z = a$ s polomerom ρ a napokon množina

$$\boldsymbol{C} \backslash \overline{K(a, \rho)} = \{z \in \boldsymbol{C};\; |z - a| > \rho\}$$

je množina všetkých vonkajších bodov kruhu so stredom v bode $z = a$ a s polomerom ρ.

Zopakujme, že násobenie dvoch komplexných čísel $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2$ je definované

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

t.j. násobenie komplexných čísel v algebrickom tvare je definované ako násobenie polynómov s použitím rovností

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ \ldots.$$

Ak z_1 a z_2 sú dané v trigonometrickom a v exponenciálnom tvare

$$z_1 = r_1\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1} \quad \text{a} \quad z_2 = r_2\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2},$$

potom máme

$$z = z_1 z_2 = r_1\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\, r_2\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2\,(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$z = z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

čo implikuje

$$|z| = |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|,$$

$$\text{Arg } z = \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2.$$

Pretože $-\pi < \arg z \le \pi$ pre hlavné hodnoty dostaneme

$$\arg(z_1 z_2) = \begin{cases} \arg z_1 + \arg z_2 & \text{pre} \quad \arg z_1 + \arg z_2 \in (-\pi,\, \pi\rangle \\ \arg z_1 + \arg z_2 - 2\pi & \text{pre} \quad \arg z_1 + \arg z_2 > \pi \\ \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi & \text{pre} \quad \arg z_1 + \arg z_2 < -\pi \end{cases}.$$

Delenie dvoch komplexných čísel $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ definujeme

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Použitím faktu, že

$$\frac{z_1}{z_2} z_2 = z_1$$

dostaneme

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

a pre trigonometrický a exponenciálny tvar:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\,(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

$$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg } z_1 \setminus \text{Arg } z_2.$$

Pre hlavné hodnoty argumentu platia podobné pravidlá ako pre násobenie a pozorný čitateľ si ich iste odvodí aj sám.

Mocnina komplexného čísla.

Ak n je prirodzené číslo, potom aplikáciou pravidla pre násobenie komplexných čísel ľahko odvodíme, že ak $z = re^{i\varphi}$, potom

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi},$$

čo pre trigonometrický tvar dáva

$$z^n = r^n \left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right).$$

Posledná rovnosť implikuje tzv. Moivreovu formulu:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi),$$

odkiaľ pre $n = 2$ máme

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,\ \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

a pre $n = 3$ dostaneme

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi,\ \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

Odmocnina komplexného čísla.

Nech $z(\neq 0,\, \infty)$ je komplexné číslo a n je prirodzené číslo. Hľadáme všetky riešenia rovnice

$$w^n = z \tag{4}$$

Nech $z = re^{i\varphi}$ a $w = \rho e^{i\Theta}$. Potom máme

$$\rho^n e^{in\Theta} = re^{i\varphi},$$

čo implikuje

$$\rho^n = r \ \text{ a } \ n\Theta = \varphi + 2k\pi, \ \text{ pre } \ k = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots \tag{5}$$

a (5) definuje jediné kladné riešenie ρ a množinu hodnôt Θ:

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \Theta = \Theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}. \tag{6}$$

Ak položíme $k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1$ v druhej rovnici (6) dostaneme n rôznych hodnôt Θ_k :

$$\Theta_0 = \frac{\varphi}{n},\ \Theta_1 = \frac{\varphi + 2\pi}{n},\ \Theta_2 = \frac{\varphi + 4\pi}{n},\ \ldots,\ \Theta_{n-1} = \frac{\varphi + 2\,(n-1)\,\pi}{n},$$

takých že ďalšie hodnoty Θ_k pre $k = \ldots,\, -n,\, -(n-1),\, \ldots,\, -2,\, -1,\, n,\, n+1,\, \ldots$ sa líšia od týchto hodnôt iba o násobok čísla 2π. Tak rovnice (5) definujú iba n rôznych hodnôt

$$w_k = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad \text{pre } \ k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1,$$

ktoré sú riešeniami rovnice (4). Ak komplexné číslo z zapíšeme v trigonometrickom tvare $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, a korene rovnice (4) napíšeme tiež v trigonometrickom tvare:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad \text{pre} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Formula (6) implikuje, že každá z rôznych hodnôt w_k má ten istý modul $\sqrt[n]{|z|}$ a ich argumenty sa líšia iba o hodnotu $\frac{2\pi}{n}$, čo znamená, že každé riešenie w_k rovnice (4) leží na kružnici $S\left(0, \sqrt[n]{|z|}\right)$. a argument prvej hodnoty ($k = 0$) sa rovná $\frac{\varphi}{n}$. Túto hodnotu

$$w_0 = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

nazývame hlavnou vetvou n-tej odmocniny z komplexného čísla z.

Pre hodnoty $z = 0$ a $z = \infty$ definujeme jediné hodnoty odmocnín $w = 0$ a $w = \infty$.

Example 122 *Nájdite všetky riešenia rovnice* $z^3 = 1 + i$.

Solution 123 *Pretože*

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

dostaneme

$$z_k = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right), \ k = 0, 1, 2$$

Teda máme

$$k = 0, \ z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$k = 1, \ z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}\right),$$

$$k = 2, \ z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right).\Box$$

Cvičenia.

1. Nájdite modul, hlavnú hodnotu argumentu a zobrazte v komplexnej rovine nasledujúce komplexne čísla:

   (a) $1-\sqrt{3}i$, $\left[2,\ -\frac{\pi}{3}.\right]$

   (b) $-2+2i$, $\left[2\sqrt{2},\ \frac{3\pi}{4}.\right]$

   (c) $-4, [4,\ \pi.]$

   (d) i^5. $\left[1, \frac{\pi}{2}.\right]$

2. Zapíšte nasledujúce čísla v trigonometrickom a exponenciálnom tvare:

   (a) $1+\sqrt{3}i$, $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right), 2e^{i\frac{\pi}{3}}.\right]$

   (b) $2+2i$, $\left[2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right), 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.\right]$

   (c) $-2, [2(\cos\pi+i\sin\pi), 2e^{i\pi}.]$

   (d) $-i^3$. $\left[\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right), e^{i\frac{\pi}{2}}.\right]$

   (e) $z=-\sqrt{3}-i$. $\left[z=2(\cos\frac{-5\pi}{6}+i\sin\frac{-5\pi}{6}), z=2e^{-i\frac{5\pi}{6}}.\right]$

3. Vypočítajte a napíšte v algebrickom tvare:

   (a) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^3$, $[-8.]$

   (b) $\frac{(1-i)^2}{1+i}$. $[-1-i.]$

   (c) $\frac{1+i}{1-i}-i^9$. $[0]$

   (d) $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+i\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{2004}$. $\left[(-3)^{2004}\right]$

   (e) Nájdite $r, s \in \boldsymbol{R}$ tak, aby platilo: $(2-4i)r+(3-5i)s=2i$. $[r=-3, s=2]$

   (f) Pre ktoré nenulové komplexné čísla $z=x+iy$ platí $z^2=\overline{z}$?
   $\left[z_1=1, z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

4. Nájdite všetky korene rovníc a zobrazte ich v komplexnej rovine

   (a) $z^3=i$, $\left[w_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, w_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, w_3=-i.\right]$

   (b) $z^4=-1$,
   $$\left[\begin{array}{c} w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, w_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ w_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i, w_4=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i. \end{array}\right]$$

   (c) $z^4=1-\sqrt{3}i$,
   $$\left[\begin{array}{c} w_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right), w_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right), \\ w_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right), w_4=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right) \\ \text{alebo}\ \ w_4=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right). \end{array}\right]$$

   (d) $z^4=1, [w_1=1, w_2=i, w_3=-1, w_4=-i.]$

(e) $z^3 = -1$. $\left[w_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, w_2 = -1, w_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.\right]$

(f) $z^3 = 8i$. $\left[w_1 = \sqrt{3} + i, w_2 = -\sqrt{3} + i, w_3 = -2i.\right]$

5. V $\boldsymbol{C}$ vyriešte rovnicu: $z^4 - z^2 + 1 = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}, \\ z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}, z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}. \end{array}\right]$$

Oblasti, postupnosti a rady komplexných čísel.

Oblasti, okolia.

Zopakujeme nasledujúce pojmy, ktoré sme zaviedli už pre reálne funkcie viacerých premenných. Nech $a \in \boldsymbol{C}$, $a \neq \infty$. Množina

$$O_\varepsilon(a) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z-a| < \varepsilon\}$$

sa nazýva ε-okolie bodu a. Množinu

$$O_\varepsilon^\circ(a) = O_\varepsilon(a) \setminus \{a\} = \{z \in \boldsymbol{C};\ 0 < |z-a| < \varepsilon\}$$

nazývame $\varepsilon-$prstencové okolie bodu a.

Nekonečno.

Ku množine všetkých konečných komplexných čísel pridáme jedno nekonečné komplexné číslo, ktoré označíme ∞ a nazývame nekonečno. Pre ∞ nemá zmysel definovať argument a modul definujeme takto: $|\infty| = +\infty$. Označujeme $\overline{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$.

Množinu $O_\varepsilon(\infty) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| > \frac{1}{\varepsilon}\}$ nazývame ε-okolím bodu ∞, definujeme $O_\varepsilon(\infty) = O_\varepsilon^\circ(\infty)$.

Nech $E \subset \boldsymbol{C}$. Bod $a \in E$ sa nazýva vnútorný bod množiny E, ak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $O_\varepsilon(a) \subset E$.

Bod $a \in \boldsymbol{C}$ sa nazýva hraničným bodom množiny E ak pre každé $\varepsilon > 0$ $O_\varepsilon(a)$ obsahuje ako body z množiny E, tak aj body, ktoré neležia v množine E.

Bod $a \in \boldsymbol{C}$ sa nazýva vonkajším bodom množiny E ak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $O_\varepsilon(a) \cap E = \emptyset$. Množinu všetkých vnútorných (hraničných, vonkajších) bodov množiny E nazývame vnútrom (hranicou, vonkajškom) množiny E a označujeme $intE$ $(\partial E, extE)$.

Bod $a \in \boldsymbol{C}$ sa nazýva hromadný bod množiny E ak $\forall \varepsilon > 0$ je $O_\varepsilon(a) \cap E \neq \emptyset$.

Example 124 *Nech* $O_2(0) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < 2\}$. *Pre* $O_2(0)$ *zistite z akých bodov pozostávajú množiny* $int(O_2(0))$, $\partial(O_2(0))$, $ext(O_2(0))$.

Solution 125 $int(O_2(0)) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < 2\}$, $\partial(O_2(0)) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| = 2\}$, $ext(O_2(0)) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| > 2\}$. $\square$

Definition 126 *Množinu bodov* $D \subset \boldsymbol{C}$, *ktorá spĺňa nasledujúce podmienky:*

a) D *pozostáva iba z vnútorných bodov (*D *je otvorená),*

b) každé dva body $z, w \in D$ *možno spojiť lomenou čiarou (po častiach úsečkou), ktorá celkom leží v* D, *(*D *je súvislá) nazývame oblasť. Množinu*

$$\overline{D} = D \cup \partial D.$$

nazývame uzavretá oblasť.

Example 127 *Nech* $H = \{z \in \boldsymbol{C};\ (\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z) > 0 \wedge |z| < R\}$. *Zistite, či je množina* H *oblasť?*

Solution 128 H *nie je oblasť, pretože* $0 \notin H$, *t.j.* H *nespĺňa podmienku b).* $\square$

Ďalším dôležitým pojmom je rád súvislosti.

Definition 129 *Počet navzájom nespojených (neprepojených) častí, z ktorých pozostáva hranica oblasti sa nazýva rád súvislosti oblasti. Oblasť ohraničená jednou spojitou uzavretou čiarou sa nazýva jednoducho súvislá oblasť, oblasť ohraničená dvomi nepretínajúcimi sa uzavretými čiarami sa nazýva dvojnásobne súvislá oblasť, ...*

Definition 130 *Za kladný smer obchádzania oblasti budeme považovať taký smer, pri ktorom oblasť zostáva vždy po ľavej strane.*

Example 131 *Oblasť ohraničená jednou spojitou, uzavretou, ohraničenou krivkou sa nazýva jednoducho súvislá oblasť, oblasť ohraničená dvomi nepretínajúcimi sa spojitými, uzavretými ohraničenými krivkami, z ktorých jedna leží vnútri druhej sa nazýva dvojnásobne súvislá oblasť ...*

Postupnosti komplexných čísel.

Definition 132 *Zobrazenie* $f : \boldsymbol{N} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *nazývame postupnosťou komplexných čísel a označujeme symbolom* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Pre každé* $n \in \boldsymbol{N}$ *máme*

$$z_n = x_n + iy_n,$$

t.j. definícia postupnosti komplexných čísel je ekvivalentná s definíciou dvoch postupností reálnych čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definition 133 *Hovoríme, že postupnosť* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená, ak existuje reálne číslo* $M > 0$ *také, že*

$$|z_n| = |x_n + iy_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} < M, \forall n = 1, 2, \ldots$$

V opačnom prípade hovoríme, že postupnosť $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je neohraničená.*

Geometricky to znamená, že množina všetkých členov postupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ leží v kruhu so stredom v začiatku súradnicovej sústavy a s polomerom M.

Lemma 134 *Postupnosť komplexných čísel* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená vtedy a len vtedy ak sú obe reálne postupnosti* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ohraničené.*

Definition 135 *Nech* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť komplexných čísel. Komplexné číslo* $z_0 = x_0 + iy_0$ *sa nazýva limitou postupnosti* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ak* $\forall\ \varepsilon > 0$ *existuje* $N_0 \in \boldsymbol{N}$ *také, že pre všetky* $n > N_0$ *platí* $|z_n - z_0| < \varepsilon$. *Vtedy píšeme*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} z_n = z_0.$$

Theorem 136 *Ak* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má konečnú limitu, potom* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená.*

Theorem 137 *Platí:* $\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = z_0$ *vtedy a len vtedy ak* $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x_0$ *a* $\lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = y_0$.

Example 138 *Nech*

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{2n-1}{n} + i\left(1 - \frac{3}{n}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Nájdite $\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n$.

Solution 139 *Riešenie*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left[\frac{2n-1}{n}+i\left(1-\frac{3}{n}\right)\right] = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2n-1}{n}+i\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right) = 2+i.\square$$

Definition 140 *Nech $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel. Ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $N(\varepsilon) > 0$ také, že pre každé $n > N(\varepsilon)$ platí $|z_n| > \frac{1}{\varepsilon}$, potom hovoríme, že postupnosť $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje do nekonečna a píšeme*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = \infty.$$

Čitateľ ľahko ukáže platnosť vety: $\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = \infty \Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty}|z_n| = +\infty$.

Rady komplexných čísel.

Definition 141 *Nech $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel. Definujeme postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ čiastočných súčtov takto:*

$s_1 = z_1,$
$s_2 = z_1 + z_2,$
$s_3 = z_1 + z_2 + z_3,$
$\dots$
$s_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k.$

Definition 142 *Výraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$$

používame na označenie toho, že členy postupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ sčítavame. Každý takýto výraz nazývame radom komplexných čísel. Ak postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ má konečnú limitu

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} s_n = s$$

potom s nazývame súčtom radu a označujeme $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$, hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje. Ak postupnosť čiastočných súčtov nemá limitu, alebo konverguje k nekonečnu hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ diverguje.

Theorem 143 *Rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $z_n = x_n + iy_n$ konverguje vtedy a len vtedy ak konvergujú oba rady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.*

Lemma 144 *Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje, potom $\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = 0$.*

Definition 145 *Hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ je absolútne konvergentný ak rad*

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}|z_n|,$$

konverguje.

Pretože absolútna konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ znamená konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ s reálnymi nezápornými členmi, môžme použiť všetky známe kritériá konvergencie.

Example 146 *Zistite, či rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-in}{(2n+1)!}$ *konverguje alebo diverguje.*

Solution 147 *Platí*
$$\left|\frac{3-in}{(2n+1)!}\right| = \frac{\sqrt{9+n^2}}{(2n+1)!}$$
potom použitím d' Alembertovho kritéria máme:
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sqrt{9+(n+1)^2}\,(2n+1)!}{\sqrt{9+n^2}(2n+3)!} = 0 < 1$$
teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-in}{(2n+1)!}$ *je absolútne konvergentný.* $\square$

Theorem 148 *Rad* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$*, absolútne konverguje vtedy a len vtedy ak absolútne konvergujú oba rady* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$*.*

Funkcie komplexnej premennej.

Definition 149 *Funkciou komplexnej premennej* $f : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $w = f(z)$ *rozumieme pravidlo, ktoré každému prvku* $z \in A$ *priradí jednu (jednoznačná funkcia) alebo viac hodnôt* $w \in \boldsymbol{C}$ *(môže byť aj* ∞*) (mnohoznačná funkcia). Množinu* $A \subset \boldsymbol{C}$ *nazývame definičný obor funkcie* f*.*

Example 150 *Funkcia* $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $w = z^2$ *je jednoznačná funkcia,* $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $w = \sqrt{z}$*, ktorá každému* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *priradí dve hodnoty*
$\left\{w_1 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right), w_2 = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right)\right\}$

Možné interpretácie sú: ak napíšeme komplexné čísla $z, w \in \boldsymbol{C}$ v algebrickom tvare $z = x + iy$ a $w = u + iv$, potom môzeme písať:
$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$
kde
$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z), v(x,y) = \operatorname{Im} f(z),\ u, v : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}.$$
Ak $z = re^{i\varphi}$ a $w = u + iv$ dostaneme
$$w = f(z) = f(r,\varphi) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi).$$

$f(x+iy)$, $f(r,\varphi)$ je dvojica reálných funkcií teda vektorové pole. Funkciu $z \mapsto f(z)$ možno tiež chápať ako nejakú transformáciu roviny.

Example 151 *Nájdite reálnu a imaginárnu časť funkcie* $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $w = z^2$.

Solution 152 *Ak* $z = x + iy$ *a* $w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$*, potom*
$$w = z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy,$$
odkiaľ
$$u(x,y) = x^2 - y^2, v(x,y) = 2xy.\square$$

Limita funkcie komplexnej premennej.

Definition 153 *Nech* $f : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $w = f\,(z)$ *je funkcia komplexnej premennej. Nech* $z_0 \in \boldsymbol{C}$ *je hromadný bod množiny* A. *Ak pre každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *také, že pre každé* $z \in A$, $0 < |z - z_0| < \delta$ *máme* $|f(z) - a| < \varepsilon$ *hovoríme, že funkcia* $f(z)$ *má limitu* a *ak sa* z *blíži ku* z_0 *čo zapisujeme*

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = a.$$

Ak $a = b + ic$, $f(z) = f\,(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ a $z_0 = x_0 + iy_0$ potom platí nasledujúca veta:

Theorem 154 *Limita funkcie*

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = a = b + ic$$

vtedy a len vtedy ak

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = b \quad a \quad \lim_{(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = c.$$

Predchádzajúca veta implikuje nasledujúci dôsledok:

Lemma 155 *Ak* $\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = a$, *potom* $\lim_{z \longrightarrow z_0} |f(z)| = |a|$ *a ak* $a \neq 0, \infty$, *potom aj* $\lim_{z \longrightarrow z_0} \arg f(z) = \arg a$.

Vetu rozšíme prirodzeným spôsobom na nasledujúce limity:

Theorem 156 *Nech pre* $f, g : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *platí*

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = a_1, \ \lim_{z \longrightarrow z_0} g(z) = a_2.$$

Potom

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} (f \pm g)\,(z) = a_1 \pm a_2,$$

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} (fg)\,(z) = a_1 a_2,$$

$$ak\ g\,(z) \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ \lim_{z \longrightarrow z_0} \left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{a_1}{a_2}.$$

Definition 157 *Hovoríme, že*

$$\lim_{z \longrightarrow \infty} f(z) = a,\ a \neq \infty,$$

ak pre každé $\varepsilon > 0$ *existuje* $N(\varepsilon) > 0$, *také že* $|z| > N(\varepsilon) \Longrightarrow |f(z) - a| < \varepsilon$.

Definition 158 *Hovoríme, že*

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = \infty,$$

ak pre každé $N > 0$ *existuje* $\delta > 0$, *také že* $0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z)| > N$.

Spojitosť.

Nech funkcia $w = f(z)$ je definovaná na nejakom okolí $O(z_0)$ bodu z_0.

Definition 159 *Hovoríme, že funkcia $f : O(z_0) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je spojitá v bode z_0 ak*

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Theorem 160 *Funkcia komplexnej premennej $f : O(z_0) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ je spojitá v bode $z_0 = x_0 + iy_0$ vtedy a len vtedy ak sú obe funkcie $u : O(x_0, y_0) \left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $v : O(x_0, y_0) \left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ spojité v bode (x_0, y_0).*

Rady funkcií komplexnej premennej.

Rad

$$u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) + \ldots, \tag{1}$$

kde $u_k : A \longrightarrow \boldsymbol{C}$ sú funkcie komplexnej premennej sa nazýva rad funkcií komplexnej premennej. Pre pevnú hodnotu $z = z_0 \in A$ z (1) dostaneme rad komplexných čísel

$$u_1(z_0) + u_2(z_0) + \cdots + u_n(z_0) + \ldots \tag{2}$$

Ak je rad (2) konvergentný, potom bod $z = z_0$ nazývame bodom konvergencie radu (1). Množinu všetkých bodov konvegrencie nazývame obor konvergencie radu (1). Označme obor konvergencie K $(K \subset A)$. Ak označíme

$$s_n(z) = \sum_{k=1}^{n} u_k(z)$$

čiastočný súčet radu (1), potom v každom bode z oboru konvergencie radu (1) existuje

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} s_n(z) = f(z)$$

kde $f : K \longrightarrow \boldsymbol{C}$ nazývame súčtom radu (1). Nech $R_n(z)$ je zvyšok po n-tom čiastočnom súčte radu (1)

$$R_n(z) = f(z) - s_n(z).$$

Potom v každom bode z oboru konvergencie radu (1) máme

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} R_n(z) = 0.$$

Definition 161 *Nech je rad (1) konvergentný v každom bode $z \in K(\subset A)$, t.j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje číslo $N(\varepsilon, z)$ také, že $n > N \Longrightarrow |R_n(z)| < \varepsilon$. Potom hovoríme, že rad (1) bodovo konverguje ku f na množine K.*

Definition 162 *Hovoríme, že rad (1) rovnomerne konverguje k funkcii $f : K \longrightarrow \boldsymbol{C}, w = f(z)$ v oblasti $K \subset A$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje číslo $N(\varepsilon)$ také, že*

$$n > N \Longrightarrow |f(z) - s_n(z)| = |R_n(z)| < \varepsilon,$$

pre každé $z \in K$.

Rovnomernú konvergenciu radu (1) možno zistiť pomocou nasledujúcej postačujúcej podmienky:

Theorem 163 *(Weierstrassovo kritérium.) Ak*

$$|u_n(z)| \leq a_n,$$

kde $u_n : A(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, *pre každé* $z \in A$ *a rad s nezápornými členmi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentný, potom je rad (1) absolútne a rovnomerne konvergentný v oblasti* A.

Theorem 164 *Nech* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, *kde* $u_n : A(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, *je rovnomerne konvergentný rad v oblasti* A *a nech* $u_n(z)$ *sú spojité funkcie pre každé* $n = 1, 2, 3, \ldots$. *Potom súčet radu* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = f(z)$ *je funkcia spojitá v oblasti* A.

Mocninové rady.

Definition 165 *Rad tvaru*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{3}$$

kde $a, c_0, c_1, c_2, \ldots$ *sú dané pevné komplexné čísla a* $z \in \boldsymbol{C}$ *nazývame mocninový rad so stredom v bode* a.

Pretože (3) je zvláštnym prípadom radu (1), všetky výsledky platné pre rady funkcií komplexnej premennej zostávajú v platnosti aj pre mocninové rady.

Označme:

- kruh so stredom v bode a s polomerom r

$$K(a, R) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z-a| < r\},$$

- uzavretý kruh so stredom v bode a s polomerom r

$$\overline{K(a, R)} = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z-a| \leq r\}.$$

Theorem 166 *Ak mocninový rad* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *konverguje v bode* $z = z_0 \neq a$, *potom tento rad absolútne konverguje v kruhu* $K(a, |z_0 - a|)$. *V každom uzavretom kruhu* $\overline{K(a, r)}$, $r < |z_0 - a|$ *rad* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *rovnomerne konverguje.*

Ak (3) diverguje v bode $z = z_1$, potom diverguje na množine

$$\boldsymbol{C} \setminus \overline{K(a, |z_1 - a|)} = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z-a| > |z_1 - a|\}$$

Definition 167 *Nech je mocninový rad* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *konvergentný v* $K(a, R)$ *a divergentný v* $\boldsymbol{C} \setminus \overline{K(a, R)}$, *potom množinu* $K(a, R)$ *nazývame kruh konvergencie a* R *polomer konvergencie radu* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$.

Kruh a polomer konvergencie radu (3) môžme určiť nasledovne: použijeme vhodné kritérium konvergencie (napr. D' Allembertovo alebo Cauchyho) pre rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \, |z-a|^n, \tag{4}$$

ktorý je radom s nezápornými člemni a zároveň aj majorantným radom k radu (3). Ak rad (4) konverguje pre nejaké $z_0 \in \boldsymbol{C}$, potom v kruhu $K(a, |z_0 - a|)$ konverguje aj rad (3).

Example 168 *Nájdite kruh konvergencie radu* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^3}{n} z^n$.

Solution 169 *Použijeme D' Allembertovo kritérium. Máme* $a_n = \left| \frac{(-1)^3}{n} \right| |z|^n$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^3}{n+1} z^{n+1}}{\frac{(-1)^3}{n} z^n} \right| = |z| < 1,$$

teda rad je absolútne konvergentný v kruhu $K(0,1)$ *a rovnomerne konvergentný v kruhu* $K(0,\rho)$, *kde* $\rho < 1$.$\square$

Lemma 170 *Mocninové rady* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$ *konvergujú v tom istom kruhu konvergencie. (t.j. majú taký istý polomer konvergencie.)*

Example 171 *Nájdite kruh konvergencie radu* $\sum_{n=0}^{\infty} n! (z-a)^n$.

Solution 172 *Máme* $a_n = |n!(z-a)^n|$.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! (z-a)^{n+1}}{n! (z-a)^n} \right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} (n+1) |z-a| = \begin{cases} 0 & ak \quad z = a \\ \infty & ak \quad z \neq a \end{cases}.$$

teda rad $\sum_{n=0}^{\infty} n! (z-a)^n$ *konverguje iba v bode* a. $\square$

Example 173 *Nájdite kruh konvergencie radu* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Solution 174 *Máme* $a_n = \left| \frac{z^n}{n!} \right|$.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = |z| \lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{1}{(n+1)!} \right| = 0 < 1,$$

ak $z \in \boldsymbol{C}$, *teda rad* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *absolútne konverguje v každom bode* $z \in \boldsymbol{C}$. $\square$

Example 175 *Nájdite kruh konvergencie radu* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} (z-1)^n$.

Solution 176 *Máme* $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} |z-1|^n$.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} |z-1|^n} = |z-1| \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= |z-1| e < 1, \Longrightarrow |z-1| < \frac{1}{e},$$

teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} (z-1)^n$ *absolútne konverguje na kruhu* $K\left(1, \frac{1}{e}\right)$. $\square$

Example 177 *Nájdite kruh konvergencie radu* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Solution 178 *Použijeme podielové kritérium konvergencie nekonečného radu. Máme*

$$a_n = \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{\frac{z^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| = |z|^2 \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}\right| = 0 < 1, \forall z \in \boldsymbol{C}$$

teda rad $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *absolútne konverguje v každom bode komplexnej roviny.*
□

Chovanie radu (3) na kružnici

$$S(a,R) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z-a| = R\}$$

je potrebné skúmať v každom jej bode osobitne.

Veta 163 implikuje, že rad (3) rovnomerne konverguje v každom uzavretom kruhu $\overline{K(a,r)}$, kde $r \in (0,R)$ a R je polomer konvergencie radu (3).

Skúmajme rady so zápornými mocninami $(z-a)$.

$$\frac{b_1}{(z-a)} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{b_k}{(z-a)^k} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-a)^n} \tag{5}$$

Ak zavedieme substitúciu

$$\frac{1}{z-a} = \eta \tag{6}$$

dostaneme rad

$$b_1\eta + b_2\eta^2 + \cdots + b_k\eta^k + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\eta^n. \tag{7}$$

Nech polomer konvergencie radu (7) je ρ t.j. rad (7) konverguje v $K(0,\rho)$ a diverguje na množine $\boldsymbol{C}\setminus\overline{K(0,\rho)}$. Potom substitúcia (6) implikuje, že rad (5) konverguje na $\boldsymbol{C}\setminus\overline{K\left(a,\frac{1}{\rho}\right)}$ a diverguje v $K\left(a,\frac{1}{\rho}\right)$.

Budeme teraz uvažovať rad

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n = \cdots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + \\ &+ c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \ldots\end{aligned} \tag{8}$$

Rad (8), ktorý pozostáva z dvoch radov je konvergentný vtedy a len vtedy ak oba rady t.j.

$$c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{9}$$

$$\cdots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \tag{10}$$

konvergujú. Ak rad (9) konverguje v nejakom kruhu $K(a,R)$ a (10) je konvergentný v $\boldsymbol{C}\setminus\overline{K(a,r)}$. Ak platí $r < R$, potom oba rady konvergujú v prstenci pozostávajúcom z dvoch koncentrických kružníc so stredom v bode $z = a$ a s polomermi r, R, ktorý nazývame medzikružie konvergencie a označujeme $P(a,r,R)$, kde

$$P(a,r,R) = \{z \in \boldsymbol{C};\ r < |z-a| < R\},$$

kde $0 \le r < R \le \infty$.

Example 179 *Nájdite obor konvergencie radu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+2)(n+3)} \left(\frac{1+2i}{z-i} \right)^n . \tag{11}$$

Solution 180 *Riešenie Nech* $\frac{1}{z-i} = \eta$. *Potom dostaneme rad*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+2)(n+3)} (1+2i)^n \, \eta^n . \tag{12}$$

pre ktorý dostaneme: $a_n = |\eta|^n |1+2i|^n \frac{(n+1)}{(n+2)(n+3)}$,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |\eta| \, |1+2i| \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{(n+2)^2(n+3)}{(n+1)(n+3)(n+4)} = |\eta|\sqrt{5} < 1,$$

teda kruh konvergencie radu (12) je $K\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ *a rad (11) konverguje na množine* $\boldsymbol{C} \setminus \overline{K\left(i, \sqrt{5}\right)}$. $\square$

Cvičenia.

1.

V úlohách 1 - 5 zistite, aká množina je určená daným vzťahom. Jej obraz načrtnite v komplexnej rovine.

2. $|z - z_0| = r,\ r > 0,\ z_0$ je pevný bod. [Kružnica so stredom z_0 a polomerom r]

3. $|z + i| + |z - i| < 4.$ $\left[\text{Vnútro elipsy } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1\right]$

4. $|z + 2| > 1.$ [Vonkajšok kružnice so stredom $S = (-2; 0)$ a polomerom $r = 1$]

5. $|z - 2| < |z|$. [Polrovina $\operatorname{Re} z > 1$.]

6. $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = 2.$ $\left[z \neq 0,\right.$ kružnica so stredom $S = \left(0, -\frac{1}{4}\right)$ a polomerom $\left. r = \frac{1}{4}\right]$

7. Zistite, či sú nasledujúce množiny oblasti. (Načrtnite ich v komplexnej rovine):

   (a) $|z| < 4,$ [áno]
   (b) $1 \leq |z - 1| \leq 3,$ [nie]
   (c) $\frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4},$ [nie]
   (d) $0 < |z - 2| < 3,$ [áno]
   (e) $\operatorname{Re} z < 2.$ [áno]

8. Nájdite limity postupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak

   (a) $z_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n + \frac{n+1}{3n-1} i,$ $\left[\sqrt[3]{e} + \frac{1}{3} i\right]$
   (b) $z_n = 2n \sin \frac{1}{n} + \frac{4n+1}{5n-1} i,$ $\left[2 + \frac{4}{5} i\right]$
   (c) $z_n = n \operatorname{tg} \frac{1}{2n} + \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n i,$ $\left[\frac{1}{2} + i e^4\right]$
   (d) $z_n = \sin \frac{\pi}{2^n} + i \frac{n^2 - 3}{5n3 + 1},$ [0]
   (e) $z_n = \frac{1}{n} + i \cos(n\pi)$, $[\lim_{n\to\infty} z_n \nexists]$
   (f) $z_n = \sqrt{n} + i \operatorname{arctg}(n),$ $[\lim_{n\to\infty} z_n = \infty]$

9. Zistite, či rady $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergujú, alebo divergujú

   (a) $z_n = \frac{\sin n + i \cos n}{n^3},$ [absolútne konverguje]
   (b) $z_n = \frac{1}{n(n+1)} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}} i,$ [absolútne konverguje]
   (c) $z_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \frac{n}{3^n} i,$
   $\left[\text{diverguje, návod rad } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \text{ nespĺňa nutnú podmienku konvergencie}\right]$
   (d) $z_n = \sin \frac{\pi}{3^n} + i \frac{n^2+1}{3^n}$ [rad(abs.)konverguje]

10. Vyjadrite reálnu a imaginárnu časť funkcie:

(a) $f(z) = z^2 - z + 1$,
$[\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 - x + 1, \operatorname{Im} f(z) = 2xy - y]$

(b) $f(z) = \frac{1}{z}$,
$\left[\operatorname{Re} f(z) = \frac{x}{x^2+y^2}, \operatorname{Im} f(z) = -\frac{y}{x^2+y^2}\right]$

(c) $f(z) = |z| + \operatorname{Re} z$.
$\left[\operatorname{Re} f(z) = \sqrt{x^2+y^2} + x, \operatorname{Im} f(z) = 0\right]$.

V úlohách 10 a 11 nájdite definičný obor funkcie f :

10. $f(z) = \frac{3iz-12z+i}{iz^2+1-i}$. $\left[D(f) = \boldsymbol{C} \setminus \left\{\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{i\frac{9\pi}{8}}\right\}\right]$

11. $f(z) = \frac{\overline{z}}{(z^3-2i)(|z|-3)}$.
$\left[D(f) = \boldsymbol{C} \setminus \left(\{z \in \boldsymbol{C};\ |z| = 3\} \cup \left\{\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, -\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, -i\sqrt[3]{2}\right\}\right)\right]$

V úlohách 12 - 14 vypočítajte funkčnú hodnotu funkcie f v čísle z_0 :

12. $f(z) = \frac{\overline{z}}{(z^3-2i)(|z|-3)}$, $z_0 = i$. $\left[-\frac{1}{6}\right]$

13. $f(z) = z + \overline{z}^2 - \operatorname{Re}(z\overline{z}) - \operatorname{Im}(z\overline{z})$, $z_0 = 8 - 6i$. $[-64 + 90i]$

14. $f(z) = \arg z$

(a) $z_0 = 8 - 6i$. $\left[-\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)\right]$

(b) $z_0 = -1 + 2i$. $[\pi - \operatorname{arctg} 2]$

(c) $z_0 = -1 - i$. $\left[-\frac{3\pi}{4}\right]$

V úlohách 15 - 20 vypočítajte limity:

15. $\lim_{z \longrightarrow 2i} \frac{z+3}{z^2+2iz}$. $\left[-\frac{3+2i}{8}\right]$

16. $\lim_{z \longrightarrow i} \frac{z^2-iz+z-i}{3iz^2+3z}$. $\left[-\frac{1+i}{3}\right]$

17. $\lim_{z \longrightarrow 2+i} \frac{3iz-6i+3}{2iz^2-4iz+2z}$. $\left[\frac{6-3i}{10}\right]$

18. $\lim_{z \longrightarrow i} \frac{z^2+(2-i)z-2i}{z^2+1}$. $\left[\frac{1}{2} - i\right]$

19. $\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{z^3}{|z|^2}$. $[0]$

20. $\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{z^2}{|z|^2}$. [Návod:vyjadrite reálnu a imaginárnu časť funkcie, potom ukážte, že limita neexistuje.]

V úlohách 21 - 23 vyšetrite spojitosť funkcie f :

21. $f(z) = \frac{1}{1-z}$. [Spojitá v $\boldsymbol{C} \setminus \{1\}$]

22. $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. [Spojitá v $\boldsymbol{C} \setminus \{-i, i\}$]

23. $f(z) = \begin{cases} \frac{\mathrm{Re}\, z}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$. [Spojitá v $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$]

V úlohách 24 - 25 zistite, či je možné dodefinovať funkciu f v bode z_0 tak, aby bola spojitá v tomto bode:

24. $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0, 1+i\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{z^3 - z^2 - iz^2 + iz - i + 1}{z^2 - z - iz}$, $z_0 = 1 + i$.

    $\left[\text{Je možné, ak } \; f(1+i) = \frac{3}{2}(1+i)\right]$

25. $f : \boldsymbol{C} \setminus \{4+i\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{z^2 - (3+2i)z - 6 + 7i}{z - 4 - i}$, $z_0 = 4 + i$.

    arcsin [Nie je možné, lebo $f \lim_{z \longrightarrow 4+i} f(z) = \infty$]

Elementárne funkcie komplexnej premennej.

V tejto časti budeme definovať elementárne funkcie komplexnej premennej tak aby boli rozšírením elementárnych funkcií reálnej premennej. Ak by sme v definíciách elementárnych reálnych funkcií zamenili iba x za z, predošlé definície by stratili zmysel. Preto mocninovú, exponenciálnu a trigonometrické funkcie v komplexnej premennej definujeme inak:

Mocninová funkcia s prirodzeným exponentom.

Definition 181 *Nech $n \in \boldsymbol{N}$. Funkciu $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = z^n$ nazývame mocninovou funkciou komplexnej premennej s prirodzeným exponentom.*

Mocninová funkcia je pre $n = 1$ identita t.j. bijektívna funkcia. Ukážeme, že pre $n > 2$ mocninová funkcia nie je injektívna funkcia a nájdeme množinu, na ktorej bude funkcia $f(z) = z^n$ injektívnou funkciou. Nech $z_1 \neq z_2$

$$z_1 = |z_1| (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{a} \quad z_2 = |z_2| (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

potom

$$z_1^n = |z_1|^n (\cos n\varphi_1 + i\sin n\varphi_1) \quad \text{a} \quad z_2 = |z_2|^n (\cos n\varphi_2 + i\sin n\varphi_2).$$

Nech by

$$z_1^n = z_2^n,$$

platí to vtedy a len vtedy, ak

$$|z_1|^n = |z_2|^n \quad \text{a} \quad n\varphi_1 = n\varphi_2 + 2l\pi,\ l \in \boldsymbol{Z}$$

$l = mn+k$, kde $m \in \boldsymbol{Z}$ a $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Tak implikácia $z_1 \neq z_2 \Longrightarrow z_1^n = z_2^n$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak

$$|z_1| = |z_2| \quad \text{a} \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{2k\pi}{n} + 2m\pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \quad \text{a} \quad m \in \boldsymbol{Z}.$$

Tak sme ukázali, že $f(z) = z^n$ nie je injektívna funkcia. Z predošlých úvah vidíme, že $f(z) = z^n$ bude injektívnou funkciou na každej množine, ktorú dostaneme tak, že $\boldsymbol{C}$ rozdelíme na výseky s vrcholom v bode 0, ramená ktorých zvierajú uhly $\frac{2\pi}{n}$. Jednou z týchto množín je napríklad množina:

$$V_0 = \left\{ z \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\};\ -\frac{\pi}{n} < \arg z \leq \frac{\pi}{n} \right\} \cup \{0\}.$$

Nech $w \in \boldsymbol{C}$ je ľubovoľné číslo. Ak $w = 0$, potom mu odpovedá číslo $z = 0 \in V_0$. Ak $w \neq 0$ potom z rovnice $z^n = w$ dostávame čísla

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \left(\cos\frac{\arg w + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg w + 2k\pi}{n} \right), \quad \text{pre} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

a pre $k = 0$ potom máme

$$z_0 = \sqrt[n]{|w|} \left(\cos\frac{\arg w}{n} + i\sin\frac{\arg w}{n} \right).$$

Pretože je $w \neq 0$, tak $-\pi < \arg w \leq \pi$ t.j. $-\frac{\pi}{n} < \frac{\arg w}{n} \leq \frac{\pi}{n}$, t.j. $z_0 \in V_0$. Ukázali sme, že funkcia $f_0 : V_0 \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f_0(z) = z^n$ je bijekcia a f_0 má inverznú funkciu.

Hlavná vetva n-tej odmocniny.

Definition 182 *Nech* $n \geq 2$ *je prirodzené číslo. Potom inverznú funkciu k funkcii* $f_0 : V_0 \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f_0(z) = z^n$ *nazývame hlavnou vetvou n-tej odmocniny a označujeme* $f_0{}^{-1}(z) = \left(\sqrt[n]{z}\right)_0,\ z \in \boldsymbol{C}$.

Remark 183 *Niektorí autori množinu všetkých riešení rovnice* $w^n = z$ *označujú symbolom*

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \right\}$$

a nazývajú ju n-tou odmocninou z komplexného čísla z, *ktorú uvažujú ako viacznačnú funkciu. My budeme túto množinu nazývať množinou všetkých riešení rovnice* $w^n = z$.

Definition 184 *Funkciu*

$$P_n : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ P_n(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_n,$$

kde $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \boldsymbol{C}$ *sú komplexné čísla a* $n \in \mathbf{N}$ *nazývame polynóm n-tého stupňa komplexnej premennej* z.

Podiel dvoch polynómov nazývame racionálna funkcia.

Exponenciálna funkcia, funkcie sínus a kosínus.

Definition 185 *Definujeme funkcie* $\exp, \cos, \sin : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$,

$$\exp z = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{1}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{2}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{3}$$

Rady (1), (2), (3) konvergujú absolútne v $K(0, \infty) = \boldsymbol{C}$. Žiadame čitateľa aby sa o tom presvedčil. Pozri príklad 170. Ak si uvedomíme, že pre absolútne konvergentné rady ľubovoľné prerovnanie takéhoto radu má ten istý súčet skúmaním e^{iz} dostaneme formulu

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{i^2 z^2}{2!} + \cdots + \frac{i^n z^n}{n!} + \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \right) +$$

$$+ i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \right) = \cos z + i \sin z,$$

ktorú nazývame Eulerova formula.

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{4}$$

Ak zameníme z za $-z$ dostaneme

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \tag{5}$$

a nakoniec použitím (4) a (5) dostávame

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{6}$$

Uvedieme niektoré známe identity (bez dôkazu):

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \boldsymbol{C}$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2.$$

Vlastnosti exponenciálnej funkcie.

Ukážeme, že $e^z \neq 0$ pre každé $z \in \boldsymbol{C}$, $z = x + iy$, $x, y \in \boldsymbol{R}$. Platí

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Nech by existovalo $z \in \boldsymbol{C}$ také, že $e^z = 0$. To znamená:

$$e^x \cos y = 0 \wedge e^x \sin y = 0$$

a pretože $e^x \neq 0$, tak

$$\cos y = 0 \wedge \sin y = 0,$$

odkiaľ plynie, že také reálne číslo y neexistuje. To znamená, že obor hodnôt je $R(\exp) = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$.

Ukážeme za akých predpokladov je funkcia exp bijekcia.

Exponenciálna funkcia nie je injekcia, má periodu $2\pi i$:

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^z, \quad \text{pre každé} \quad z \in \boldsymbol{C}.$$

T.j. definičný obor exponenciálnej funkcie $D(\exp) = \boldsymbol{C}$ môžme rozdeliť na „pásy“

$$P_k = \{z \in \boldsymbol{C};\ (2k-1)\pi < \operatorname{Im} z \leq (2k+1)\pi\}, \ k \in \boldsymbol{Z} \tag{7}$$

pre každé $k \in \boldsymbol{Z}$ je funkcia

$$\exp_k : P_k \longrightarrow \boldsymbol{C} \setminus \{0\}, \ \exp_k(z) = e^z \tag{8}$$

injekcia.

Nech $z = x + iy \in P_k$, $w = u + iv \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ a $e^z = w$. Tak dostaneme

$$e^x \cos y = u \wedge e^x \sin y = v$$

odkiaľ

$$x = \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2),\ y = \operatorname{arccotg}\frac{u}{v},\ \text{ ak }\ v \neq 0$$

alebo

$$x = \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2),\ y = \operatorname{arctg}\frac{v}{u},\ \text{ ak }\ u \neq 0$$

t.j.

$$x = \ln|w|\,,\ y = \arg w,\ \text{ ak }\ w \neq 0 \tag{9}$$

Teda $\exp_k$ je surjekcia.

To znamená, že pre každé $k \in \boldsymbol{Z}$ je funkcia

$$\exp_k : P_k \longrightarrow \boldsymbol{C} \setminus \{0\}\,,\ \exp_k(z) = e^z \tag{10}$$

bijekcia.

Logaritmická funkcia.

Definition 186 *Inverznú funkciu k bijekcii*

$$\exp_0 : P_0 \longrightarrow \boldsymbol{C} \setminus \{0\}\,,\ \exp_0(z) = e^z$$

nazývame hlavnou vetvou logaritmu a označujeme

$$\ln : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow P_0, \ln z = w \Leftrightarrow z = \exp_0(w) = e^w.$$

Remark 187 *Ak*

$$\ln z = w \Longleftrightarrow w = \ln z = \ln|z| + i\arg z,\ \forall z \in \boldsymbol{C}\setminus\{0\} \tag{11}$$

Logaritmická funkcia sa dá definovať ako inverzia ku každej bijekcii (10). Niektorí autori namiesto hlavnej vetvy logaritmu definujú viacznačnú funkciu

$$Ln\,(z) = \{\ln z + 2k\pi i, k \in \boldsymbol{Z}\}\,, \tag{12}$$

ktorá je množinou všetkých riešení rovnice $e^z = w$. Každá z týchto hodnôt leží na priamke $u = \ln|z|$ a líši sa od ostatných hodnôt iba aditívnou konštantou $2k\pi i$.

Example 188 *Nájdite* $\ln(-3)$.

Solution 189 *Pretože* $|-3| = 3$ *a* $\arg(-3) = \pi$, *potom*

$$\ln(-3) = \ln 3 + \pi i.$$

Ak by sme hľadali množinu všetkých riešení rovnice $e^z = -3$, potom dostaneme

$$Ln(-3) = \{\ln 3 + i(2k+1)\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}\,.\square$$

Example 190 *Nájdite* $\ln(1+i)$ *a množinu všetkých riešení rovnice* $e^z = 1+i$.

Solution 191 *Pretože* $|1+i| = \sqrt{2}$ *a* $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$, *potom*

$$\ln(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$$

a

$$Ln(1+i) = \left\{\frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right\}.\square$$

Vlastnosti funkcií sínus a kosínus.
Podobným spôsobom ako pre exponenciálnu funkciu sa dá ukázať, že platí

$$\sin z = 0 \Longleftrightarrow z = k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z} \tag{13}$$

$$\cos z = 0 \Longleftrightarrow z = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \boldsymbol{Z} \tag{14}$$

t.j. ako v reálnej analýze. Ukážeme, že pre každé komplexné číslo $z = x + iy$, $x, y \in \boldsymbol{R}$, $y \neq 0$ platí

$$\sin z \neq 0 \wedge \cos z \neq 0 \tag{15}$$

Máme

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy)$$

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)$$

Pretože

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} \neq 0,\ \sin(iy) = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} \neq 0 \tag{16}$$

a $\sin x$ a $\cos x$ nemôžu byť rovné nule naraz pre to isté číslo $x \in \boldsymbol{R}$ tak platí (15).

Funkcie $\sin z$ a $\cos z$ sú periodické s periodou 2π. Chceme zistiť, či pre $z_1 \neq z_2$ je

$$\sin z_1 = \sin z_2,\ \cos z_1 = \cos z_2$$

Ak platí prvá z rovností, potom

$$\sin z_1 = \sin z_2 \Longrightarrow \sin z_1 - \sin z_2 = 0 \Longrightarrow 2\sin\frac{z_1 - z_2}{2}\cos\frac{z_1 + z_2}{2} = 0$$

t.j.

$$\sin z_1 = \sin z_2 \Longleftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi \ \text{ alebo } \ z_1 + z_2 = (2k+1)\pi$$

podobne sa dá ukázať, že

$$\cos z_1 = \cos z_2 \Longleftrightarrow z_1 - z_2 = (2k+1)\pi \ \text{ alebo } \ z_1 + z_2 = (2k+1)\pi$$

Teda funkcie sin a cos nie sú injektívne funkcie. Sformulujume vetu:

Theorem 192 *Nech*

$$Q_k = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ -\frac{\pi}{2} + k\pi < \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\},\ k \in \boldsymbol{Z} \tag{17}$$

$$S_k = \{z \in \boldsymbol{C};\ k\pi < \operatorname{Re} z \leq (k+1)\pi\},\ k \in \boldsymbol{Z} \tag{18}$$

potom zúžené funkcie:

$$\sin|_{Q_k} : Q_k \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \sin|_{Q_k}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{19}$$

$$\cos|_{S_k} : S_k \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \cos|_{S_k}(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{20}$$

sú bijekcie pre každé $k \in \boldsymbol{Z}$.

Podobne ako pre reálne premenné môžme definovať ostatné trigonometrické funkcie. My sa v krátkosti zmienime o funkciách tg a cotg.

$$\begin{array}{l} \operatorname{tg}: \boldsymbol{C} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}\right\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \\ \operatorname{cotg}: \boldsymbol{C} \setminus \{k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\} \longrightarrow \boldsymbol{C}, \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\operatorname{tg} z} \end{array} \tag{21}$$

Použitím vzťahov (6) a (21) dostaneme

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,\ \operatorname{tg} z \operatorname{cotg} z = 1.$$

Podobne ako pre funkcie sin a cos sa dá ukázať:

$$\operatorname{tg} z = 0 \Longleftrightarrow z = k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}, \operatorname{cotg} z = 0 \Longleftrightarrow z = (2k+1)\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(z+\pi), \operatorname{cotg} z = \operatorname{cotg}(z+\pi)$$

$$\operatorname{tg} z_1 = \operatorname{tg} z_2 \Longleftrightarrow z_1 = z_2 + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

$$\operatorname{cotg} z_1 = \operatorname{cotg} z_2 \Longleftrightarrow z_1 = z_2 + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

Ak označíme

$$Q_k^0 = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ -\frac{\pi}{2} + k\pi < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} + k\pi\right\},\ k \in \boldsymbol{Z}$$

$$S_k^0 = \{z \in \boldsymbol{C};\ k\pi < \operatorname{Re} z < (k+1)\pi\},\ k \in \boldsymbol{Z}$$

potom podobne ako vo vete 189 môžme dokázať, že funkcie

$$\operatorname{tg}|_{Q_k^0} : Q_k^0 \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \operatorname{tg}|_{Q_k^0}(z) = \frac{\sin z}{\cos z},$$

$$\operatorname{cotg}|_{S_k^0} : S_k^0 \longrightarrow \boldsymbol{C}, \operatorname{cotg}|_{S_k^0}(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$$

sú bijekcie pre každé $k \in \boldsymbol{Z}$.

Hyperbolické funkcie.
Definujeme funkcie:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

pre ktoré platí

$$\cos(iz) = \frac{e^{iiz} + e^{-iiz}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z,$$

$$\sin(iz) = \frac{e^{iiz} - e^{-iiz}}{2i} = i\frac{e^z - e^{-z}}{2} = i \sinh z,$$

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z,$$

$$\sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \sin z.$$

Inverzné funkcie k trigonometrickým a hyperbolickým funkciám.

Inverzné funkcie k trigonometrickým a hyperbolickým funkciám komplexnej premennej sú definované podľa tých istých pravidiel ako odpovedajúce inverzné funkcie k trigonometrickým a hyperbolickým funkciám pre reálnu premennú. Nebudeme sa im venovať podrobnejšie. Tak dostaneme:

- bijekcia $\sin|_{Q_0}$ má inverznú funkciu

$$\arcsin : \boldsymbol{C} \longrightarrow Q_0 = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2}\right\},\ \arcsin z = w \Longleftrightarrow z = \sin w,$$

- bijekcia $\cos|_{S_0}$ má inverznú funkciu

$$\arccos : \boldsymbol{C} \longrightarrow S_0 = \{z \in \boldsymbol{C};\ 0 < \operatorname{Re} z \leq \pi\},\ \arccos z = w \Longleftrightarrow z = \cos w,$$

- bijekcia $\operatorname{tg}|_{Q_0^0}$ má inverznú funkciu

$$\operatorname{arctg} : \boldsymbol{C} \longrightarrow Q_0^0 = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}\right\},\ \operatorname{arctg} z = w \Longleftrightarrow z = \operatorname{tg} w,$$

- bijekcia $\operatorname{cotg}|_{S_0^0}$ má inverznú funkciu

$$\operatorname{arccotg} : \boldsymbol{C} \longrightarrow S_0^0 = \{z \in \boldsymbol{C}; 0 < \operatorname{Re} z < \pi\},\ \operatorname{arccotg} z = w \Longleftrightarrow z = \operatorname{cotg} w.$$

Pre tieto funkcie dostaneme

$$\arcsin z = -i \ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), \quad \text{pre každé } \ z \in \boldsymbol{C},$$

$$\arccos z = -i \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \quad \text{pre každé } \ z \in \boldsymbol{C},$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{i}{2} \ln \frac{i + z}{i - z}, \quad \text{pre každé } \ z \in \boldsymbol{C},$$

$$\operatorname{arccotg} z = \frac{i}{2} \ln \frac{z - i}{z + i}, \quad \text{pre každé } \ z \in \boldsymbol{C}.$$

Mocninová funkcia so všeobecným exponentom.

Definition 193 *Nech* $a, z \neq 0$ *sú komplexné čísla. Funkciu* $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \exp_0 (a \ln z)$ *nazývame hlavná vetva (hodnota) mocniny so všeobecným exponentom.*

Example 194 *Nájdite* $1^{\sqrt{2}}$.

Solution 195 *Máme*

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln 1} = e^0 = 1.\square$$

Example 196 *Nájdite* 2^{1-i}.

Solution 197 *Máme*

$$2^{1-i} = e^{(1-i)\ln 2} = 2(\cos(\ln 2) - i \sin(\ln 2)).\square$$

Cvičenia.

1. Vyjadrite reálnu a imaginárnu časť funkcie:

   (a) $f(z) = e^{z^2}$,
   $\left[\operatorname{Re} f(z) = e^{x^2-y^2}\cos 2xy, \operatorname{Im} f(z) = e^{x^2-y^2}\sin 2xy\right]$

   (b) $f(z) = z^2 \sin z$,
   $\left[\begin{array}{c} \operatorname{Re} f(z) = (x^2-y^2)\sin x\cosh y - 2xy\cos x\sinh y, \\ \operatorname{Im} f(z) = (2xy\sin x\cosh y + (x^2-y^2)\cos x\sinh y). \end{array}\right]$

   (c) $f(z) = \operatorname{tg} z$,
   $\left[\begin{array}{c} \operatorname{Re} f(z) = \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x\cosh^2 y+\sin^2 x\sinh^2 y}, \\ \operatorname{Im} f(z) = \frac{\sinh y\cosh y}{\cos^2 x\cosh^2 y+\sin^2 x\sinh^2 y} \end{array}\right]$

2. Nájdite obor konvergencie mocninového radu:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$. $[K(0,1) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < 1\}]$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$. [konverguje len v strede $a = 0$]
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$. $[K(0,e) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < e\}]$
   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n-1}}{1+in} z^n$. $[K(0,1) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < 1\}]$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$. $[K(0,2) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < 2\}]$
   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{2n}$. $\left[K\left(0,\sqrt{2}\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < \sqrt{2}\right\}\right]$
   (g) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$. $\left[K\left(0,\frac{1}{e}\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < \frac{1}{e}\right\}\right]$
   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{2n}} (z-1+i)^n$.
   $\left[K\left(1-i,\frac{1}{3}\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ |z-1+i| < \frac{1}{3}\right\}\right]$
   (i) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2} (z-2i)^n$.
   $[K(2i,e^2) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z-2i| < e^2\}]$
   (j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+in}{2^n} (z+i)^n$. $[K(-i,2) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z+i| < 2\}]$
   (k) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{5}\right)^n$ $[K(1,5) = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-1| < 5\}]$
   (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2i)^n}{(n+1)(n+3)} (z+3i)^n$,
   $\left[K\left(-3i,\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C} : |z+3i| < \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}\right]$
   (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} \left(\frac{z-1+i}{1-3i}\right)^n$,
   $\left[K\left(1-i,\sqrt{10}\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C} : |z-1+i| < \sqrt{10}\right\}\right]$
   (n) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{5}\right)^n$ $[K(1,5) = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-1| < 5\}]$

3. Vypočítajte funkčné hodnoty:

   (a) $\ln(-1)$, $[i\pi]$
   (b) $\ln(-i)$, $\left[-\frac{1}{2}i\pi\right]$
   (c) $\ln\left(1-\sqrt{3}i\right)$. $\left[\frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{3}i\pi\right]$

(d) $\ln(-3)$ $[\ln 3 + i\pi]$

(e) $\ln(5i)$ $\left[\ln 5 + i\frac{\pi}{2}\right]$

(f) $\ln(2)$ $[\ln 2]$

(g) $\ln(e)$ $[1]$

(h) $\ln(2+2i)$ $\left[\ln\left(\sqrt{8}\right) + i\frac{\pi}{4}\right]$

(i) $\ln(-2+2i)$ $\left[\ln\left(\sqrt{8}\right) + i\frac{3\pi}{4}\right]$

(j) $\ln(-2-2i)$ $\left[\ln\left(\sqrt{8}\right) + i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

(k) $\ln(2-2i)$ $\left[\ln\left(\sqrt{8}\right) - i\frac{\pi}{4}\right]$

(l) $\ln(3+4i)$ $\left[\ln 5 + i \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right]$

(m) $\ln(-3-4i)$ $\left[\ln 5 + i\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) - \pi\right)\right]$

(n) $\ln(3-4i)$ $\left[\ln 5 - i \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right]$

(o) $\ln(1-i)$ $\left[\frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4}\right]$

(p) $\ln(-\sqrt{3}-i)$ $\left[\ln 2 - i\frac{5\pi}{6}\right]$

(q) $\ln(1-i\sqrt{3})$ $\left[\ln 2 - i\frac{\pi}{3}\right]$

(r) $\ln(-8+15i)$ $\left[\ln 17 + i\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{15}{8}\right)\right]$

(s) $\ln\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$ $\left[i\frac{\pi}{4}\right]$

(t) $\ln\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$ $\left[\ln\sqrt{3} + i\frac{\pi}{6}\right]$

4. Nájdite všetky riešenia z rovníc:

(a) $e^z = -1$, $[\{i\pi(1+2k), k \in \boldsymbol{Z}\}]$

(b) $e^z = -i$, $\left[\left\{i\pi\left(-\frac{1}{2}+2k\right), k \in \boldsymbol{Z}\right\}\right]$

(c) $e^z = 1-\sqrt{3}i$. $\left[\left\{\frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{3}i\pi + 2k\pi i, k \in \boldsymbol{Z}\right\}\right]$

5. Vypočítajte hodnoty:

(a) $e^{2+i\frac{\pi}{2}}$, $[ie^2]$

(b) e^{2+i}, $[e^2\cos 1 + ie^2\sin 1]$

(c) i^i. $\left[e^{-\frac{1}{2}\pi}\right]$

(d) $(-3i)^{2i}$ $[e^{\pi}[\cos(\ln 9) + i\sin(\ln 9)]]$

(e) i^{1+i} $\left[ie^{-\frac{\pi}{2}}\right]$

(f) $i^{\frac{3}{4}}$ $\left[\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right]$

(g) $(1-i)^{2+i}$ $\left[2e^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)\right) - i\cos\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)\right)\right]$

(h) $(1+i)^{\frac{1}{2}}$ $\left[\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\right]$

(i) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{2-i}$ $\left[4e^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \ln 2\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \ln 2\right)\right)\right]$

6. Vypočítajte hodnoty:

(a) $\sin i$, $[i \sinh 1]$

(b) $\cos(1-i)$. $[\cos 1 \cosh 1 + i \sin 1 \sinh 1]$

(c) $\sin(2-3i)$

$$\left[\frac{\sin 2\left(e^{3}+e^{-3}\right)}{2} - i\frac{\cos 2\left(e^{3}-e^{-3}\right)}{2} = \sin 2 \cosh 3 - i \cos 2 \sinh 3\right]$$

(d) $\cos i$ $\left[\frac{e^{-1}+e}{2} = \cosh 1\right]$

(e) $\cos(4+i)$ $[\cos 4 \cosh 1 - i \sin 4 \sinh 1]$

(f) $\operatorname{tg}(2-i)$ $\left[\frac{e^{2}\sin 4 + i\left(1-e^{2}\cos 4\right)}{e^{2}\cos 4 + 1 + ie^{2}\sin 4}\right]$

(g) $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - i \ln 2\right)$ $\left[\frac{8+15i}{17}\right]$

Derivácia funkcie komplexnej premennej.

Definition 198 *Nech* $f : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je jednoznačná funkcia komplexnej premennej,* A *je otvorená,* $a \in A$. *Ak existuje konečná limita* $\lim_{z\longrightarrow a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$, *potom túto limitu nazývame derivácia funkcie* f *v bode* a, *označujeme* $f'(a)$ *a hovoríme, že funkcia* f *je diferencovateľná v bode* a. *Ak je funkcia* f *diferencovateľná v každom bode z* A, *hovoríme, že* f *je diferencovateľná funkcia a funkciu*

$$f' : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f'(a) = \lim_{z\longrightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

nazývame deriváciou funkcie f.

Pretože definícia derivácie funkcie komplexnej premennej v bode je taká istá ako pre funkciu reálnej premennej, platia všetky pravidlá, ktoré platili pre derivovanie funkcií reálnej premennej, ako aj všetky vety o diferencovateľnosti, napríklad diferencovateľnosť funkcie komplexnej premennej $f(z)$ v nejakom bode z definičného oboru implikuje spojitosť funkcie f v tomto bode.

Example 199 *Nájdite deriváciu funkcie*

$$f : \boldsymbol{C} \setminus \left\{\frac{4}{3}i\right\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \frac{z - 2i}{3iz + 4}.$$

Solution 200 *Pretože funkcia* f *je spojitá na celom definičnom obore, tak máme*

$$f' : \boldsymbol{C} \setminus \left\{\frac{4}{3}i\right\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f'(z) = \frac{-2}{(3iz + 4)^2}.\square$$

Example 201 *Nájdite deriváciu funkcie*

$$f : \boldsymbol{C} \setminus \left\{-\frac{2 + i}{3}\right\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \ln(2 + i + 3z).$$

Solution 202 *Pretože funkcia* $\ln z$ *nie je spojitá pre reálne záporné čísla, derivácia* $f'(z)$ *pre tieto hodnoty neexistuje. Ak* $z = x + iy$, *potom*

$$2 + i + 3z = 2 + 3x + i(1 + 3y)$$

a toto číslo je reálne záporné vtedy a len vtedy ak $y = -\frac{1}{3}$ *a* $x < -\frac{2}{3}$, *to znamená, že* f *nie je spojitá na množine*

$$A_1 = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ \operatorname{Re} z < -\frac{2}{3} \wedge \operatorname{Im} z = -\frac{1}{3}\right\},$$

teda f *je diferencovateľná na množine*

$$M = \boldsymbol{C} \setminus \left(\left\{-\frac{2 + i}{3}\right\} \cup A_1\right) = \boldsymbol{C} \setminus \left\{z \in \boldsymbol{C};\ \operatorname{Re} z \leq -\frac{2}{3} \wedge \operatorname{Im} z = -\frac{1}{3}\right\},$$

a jej derivácia je

$$f' : M \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f'(z) = \frac{3}{2 + i + 3z}.\square$$

Cauchyho - Riemannove rovnice.

V tejto časti budeme formulovať nutné a postačujúce podmienky pre diferencovateľnosť funkcie komplexnej premennej, ktorú vyjadríme v tvare:

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y).$$

Theorem 203 *Funkcia* $f : A(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, *(A je otvorená) je diferencovateľná v bode* $a = a_1 + ia_2$ *vtedy a len vtedy ak sú funkcie* $u(x,y)$ *a* $v(x,y)$ *diferencovateľné v bode* $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ *a platia podmienky*

$$\frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial x} = \frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial y} = -\frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial x} \qquad (*)$$

potom

$$f'(a) = \frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial x} + i\,\frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial x} = \frac{\partial v(\mathbf{a})}{\partial y} - i\,\frac{\partial u(\mathbf{a})}{\partial y}.$$

Rovnice (*) nazývame Cauchyho - Riemannove rovnice.

Example 204 *Nájdite deriváciu funkcie* $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$.

Solution 205 *Máme*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \ \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy, \ \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2.$$

Parciálne derivácie sú spojité pre každé $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$ *a spĺňajú Cauchyho - Riemannove rovnice. Teda* f *má deriváciu v každom bode* $z \in \boldsymbol{C}$ *a*

$$f' : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}, \ f'(z) = 3x^2 - 3y^2 + i6xy.$$

Ak chceme funkciu f *zapísať ako funkciu premennej* z *musíme použiť vzťahy*

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad a \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Aplikáciu týchto vzťahov dostaneme

$$f'(z) = 3z^2. \square$$

Example 206 *Vyšetrite, v ktorých bodoch je funkcia* $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = |z^2|$ *diferencovateľná.*

Solution 207 *Nech* $z = x + iy$, *potom* $f(z) = |x+iy|^2 = x^2 + y^2$ *a*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \ \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Odtiaľ plynie, že Cauchyho - Riemannove rovnice sú splnené v jedinom bode $(x,y) = (0,0)$, *teda* f *je diferencovateľná iba v bode* 0 *a* $f'(0) = 0. \square$

Analytické funkcie.

Definition 208 *Nech $f : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, ($A$ otvorená) je funkcia komplexnej premennej. Hovoríme, že f je*

a) analytická v oblasti $M \subset A$ ak $f'(z)$ existuje v každom bode $z \in M$,

b) analytická v bode $a \in A$ ak existuje okolie $O(a) \subset A$ také, že v každom bode $z \in O(a)$ existuje $f'(z)$.

Remark 209 *Diferencovateľnosť a analytickosť funkcie v oblasti sú zhodné pojmy. Analytickosť funkcie v bode je silnejšia vlastnosť než diferencovateľnosť funkcie v bode.*

Remark 210 *Napríklad funkcia $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = |z^2|$ z príkladu 203 má deriváciu v bode $a = 0$, ale nie je analytická v tomto bode, pretože jej derivácia $f'(z)$ neexistuje v žiadnom bode z ľubovoľného okolia bodu $a = 0$.*

Remark 211 *Niektorí autori namiesto pojmu analytická funkcia používajú pojem holomorfná funkcia.*

Definition 212 *Body komplexnej roviny $\boldsymbol{C}$ v ktorých je funkcia analytická nazývame regulárne body tejto funkcie. Body v ktorých funkcia nie je analytická (teda aj tie, v ktorých funkcia nie je definovaná) nazývame jej singulárne body.*

Example 213 *Ukážte, že funkcia $f : \boldsymbol{C}\setminus\{0,i\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{1}{z^2-iz}$ je analytická.*

Solution 214 *Vypočítajme deriváciu funkcie v bode a*

$$f'(a) = -\frac{2a-i}{(a^2-ia)^2}$$

existuje v každom bode $a \in \boldsymbol{C} \setminus \{0,i\}$. $\square$

Z predchádzajúcej kapitoly o elementárnych funkciách plynie, že
mocninová funkcia s prirodzeným exponentom,
polynomická funkcia,
exponenciálna funkcia,
trigonometrické a hyperbolické funkcie sú analytické funkcie. Hlavná hodnota (vetva) logaritmu a všeobecnej mocniny, sú analytické na množine všetkých komplexných čísel s výnimkou nuly a záporných reálnych čísel. Je to z toho dôvodu, že tieto funkcie sú definované pomocou logaritmickej funkcie.

Použitím vety 200 vieme nájsť analytickú funkciu, ak je daná iba jej reálna časť alebo iba jej imaginárna časť.

Example 215 *Nájdite analytickú funkciu $f : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ ak je daná $v : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $v(x,y) = 2xy + 3x$.*

Solution 216 *Pretože hľadáme analytickú funkciu f, mala by byť diferencovateľná v každom bode oblasti A, t.j. podľa vety funkcie u, v musia byť diferencovateľné v oblasti A a musia splňať Cauchyho - Riemannove rovnice:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x,\ \forall\,(x,y) \in A$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-2y-3,\,\forall\,(x,y)\in A$$

Prvá rovnica implikuje

$$u\,(x,y)=\int 2xdx=x^2+\Phi\,(y)\,,$$

teda

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\Phi'\,(y)=-2y-3,$$

čo dáva

$$\Phi\,(y)=-y^2-3y+k,\;k\in\boldsymbol{R}.$$

a

$$u\,(x,y)=x^2-y^2-3y+k.$$

Funkcie u, v sú diferencovateľné v $A=\boldsymbol{R}^2$, teda

$$f:A\,(=\boldsymbol{C})\longrightarrow\boldsymbol{C},\,f\,(z)=x^2-y^2-3y+k+i\,(2xy+3x)=\frac{z^2+\overline{z}^2}{2}+3iz+k$$

je analytická funkcia. □

Remark 217 *V ďalšej časti ukážeme, že analytická funkcia má v oblasti, v ktorej je analytická derivácie všetkých rádov.*

Remark 218 *Okrem použitia Cauchyho - Riemannových vzťahov existuje aj iný spôsob rekonštrukcie analytickej funkcie, ak poznáme iba jej reálnu alebo imaginárnu zložku.*

Tento spôsob nevyžaduje riešenie dvoch parciálnych diferenciálnych rovníc, jeho hlavnou myšlienkou je metóda reflexie analytickej funkcie od reálnej osi. Ak je definovaná funkcia

$$f:\boldsymbol{C}\longrightarrow\boldsymbol{C},\,w=f\,(z)\,,$$

jej reflexia od reálnej osi je definovaná:

$$\widehat{f}:\boldsymbol{C}\longrightarrow\boldsymbol{C},\;\;\widehat{f}\,(z)=\overline{f\,(\overline{z})}.$$

Remark 219 *Ak je funkcia $f\,(z)$ analytická (holomorfná) na otvorenej množine $U\subset\boldsymbol{C}$, potom je $\widehat{f}\,(z)$ analytická (holomorfná) na otvorenej množine $U'\subset\boldsymbol{C}$, ktorá je reflexiou U od reálnej osi.*

Theorem 220 *Nech $f\,(z)$ je analytická (holomorfná) na okolí začiatku $\boldsymbol{C}$ taká, že*

$$f\,(z)=f\,(x+iy)=u\,(x,y)+iv\,(x,y)\,.$$

Potom

$$f\,(z)=2u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)-\overline{f\,(0)}=2iv\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)+\overline{f\,(0)}.$$

Example 221 *Rekonštruujte analytickú funkciu $f\,:\,A\,(\subset\boldsymbol{C})\longrightarrow\boldsymbol{C},\;f\,(z)=u\,(x,y)+i\,v\,(x,y)$ ak je daná $v:\boldsymbol{R}^2\longrightarrow\boldsymbol{R},\;u\,(x,y)=x^2-y^2.$*

Solution 222 *Podľa predchádzajúcej vety máme:*

$$f(z) = 2\left[\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(\frac{z}{2i}\right)^2\right] - \overline{f(0)},$$

t.j.

$$f(z) = z^2 - \overline{f(0)}.$$

V bode $z = 0$ *dostaneme:*

$$f(0) = 0^2 - \overline{f(0)} \Longrightarrow f(0) + \overline{f(0)} = 0 \Longrightarrow \operatorname{Re} f(0) = 0.$$

Potom

$$f(z) = z^2 + i\beta,\ \beta \in \boldsymbol{R}.\square$$

Ak je funkcia $f(z)$ analytická v okolí nejakého bodu $a \in \boldsymbol{C}$, potom platí nasledujúca veta:

Theorem 223 *Nech* $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ *je analytická (holomorfná) v okolí bodu* $a \in \boldsymbol{C}$. *Potom*

$$f(z) = 2u\left(\frac{z+\overline{a}}{2}, \frac{z-\overline{a}}{2i}\right) - \overline{f(a)} = 2iv\left(\frac{z+\overline{a}}{2}, \frac{z-\overline{a}}{2i}\right) + \overline{f(a)}.$$

Harmonické a harmonicky združené funkcie.

Definition 224 *Reálna funkcia* $u : A\left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *sa nazýva harmonická funkcia ak*

a) u *má spojité parciálne derivácie druhého rádu v oblasti* A,
b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, *pre každé* $(x,y) \in A$

Poslednú rovnicu nazývame Laplaceova rovnica, ktorá sa často zapisuje v nasledújúcej forme

$$\Delta u = 0,$$

kde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

je Laplaceov operátor.

Theorem 225 *Nech* $f : A \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ *je analytická funkcia a funkcie* u *a* v *sú dvakrát spojite diferencovateľné. Potom* u, v *sú harmonické funkcie v oblasti* A.

Remark 226 *Opačné tvrdenie k predchádzajúcej vete neplatí, pretože dve harmonické funkcie v oblasti* A *nemusia byť časťami analytickej funkcie (nemusia spĺňať Cauchyho - Riemannove rovnice).*

Definition 227 *Nech* $u, v : A\left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *sú harmonické funkcie. Ak* u, v *spĺňajú Cauchyho - Riemannove rovnice v oblasti* A, *potom hovoríme, že* u, v *sú harmonicky združené funkcie.*

Lemma 228 *Reálna aj imaginárna časť každej analytickej funkcie* $f : A \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f = u + iv$, $A \subset \boldsymbol{C}$, *sú harmonicky združené funkcie v oblasti* A, *pričom funkcie* u *a* v *sú dva razy spojite diferencovateľné.*

Remark 229 *Použitím Cauchyho - Riemannových rovníc na ľubovoľnú harmonickú funkciu* $u : A\left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$, *môžme nájsť harmonicky združenú funkciu* $v : A\left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *tak, že funkcie* $f = u + iv$ *alebo* $g = v + iu$ *sú analytické v oblasti* A.

Example 230 *Nech* $u : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $u(x,y) = x^2 - y^2$. *Nájdite harmonicky združenú funkciu* $v : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *takú, že* $v(0,0) = 0$.

Solution 231 *Pretože platí* $\Delta u = 0$, u *je harmonická funkcia v* $A = \boldsymbol{R}^2$. *Platí*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y.$$

Použitím Cauchyho - Riemannových rovníc dostaneme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

odkiaľ

$$v(x,y) = \int 2x dy = 2xy + \varphi(x)$$

čo implikuje

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x),$$

teda

$$2y = 2y + \varphi'(x) \quad \text{alebo} \quad \varphi'(x) = 0 \implies \varphi(x) = k,$$

kde $k \in \boldsymbol{R}$ *je ľubovoľná konštanta. Potom*

$$v(x,y) = 2xy + k$$

a pretože

$$v(0,0) = 0, \quad \text{potom} \quad k = 0 \quad a \quad v(x,y) = 2xy \quad a \quad f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$$

je analytická funkcia a u, v *sú harmonicky združené funkcie.* □

Example 232 *Nech* $u : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $u(x,y) = 2\operatorname{arctg}\frac{x}{y} - 2x - y$, $A = \{(x,y)\,;\, y > 0, x > 0\}$. *Nájdite harmonicky združenú funkciu* $v : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *takú, že* $v(1,1) = -1$.

Solution 233 *Pretože platí* $\Delta u = 0$, u *je harmonická funkcia v* A. *Platí*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2y}{x^2 + y^2} - 2,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x}{x^2 + y^2} - 1.$$

Použitím Cauchyho - Riemannových rovníc dostaneme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} - 2,\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} + 1$$

odkiaľ

$$v(x,y) = \int \left(\frac{2y}{x^2+y^2} - 2 \right) dy = \ln\left(x^2+y^2\right) - 2y + \varphi(x)$$

čo implikuje

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} + \varphi'(x),$$

teda

$$\varphi'(x) = 1 \implies \varphi(x) = x + k,$$

kde $k \in \mathbf{R}$ *je ľubovoľná konštanta. Potom*

$$v(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right) - 2y + x + k$$

a pretože

$$-1 = v(1,1) = \ln 2 - 2 + 1 + k,$$

potom

$$k = -\ln 2 \quad a \quad v(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right) - 2y + x - \ln 2,$$

$$f(z) = 2\operatorname{arctg}\frac{x}{y} - 2x - y + i\left[\ln\left(x^2+y^2\right) - 2y + x - \ln 2\right]$$

je analytická funkcia a u, v *sú harmonicky združené funkcie na* A. $\square$

Cvičenia.

1. Pre funkcie
2. $f(z)=\frac{iz-1}{iz^2+1+i}$. Nájdite:
   (a) definičný obor; $\left[\boldsymbol{C}\backslash\left\{\sqrt[4]{2}e^{\frac{3\pi}{8}i},\ \sqrt[4]{2}e^{\frac{11\pi}{8}i}\right\}\right]$
   (b) $f\,',\ f\,'(i)$ $\left[f\,'(z)=\frac{z^2+2iz-1+i}{(iz^2+1+i)^2},\ f\,'(i)=-4+i\right]$
3. $f(z)=\frac{3i}{2i-z}$. Nájdite:
   (a) definičný obor; $[\boldsymbol{C}\backslash\{2i\}]$
   (b) $f\,',\ f\,'(i)$ $\left[f\,'(z)=\frac{3i}{(2i-z)^2},\ f\,'(i)=-3i\right]$

   Zistite, či sú nasledujúce funkcie diferencovateľné a ak áno, vypočítajte ich derivácie.
4. $f(z)=\frac{1}{z}$, $\left[D(f)=\boldsymbol{C}\backslash\{0\}, f\right.$ je diferencovateľná $\left.D(f\,')=D(f)=\boldsymbol{C}\backslash\{0\}, f\,'(z)=-\frac{1}{z^2}\right]$
5. $f(z)=z^2-2iz$, $[D(f)=\boldsymbol{C}, f$ je diferencovateľná $D(f\,')=D(f)=\boldsymbol{C}, f\,'(z)=2z-2i]$
6. $f(z)=e^{iz}$, $[D(f)=\boldsymbol{C}, f$ je diferencovateľná $D(f\,')=D(f)=\boldsymbol{C}, f\,'(z)=ie^{iz}]$
7. $f(z)=|z|$, $[D(f)=\boldsymbol{C}, f$ nie je diferencovateľná v žiadnom bode z $\boldsymbol{C}]$
8. $f(z)=\overline{z}$, $[D(f)=\boldsymbol{C}, f$ nie je diferencovateľná v žiadnom bode z $\boldsymbol{C}]$

   V nasledujúcich úlohách pre funkciu funkciu f a) zistite, kde existuje derivácia, b) nájdite $f\,'$ v bodoch, kde existuje, c) vyšetrite, kde je f analytická (holomorfná).
9. $f(z)=x^2+iy^2$. $\left[\begin{array}{c}\text{a. } f\,'\text{existuje na } M=\{z\in\boldsymbol{C}:\operatorname{Im}z=\operatorname{Re}z\},\\ \text{b. } f\,'(z)=f\,'(x+iy)=2x,\\ \text{c. nie je analytická v žiadnom bode}\end{array}\right]$
10. $f(z)=|z|$. $\left[\begin{array}{c}\text{a. } f\,'\text{ neexistuje v žiadnom bode,}\\ \text{b. } f\,'(z)\nexists,\\ \text{c. nie je analytická v žiadnom bode.}\end{array}\right]$
11. $f(z)=z^3+z$. $\left[\begin{array}{c}\text{a. } f\,'\text{ existuje na } \boldsymbol{C},\\ \text{b. } f\,'(z)=3z^2+1,\\ \text{c. je analytická na } \boldsymbol{C}.\end{array}\right]$
12. $f(z)=z\operatorname{Re}z$. $\left[\begin{array}{c}\text{a. } f\,'\text{ existuje len v bode } z=0,\\ \text{b. } f\,'(0)=0,\\ \text{c. nie je analytická v žiadnom bode}\end{array}\right]$
13. $f(z)=f(x+iy)=(2xy+2x-1)+i(y^2-x^2+2y)$.
    $\left[\begin{array}{c}\text{a. } f\,'\text{ existuje na } \boldsymbol{C},\\ \text{b. } f\,'(z)=f\,'(x+iy)=(2y+2)-i(2x),\\ \text{c. je analytická na } \boldsymbol{C}.\end{array}\right]$

14. $f(z) = (e^x \cos y) - i(e^x \sin y)$. $\left[\begin{array}{c} \text{a.}\quad f\,' \text{ neexistuje v žiadnom bode,} \\ \text{b.}\quad f\,'(z) \nexists, \\ \text{c.}\quad \text{nie je analytická v žiadnom bode.} \end{array}\right]$

V nasledujúcich úlohách 15 - 22 nájdite na $A \subset \boldsymbol{C}$ analytickú (holomorfnú) funkciu $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, ak je daná jej jedna zložka a prípadne funkčná hodnota v jednom bode:

15. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2,\ f(i) = 0.$

$[f(z) = f(x+iy) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3 + 1)]$

16. $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy,\ f(0) = 0.$

$\left[f(z) = f(x+iy) = (x^2 - y^2 + xy) + i\left(2xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right)\right]$

17. $v(x,y) = x^2 - y^2 - 3x + 2xy,\ u(2,1) = 0.$

$[u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy + 3y - 2]$

18. $v(x,y) = 2xy + 3x.$

$\left[\begin{array}{c} u(x,y) = x^2 - y^2 - 3y + k; \\ f(z) = f(x+iy) = (x^2 - y^2 - 3y + k) + i(2xy + 3x) \end{array}\right]$

19. $u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3; f(0) = 0.$

$\left[\begin{array}{c} v(x,y) = -2x^3 - y^3 + 3x^2y + 6xy^2; \\ f(z) = f(x+iy) = (x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3) + i(-2x^3 - y^3 + 3x^2y + 6xy^2) \end{array}\right]$

20. $v(x,y) = 2e^x \sin y,\ f(0) = 1.$

$[f(z) = f(x+iy) = (2e^x \cos y - 1) + i(2e^x \sin y)]$

21. $v(x,y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y.$

$\left[\begin{array}{c} u(x,y) = -2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - y - 2x + k,\ \text{alebo} \\ u(x,y) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - y - 2x + K \end{array}\right]$

22. $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$, pričom $f(0) = 0$. $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = ze^z]$

23. Ukážte, že $u(x,y) = xy$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu.

$\left[f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = -\frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C\right]$

24. Ukážte, že $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $\left[f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = 2xy - \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C\right]$

25. Ukážte, že $u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $\left[f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = -2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - y^3 + C.\right]$

26. Ukážte, že $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - x$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $\left[f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 - y + C\right]$

27. Ukážte, že $u\,(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu.
$\left[f : \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v\,(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + C\right]$

28. Ukážte, že $u\,(x,y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $\left[f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v\,(x,y) = ye^x \cos y + xe^x \sin y + C\right]$

Integrál funkcie komplexnej premennej.

Formálne je integrál funkcie komplexnej premennej definovaný takým istým spôsobom ako krivkový integrál vektorovej funkcie.

Komplexnú funkciu reálnej premennej

$$\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$$

môžme vyjadriť v tvare

$$\varphi(t) = x(t) + iy(t),$$

kde x, $y : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sú reálne funkcie reálnej premennej $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Hovoríme, že funkcia $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je spojitá ak sú funkcie $x, y : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ spojité.

Definition 234 *Nech $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je spojitá funkcia. Množina $C = \varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$ sa nazýva krivka v komplexnej rovine.*

- funkciu $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}, \varphi(t) = x(t) + iy(t)$ nazývame parametrizáciou (parametrickou rovnicou) krivky C.
- daná krivka môže mať viac (aj nekonečne mnoho) parametrizácií.
- bod $\varphi(\alpha)$ sa nazýva začiatočný bod a $\varphi(\beta)$ koncový bod krivky C.
- ak $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je injektívna, potom hovoríme, že krivka C je jednoduchá.
- ak $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, potom krivku C nazývame uzavretá.
- ak je krivka C s parametrizáciou $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *jednoduchá a uzavretá*, nazývame ju Jordanova krivka.

Remark 235 *Jordanova veta hovorí, že jednoduchá uzavretá krivka C delí komplexnú rovinu na dve súvislé množiny, ktoré sa nepretínajú: ohraničenú (vnútro krivky - $IntC$) a neohraničenú (vonkajšok krivky - $ExtC$). Dôkaz tejto vety je náročný, preto ho nebudeme uvádzať, ale vetu budeme používať.*

Example 236 *Funkcia*

a) $\varphi : \langle 1, 10 \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = t + it^2$, je parametrizáciou oblúka paraboly $C_1 : y = x^2$, pre $x \in \langle 1, 10 \rangle$,

b) $\varphi : \langle -1, 1 \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = t - 2it$, je parametrizáciou úsečky $C_2 : y = -2x, x \in \langle -1, 1 \rangle$,

c) $\varphi : \langle 0, \pi \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = \cos 2t + 2i \sin t$, je parametrizácia časti paraboly $C_3 : y^2 = -2x + 2$, pre $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Platí napríklad $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, teda krivka C_3 nie je jednoduchá. $\square$

Example 237 *Nech $a, b \in \boldsymbol{C}$, potom $\varphi : \langle 0, 1 \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = a + t(b - a)$ je parametrizáciou jednoduchej krivky C - úsečky spájajúcej body a a b.* $\square$

Example 238 *Funkcia $\varphi : \langle 0, 2\pi \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = \cos t + i \sin t$ je parametrizácia jednoduchej uzavretej krivky C - jednotkovej kružnice so stredom v začiatku súradnicovej sústavy. Všimnime si, že $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$.* $\square$

Example 239 *Funkcia* $\varphi : \langle 0, 4\pi \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = 2\cos t + 2i \sin t$ *je tiež parametrizáciou kružnice s polomerom* 2 *so stredom v začiatku súradnicovej sústavy. Táto krivka je tiež uzavretá* $\varphi(0) = \varphi(4\pi)$, *nie je však jednoduchá, pretože napríklad*

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi\left(\frac{5\pi}{2}\right). \square$$

Definition 240 *Ak funkcia* $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je taká, že* $\forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ *je funkcia* $\varphi'(t)$ *spojitá a* $\varphi'(t) \neq 0$, *tak krivku* C *nazývame hladká krivka.*

Delenie krivky.

Nech $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je parametrizáciou krivky C. Nech Q je delenie intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, $Q = \{\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p = \beta\}$. Potom každému bodu $t_k \in \langle \alpha, \beta \rangle$ odpovedá bod $\varphi(t_k) = z_k \in C$. Potom $P = \{z_k;\ k = 0, 1, 2, \ldots, p\}$ je delenie krivky C. Funkcie $\varphi_k : \langle t_{k-1}, t_k \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}, \varphi_k(t) = \varphi(t)$, $k = 1, 2, 3, \ldots, p$ sú parametrizáciami čiastočných kriviek C_k so začiatočnými bodmi $\varphi_k(t_{k-1})$ a koncovými bodmi $\varphi_k(t_k)$, $k = 1, \ldots, p$ krivky C.

Definition 241 *Nech* $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je po častiach hladká funkcia. Ak existuje delenie intervalu* $\langle \alpha, \beta \rangle$ - $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p = \beta\}$ *tak, že čiastočné krivky* C_k *s parametrizáciami*

$$\varphi_k : \langle t_{k-1}, t_k \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}, \varphi_k(t) = \varphi(t), \ k = 1, 2, 3, \ldots, p$$

sú hladké funkcie, potom sa krivka C *nazýva po častiach hladká krivka.*

Nech $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = x(t) + iy(t)$ je parametrizácia hladkej krivky. Definujeme číslo $d(C)$, ktoré nazývame dĺžka krivky C

$$d(C) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_\alpha^\beta |\varphi'(t)| \, dt,$$

ak C je po častiach hladká krivka potom

$$d(C) = \sum_{k=1}^{p} d(C_k).$$

Definícia integrálu.

Definition 242 *Nech* $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je parametrizácia hladkej krivky* C *a nech* $f : A(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je spojitá funkcia, ktorej definičný obor obsahuje* C $(C \subset A)$. *Potom integrál z funkcie* f *po krivke* C *je definovaný*

$$\int_C f(z) \, dz = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt.$$

Ak C *je po častiach hladká krivka a* $f : A(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je spojitá funkcia, ktorej definičný obor obsahuje* C $(C \subset A)$, *potom integrál z funkcie* f *po krivke* C *je definovaný*

$$\int_C f(z) \, dz = \sum_{k=1}^{p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt.$$

Vlastnosti integrálu.

1. Ak $c_1, c_2 \in \boldsymbol{C}$ sú ľubovoľné komplexné čísla, C je po častiach hladká krivka a f_1, f_2 sú funkcie spojité na C. Potom
$$\int_C \left[c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)\right] dz = c_1 \int_C f_1(z)\, dz + c_2 \int_C f_2(z)\, dz.$$
2. Nech $\varphi_1 : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi_2 : \langle \beta, \gamma \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ sú parametrizácie po častiach hladkých kriviek C_1 a C_2, pričom platí $\varphi_1(\beta) = \varphi_2(\beta)$ a ak definujeme parametrizáciu
$$\varphi : \langle \alpha, \gamma \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{ak} \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle \\ \varphi_2(t) & \text{ak} \quad t \in \langle \beta, \gamma \rangle \end{cases}$$
krivky $C = C_1 + C_2$, potom ak f je funkcia spojitá na C
$$\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz.$$
3. Nech C je po častiach hladká krivka a f je spojitá funkcia na C. Nech $d(C)$ je dĺžka krivky C. Potom
$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq d(C) \sup_{z \in \boldsymbol{C}} |f(z)|.$$
4. Ak $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je po častiach hladká parametrizácia krivky C a funkcia $\varphi^- : \langle -\beta, -\alpha \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, taká, že $\varphi^-(t) = \varphi(-t)$, potom hovoríme, že krivka C^- je opačná ku krivke C. Ak f je spojitá na C. Potom
$$\int_{C^-} f(z)\, dz = -\int_C f(z)\, dz.$$

Example 243 *Vypočítajte integrál* $\int_C (\overline{z})^2\, dz$ *ak parametrizácia krivky* C *je daná:*
a) $\varphi : \langle 0, 1 \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = t(1+i)$,
b) $\varphi : \langle 0, 1 \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) = 2t & ak \quad t \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \varphi_2(t) = 1 + (2t-1)\, i & ak \quad t \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle \end{cases}$.

Solution 244 *a) Pre krivku* C $\varphi : \langle 0, 1 \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = t(1+i)$ *máme* $\varphi'(t) = 1 + i$ *odkiaľ potom dostaneme*
$$\int_C (\overline{z})^2\, dz = \int_0^1 \left[t(1-i)\right]^2 (1+i)\, dt = (1-i)^2 (1+i) \int_0^1 t^2 dt = 2(1-i) \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(1-i).$$

b) Teraz máme $C = C_1 + C_2$, *kde* $\varphi_1 : \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_1(t) = 2t$ *a* $\varphi_1'(t) = 2$, $\varphi_2 : \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_2(t) = 1 + i(2t-1)$ *a* $\varphi_2'(t) = 2i$, *potom*
$$\int_C (\overline{z})^2\, dz = \int_{C_1} (\overline{z})^2\, dz + \int_{C_2} (\overline{z})^2\, dz = \int_0^{\frac{1}{2}} 8t^2 dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - i(2t-1))^2\, 2idt =$$
$$= \left[8\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} + i \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-2i)(2t-1) - (2t-1)^2\, dt = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}i. \square$$

Remark 245 *Pretože jedna krivka môže mať viac parametrizácií, napríklad:*

$$\varphi_1 : \langle 0,1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_1(t) = t + it^2$$

a

$$\varphi_2 : \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_2(t) = \sin t + i\left(1 - \cos^2 t\right)$$

sú parametrizácie tej istej krivky C - časti grafu paraboly $y = x^2$, $x \in \langle 0,1\rangle$. Prirodzená otázka je či integrál $\int_C f(z)\,dz$ nezávisí od parametrizácie (t.j. od funkcie φ)? Aj pre všeobecné predpoklady odpoveď znie: integrál nezávisí od parametrizácie krivky. Keby sme chceli urobiť dôkaz, musíme sa obrátiť na časti matematiky, ktoré pojednávajú o krivkových integráloch a Greenovej funkcii.

Example 246 *Vypočítajte integrál $\int_C \operatorname{Im} z dz$ kde C je obvod trojuholníka s vrcholmi $z_1 = 0$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = i$ od bodu z_1 cez z_2 a z_3 späť do bodu z_1.*

Solution 247 *Máme $C = C_1 + C_2 + C_3$, kde*
$\varphi_1 : \langle 0,1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_1(t) = (2+i)\,t$ *a* $\varphi_1'(t) = 2 + i$,
$\varphi_2 : \langle 0,1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_2(t) = (2-2t) + i$ *a* $\varphi_2'(t) = -2$,
$\varphi_3 : \langle 0,1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}, \varphi_3(t) = i\,(1-t)$ *a* $\varphi_3'(t) = -i$, *potom*

$$\int_C \operatorname{Im} z dz = \int_{C_1} \operatorname{Im} z dz + \int_{C_2} \operatorname{Im} z dz + \int_{C_3} \operatorname{Im} z dz =$$

$= \int_0^1 (2+i)\,t dt + \int_0^1 (-2)\,1 dt + \int_0^1 (1-t)\,(-i)\,dt = -1.\ \square$

Cauchyho integrálna veta.

Hovoríme, že oblasť ohraničená jednou jednoduchou, spojitou, uzavretou krivkou sa nazýva jednoducho súvislá oblasť. Oblasť ohraničená dvomi jednoduchými, spojitými, uzavretými a nepretínajúcimi sa krivkami nazývame dvojnásobne súvislá oblasť, ... Hovoríme, že hranica oblasti je kladne orientovaná, ak pri pohybe po hranici v smere jej orientácie vnútro oblasti zostáva po našej ľavej ruke. Je možné dokázať nasledujúcu vetu:

Theorem 248 *(Cauchyho integrálna veta) Nech f je analytická funkcia v jednoducho súvislej oblasti D. Ak C je jednoduchá, po častiach hladká uzavretá krivka v D, potom*

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Example 249 *Vypočítajte integrál*

$$\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1}dz,$$

ak $\varphi : \langle 0, 2\pi\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = \frac{1}{2}\cos t + i\frac{1}{2}\sin t.$

Solution 250 *Krivka C je uzavretá, hladká krivka, $C = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ |z| = \frac{1}{2}\right\}$. Nech $D = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ |z| = \frac{3}{4}\right\}$. D je jednoducho súvislá a $C \subset D$. Funkcia $f(z) = \frac{2z^2-3z+4}{z+1}$ je analytická v oblasti D, teda $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1}dz = 0$.* $\square$

Cauchyho integrálna veta implikuje skutočnosť, že integrál z analytickej funkcie v jednoducho súvislej oblasti D nezávisí od integračnej cesty. Nech C_1, C_2 sú dve jednoduché, po častiach hladké, nepretínajúce sa krivky s rovnakým začiatočným bodom z_1 aj rovnakým koncovým bodom z_2. Nech $C_1 \subset D$ a $C_2 \subset D$. Potom $C = C_1 + C_2^-$, kde C_2^- má opačnú orientáciu ako C_2, je jednoduchá uzavretá, po častiach hladká krivka, ktorá spĺňa predpoklady Cauchyho integrálnej vety, teda

$$0 = \int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2^-} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz,$$

teda

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

Tak sme dokázali tvrdenie.

Lemma 251 *Ak je $f : D\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ analytická funkcia definovaná v jednoducho súvislej oblasti D, potom $\int_C f(z)\,dz$ v oblasti D nezávisí od cesty.*

Ak z_1 je začiatočný bod a z_2 koncový bod krivky C, potom namiesto zápisu $\int_C f(z)\,dz$ môžme použiť zápis $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$.

Remark 252 *Nech* $f : D\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je analytická funkcia v jednoducho súvislej oblasti* D *a nech* $z_1, z_2 \in D$. *Nech pre každé* $z \in D$ *platí* $F'(z) = f(z)$, *potom funkciu* F *nazývame primitívnou funkciou k funkcii* f *na* D. *Ak má analytická funkcia* f *primitívnu funkciu* F, *potom*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz. = F(z_2) - F(z_1)\,.$$

Example 253 *Vypočítajte integrál*

$$\int_C z^2 dz$$

kde

a) C *je úsečka spájajúca bod* $z_1 = 0$ *s bodom* $z_2 = 1 + i$,

b) C *je krivka zložená z dvoch úsečiek spájajúcich body* $z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = 1+i$.

Solution 254 *a) Krivka* C *sa dá parametrizovať takto* $\varphi : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = t(1+i)$. *Potom* $\varphi'(t) = 1 + i$, *odkiaľ potom máme*

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \int_0^1 [t(1+i)]^2 (1+i)\,dt = (1+i)^3 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(-2+2i)\,.$$

Použitím poznámky tento výsledok dostaneme priamo: pretože je $\frac{z^3}{3}$ *primitívna funkcia ku funkcii* z^2, *máme*

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{1+i} = \frac{1}{3}(-2+2i)\,.$$

b) Teraz máme $C = C_1 + C_2$, *kde*

$$C_1 : \varphi_1 : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_1(t) = t \quad a \quad \varphi'(t) = 1,$$

$$C_2 : \varphi_2 : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_2(t) = 1 + it \ \ a\ \varphi'(t) = i,$$

potom

$$\int_C z^2 dz = \int_{C_1} z^2 dz + \int_{C_2} z^2 dz = \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1+it)^2\, i dt =$$

$$= \frac{1}{3} + \left[\frac{(1+it)^3}{3i}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(-2+2i)\,.$$

Porovnaním a) a b) vidíme, že náš integrál nezávisí od cesty. Ale tento výsledok sme očakávali, pretože funkcia $f(z) = z^2$ *je analytická funkcia v celej komplexnej rovine* C. $\square$

Treba si uvedomiť, že funkcia $f(z) = (\overline{z})^2$ z uvedeného príkladu nie je analytická funkcia a preto $\int_C (\overline{z})^2\, dz$ závisí od integračnej cesty.

Cauchyho integrálna veta vo viacnásobne súvislých oblastiach.

Theorem 255 *Nech je $f : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je analytická funkcia a $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ sú jednoduché, po častiach hladké, uzavreté krivky orientované v jednom smere, ktoré spĺňajú podmienky:*

a) $\overline{IntC_i} \subset IntC_0$, pre $i = 1, 2, \ldots, n$

b) $\overline{IntC_i} \cap \overline{IntC_j} = \emptyset$, pre každé $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$

c) $\overline{IntC_0} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} IntC_i \subset A$. Potom

$$\int_{C_0} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(z)\,dz.$$

Theorem 256 *(Veta o deformácii integračnej krivky.) Nech C_1, C_2 sú dve uzavreté, po častiach hladké rovnako orientované krivky, ktoré sa nepretínajú a $C_2 \subset IntC_1$. Nech tieto krivky a množina bodov ležiacich medzi nimi ležia v oblasti D. Ak $f : D\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je analytická funkcia, tak*

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

Example 257 *Vypočítajte*

$$\int_C \frac{1}{z-a}dz,$$

kde C je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka komplikovaného tvaru, ktorá vo svojom vnútri obsahuje singulárny bod $z = a$ funkcie $f(z) = \frac{1}{z-a}$.

Solution 258 *Aplikujeme vetu o deformácii integračnej krivky a dostaneme, že ak C_1 je krivka jednoduchého tvaru, jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná napríklad kružnica so stredom v bode $z = a$ a s polomerom R, krorá leží v $IntC$, tak dostaneme*

$$\int_C \frac{1}{z-a}dz = \int_{C_1} \frac{1}{z-a}dz.$$

Pretože

$$C_1 : \varphi_1 : \langle 0, 2\pi \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_1(t) = a + Re^{it},\ \varphi_1'(t) = iRe^{it},$$

potom

$$\int_C \frac{1}{z-a}dz = \int_{C_1} \frac{1}{z-a}dz = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{a + Re^{it} - a}dt = i[t]_0^{2\pi} = 2\pi i. \square$$

Example 259 *Vypočítajte*

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n}dz,\ n \neq 1,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

kde C je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka, ktorá vo svojom vnútri obsahuje bod $z = a$.

Solution 260 *Aplikujeme tú istú metódu ako v predchádzajúcom príklade a dostaneme*

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n}dz = \int_{C_1} \frac{1}{(z-a)^n}dz = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{(a+Re^{it}-a)^n}dt =$$

$$= \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t}dt = \frac{i}{R^{n-1}} \left[\frac{e^{i(1-n)t}}{i(1-n)} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

pričom sme použili

$$e^{(1-n)2\pi i} = \cos((1-n)2\pi) + i\sin((1-n)2\pi) = 1,$$

tak dostaneme

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n}dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{pre} \quad n=1 \\ 0 & \text{pre} \quad n=0,-1,\pm 2,\ldots \end{cases} . \square$$

Cauchyho integrálna formula.

Theorem 261 *Nech C je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka a $f : IntC \cup C \longrightarrow \mathbf{C}$ je analytická funkcia. Potom pre každé $a \in IntC$*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

Nasledujúcu vetu uvedieme bez dôkazu. Dokážeme ju neskôr.

Theorem 262 *Každá funkcia $f(z)$ analytická v uzavretej oblasti $\overline{D}$ má v tejto oblasti derivácie všetkých rádov a platí*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(a)}{(z-a)^{n+1}}dz,\ n=1,2,\ldots$$

kde C je uzavretá, kladne orientovaná, po častiach hladká krivka, ktorá leží so svojím vnútrom v $\overline{D}$.

Example 263 *Vypočítajte integrál $\int_C \frac{e^z}{z(z-i)}dz$, kde C je kružnica so stredom v bode $z=i$ a s polomerom $\frac{1}{2}$.*

Solution 264 *Pretože funkcia $f(z) = \frac{e^z}{z}$ je analytická vo vnútri kruhu C a bod $z=i \in IntC$, potom*

$$\int_C \frac{e^z}{z(z-i)}dz = \int_C \frac{\frac{e^z}{z}}{z-i}dz = 2\pi i \left[\frac{e^z}{z} \right]_{z=i} = 2\pi e^i. \square$$

Example 265 *Vypočítajte integrál $\int_C \frac{\sin z}{(z-i)^4}dz$, kde C je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka obsahujúca bod i.*

Solution 266 *Funkcia $\sin z$ je analytická funkcia v $\mathbf{C}$. Bod $z=i \in IntC$, potom*

$$\int_C \frac{\sin z}{(z-i)^4}dz = \frac{2\pi i}{3!} \left[\frac{d^3(\sin z)}{dz^3} \right]_{z=i} = -\frac{\pi i}{3}\cos i = -\frac{\pi i}{3}\cosh 1. \square$$

Cvičenia.

Vypočítajte integrály: ($\oplus$ je kladná orientácia, $\ominus$ je záporná orientácia krivky C.)

1. $\int_C z \sin z dz$, C je úsečka od bodu 0 po bod i. $\left[-ie^{-1}\right]$
2. $\int_C \operatorname{Re} z dz$, C je úsečka
   (a) od bodu 0 po bod $1+i$. $\left[\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right]$
   (b) od bodu -1 po bod $1+i$. $[0]$
3. $\int_C (\overline{z})^2 dz$, $C : z(t) = t + i\frac{t}{3}$, $t \in \langle 0, 3\rangle$ orientovaná súhlasne s parametrickým vyjadrením. $\left[\frac{10(3-i)}{3}\right]$
4. $\int_C \frac{1}{z} dz$, C je úsečka od bodu 1 po bod $1+i$. $\left[\ln\left(\sqrt{2}\right) + i\frac{\pi}{4}\right]$
5. $\int_C e^{\overline{z}} dz$, C je lomená krivka, ktorá sa skladá z dvoch úsečiek: prvá so začiatočným bodom 0 a koncovým bodom i, druhá so začiatočným bodom i a koncovým bodom $1+i$. $[1 + (e-2)(\cos 1 - i \sin 1)]$
6. $\int_C \frac{1}{z} dz$, $C : |z| = 2$, $\operatorname{Im} z \leq 0$ od bodu -2 po bod 2. $[i\pi]$
7. $\int_C |z|\, dz$, kde
   (a) $C : |z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu -1 po bod 1. $[2]$
   (b) $C : |z| = 2$, $\operatorname{Re} z \leq 0$ od bodu $-2i$ po bod $2i$. $[8i]$
8. $\int_C \overline{z}\, |z|\, dz$, kde $C : |z| = 1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$ od bodu i po bod $-i$ a úsečka od bodu $-i$ po bod i. $[-i\pi]$
9. $\int_C \operatorname{Re} z dz$, kde $C : |z| = 1$, $\ominus$. $[-i\pi]$
10. $\int_C z \operatorname{Im} z dz$, kde $C : |z| = 2$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu -2 po bod 2. $\left[\frac{16i}{3}\right]$
11. $\int_C \frac{z}{\overline{z}} dz$, kde $C : |z| = 2$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu 2 po bod -2 a úsečka od bodu -2 po bod -1 a $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu -1 po bod 1 a úsečka od bodu 1 po bod 2. $\left[\frac{4}{3}\right]$

   V nasledujúcich príkladoch pomocou Cauchyho integrálnej vety vypočítajte integrály po jednoduchých, po častiach hladkých, uzavretých, kladne orientovaných krivkách:

12. $\int_C \frac{1}{z^2+1} dz$, $C = \left\{z \in \boldsymbol{C} : (\operatorname{Re} z)^2 + 4(\operatorname{Im} z)^2 = 1\right\}$. $[0]$
13. $\int_C \frac{z+4}{z^2+2z+5} dz$, $C : |z| = 1$. $[0]$
14. $\int_C \frac{z^2+5}{z^2+1} dz$, $C = \left\{z \in \boldsymbol{C} : 4(\operatorname{Re} z)^2 + 16(\operatorname{Im} z)^2 = 1\right\}$. $[0]$
15. $\int_C \frac{e^z+1}{z+i} dz$, $C : |z| = \frac{1}{2}$. $[0]$
16. $\int_C \frac{z+2}{z^2-2z+2} dz$, $C : |z+1| = 1$. $[0]$

17. $\int_C \frac{z^2}{(z-4)(z^2+4)}dz$, $C : |z-1+i| = 2$. $\left[\frac{-2\pi}{5} + i\frac{\pi}{5}\right]$

18. $\int_C \frac{e^z \cos z}{(1+z^2)\sin z}dz$, $C : |z-2-i| = \sqrt{2}$. $[0]$

19. $\int_C \frac{\sin z}{z+i}dz$, $C : |z-i| = 1$. $[0]$

20. $\int_C \frac{\cos z}{z}dz$, $C : |z| = 1$. $[2\pi i]$

21. $\int_C \frac{1}{(z-2)(z+2i)}dz$, $C : |z| = 1$. $[0]$

22. $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1}dz$, $C : |z| = \frac{1}{2}$. $[0]$

23. $\int_C \frac{z^2}{z-2i}dz$, $C : |z| = 3$. $[-8\pi i]$

24. $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1}dz$, $C : |z| = \frac{3}{2}$. $[18\pi i]$

25. $\int_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$, $C : |z-2i| = \frac{3}{2}$. $\left[\frac{\pi}{e}\right]$

26. $\int_C \frac{z}{z^4-1}dz$, $C : |z-a| = a$, $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 1$. $\left[i\frac{\pi}{2}\right]$

27. $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1}dz$, $C : |z+1| = 1$. $[18\pi i]$

28. $\int_C \frac{e^z+1}{z+i}dz$, $C : |z+i| = 2$. $[2\pi \sin 1 + 2i\pi\,(1+\cos 1)]$

29. $\int_C \frac{z^2}{(z-4)(z^2+4)}dz$, $C : |z-1+i| = 2$. $\left[-\frac{2\pi}{5} + i\frac{\pi}{5}\right]$

30. $\int_C \frac{\sin z}{z^2+1}dz$, $C : |z+i| = 1$. $[i\pi \sinh 1]$

31. $\int_C \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz$, C : je kladne orientovaný obvod štvorca s vrcholmi v bodoch $1, 1+2i, -1+2i, -1$. $[-i\pi \cosh 1]$

32. $\int_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$, $C : |z-2i| = \frac{3}{2}$. $\left[\frac{\pi}{e}\right]$

33. $\int_C \frac{z+2}{z^2-2z+2}dz$,

    (a) $C : |z-1-2i| = 2$. $[\pi\,(3+i)]$

    (b) $C : |z-1+2i| = 2$. $[\pi\,(-3+i)]$

34. $\int_C \frac{1}{z^4-1}dz$, $C : |z-1-i| = \sqrt{2}$. $\left[\frac{\pi(-1+i)}{2}\right]$

35. Vypočítajte $\int_C \frac{1}{z^2-i}dz$, ak C je jednoduchá, po častiach hladká, uzavretá, kladne orientovaná krivka, na ktorej neležia korene menovateľa. Vypočítajte všetky možnosti. $\left[\begin{array}{c} \text{korene menovateľa: } z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i). \\ \text{a. } z_0 \in IntC,\ z_1 \notin IntC\ \left[\frac{\pi\sqrt{2}}{2}(1+i)\right] \\ \text{b. } z_0 \notin IntC,\ z_1 \in IntC\ \left[-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}(1+i)\right] \\ \text{c. } z_0,\ z_1 \in IntC\ [0] \\ \text{d. } z_0,\ z_1 \notin IntC\ [0] \end{array}\right]$

Taylorove rady.

Analytickosť súčtu mocninového radu.

Theorem 267 *Ak mocninový rad* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *má polomer konvergencie* $R > 0$*. Potom jeho súčet*

$$f : K(a,R) \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

je analytická funkcia a platí

$$f' : K(a,R) \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}.$$

Theorem 268 *Ak má mocninový rad* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *polomer konvergencie* $R > 0$*, potom jeho súčet*

$$f : K(a,R) \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

má derivácie všetkých rádov a platí

$$f^{(k)} : K(a,R) \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\, c_n (z-a)^{n-k}.$$

a

$$f^{(k)}(a) = k! c_k, \quad \text{alebo} \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Theorem 269 *Nech funkcionálny rad funkcií komplexnej premennej*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

rovnomerne konverguje na C*, kde* $C : \varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je jednoduchá, po častiach hladká krivka. Ak sú funkcie* $f_n(z)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ *spojité na* C *a ak* $f : C \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *je ich súčet, potom*

$$\int_C f(z)\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(z)\, dz.$$

Taylorove rady.

Z predchádzajúceho odseku vieme, že súčet mocninového radu, ktorý je konvergentný v kruhu $K(a,R)$ je analytická funkcia v tomto kruhu. Ukážeme, že platí aj obrátené tvrdenie.

Definition 270 *Nech má funkcia komplexnej premennej* f *v bode* $a \in \boldsymbol{C}$ *derivácie všetkých rádov. Potom mocninový rad*

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \quad (1)$$

nazývame Taylorovým radom funkcie f *v bode* a*.*

Theorem 271 *Nech f je analytická funkcia v oblasti D. Nech $a \in D$ a $K(a,R) \subset D$. Potom existuje mocninový rad*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

taký, že

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad \text{pre} \quad \text{každé } z \in K(a,R),$$

pričom

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi,$$

kde C je jednoduchá, po častiach hladká, uzavretá krivka, kladne orientovaná, ktorá leží v $K(a,R)$ tak, že $a \in IntC$.

Posledná veta a veta 265 implikujú nasledujúcu vetu:

Theorem 272 *Ak f je analytická funkcia v oblasti D, potom f má v každom bode z D derivácie všetkých rádov. Ak $K(a,R) \subset D$, potom*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n, \text{ pre každé } z \in K(a,R).$$

Example 273 *Nájdite Taylorov rozvoj funkcie $f : \boldsymbol{C} \setminus \{-1\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \ln(1+z)$ v bode $a = 0$ a jeho oblasť konvergencie.*

Solution 274 *Funkcia f je analytická funkcia v $\boldsymbol{C} \setminus \{z \in \boldsymbol{C}; \operatorname{Re} z \leq -1 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$, teda aj v bode $a = 0$ a platí*

$$f'(z) = \frac{1}{z+1}, \; f''(z) = -\frac{1}{(z+1)^2}, \dots, \; f^{(n)}(z) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(z+1)^n}$$

odkiaľ

$$f(0) = 0, \; f'(0) = 1, \; f''(0) = -1, \dots, \; f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

Potom Taylorov rad má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

a podľa vety 266 konverguje v kruhu $K(0,1)$ a platí

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, \text{ pre každé } z \in K(0,1). \square$$

Example 275 *Nájdite Taylorov rozvoj funkcie $\exp : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}, f(z) = e^z$ v bode $a = 0$.*

Solution 276 *Riešenie Funkcia f je analytická funkcia v $\boldsymbol{C}$ a platí*

$$f^{(n)}(z) = e^z$$

a my dostaneme rad

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

ktorý konverguje v kruhu $K(0, \infty) = \boldsymbol{C}$ a teda platí

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ \forall z \in \boldsymbol{C}. \square \tag{2}$$

Podobným spôsobom môžeme dostať Taylorove rady

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \forall z \in \boldsymbol{C}, \tag{3}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},\ \forall z \in \boldsymbol{C}, \tag{4}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,\ \forall\ z \in K(0,1)\ , \tag{5}$$

čo si čitateľ iste overí. Ak sa dá derivácia funkcie f vyjadriť rekurentným vzťahom, potom pre takúto funkciu môžme nájsť Taylorov rad ihneď. Ak to nie je možné, použijeme na nájdenie Taylorovho radu danej funkcie f algebrické rovnosti a Taylorove rady známych funkcií. Napríklad:

Example 277 *Nájdite Taylorov rozvoj funkcie $f : \boldsymbol{C} \setminus \{-1\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{1}{1+z}$ v bode $a = i$.*

Solution 278 *Máme*

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z-i+i+1} = \frac{1}{1+i}\frac{1}{1+\frac{z-i}{1+i}} = \frac{1}{1+i}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{1+i}\right)}.$$

Ak budeme predpokladať, že

$$\left|-\frac{z-i}{1+i}\right| = \left|\frac{z-i}{1+i}\right| < 1 \iff |z-i| < \sqrt{2},$$

potom pomocou známeho Taylorovho radu (5) dostaneme

$$f(z) = \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{1+i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(1+i)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} (z-i)^n,\ \forall z \in K\left(i, \sqrt{2}\right). \square$$

Example 279 *Nájdite Taylorov rozvoj funkcie* $f : \boldsymbol{C} \setminus \{3\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \frac{z}{(z-3)^2}$ *v bode* $a = 0$.

Solution 280 *Máme*

$$\frac{z}{(z-3)^2} = z\,\frac{1}{(z-3)^2} = \frac{z}{9}\,\frac{1}{\left(\frac{z}{3}-1\right)^2} = \frac{z}{9}\,\frac{1}{\left(1-\frac{z}{3}\right)^2}$$

Z Taylorovho radu (5) funkcie $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,\ \forall\, z \in K(0,1)$, *derivovaním dostaneme:*

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^{n-1},\ \forall\, z \in K(0,1),$$

potom ak $\left[\left|\frac{z}{3}\right| < 1 \iff |z| < 3\right]$ *dostávame*

$$\frac{z}{9}\,\frac{1}{\left(1-\frac{z}{3}\right)^2} = \frac{z}{9}\sum_{n=1}^{\infty} n\,\left(\frac{z}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{z^n}{3^{n+1}},\ \forall z \in K(0,3).\ \square$$

Example 281 *Nájdite Taylorov rozvoj funkcie* $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = ze^{-z^2}$ *v bode* $a = 0$.

Solution 282 *Funkcia* f *je analytická funkcia v* $\boldsymbol{C}$ *a s použitím radu (2) platí*

$$f(z) = ze^{-z^2} = \left[\ ak\ \left|-z^2\right| <\ \infty\ \iff |z| <\ \infty\ \right] =$$

$$= z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-z^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,\frac{z^{2n+1}}{n!},\ \forall\, z \in \boldsymbol{C}.\ \square$$

Cvičenia.

V úlohách 1 - 2 pomocou definície nájdite Taylorov rad funkcie f so stredom v bode a a vyšetrite jeho konvergenciu:

1. $f(z) = \sin^2 z$, $a = 0$.
   $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}\text{, konverguje na } M = \boldsymbol{C}\right]$
2. $f(z) = \ln(iz+2)$, $a = 1+2i$.
   $\left[i\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (z-1-2i)^n\text{, konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-1-2i| < 1\}\right]$
   V úlohách 3 - 9 vypočítajte Taylorov rad funkcie f so stredom v bode a a vyšetrite jeho konvergenciu:
3. $f(z) = \frac{z}{z+2}$, $a = 1$.
   $\left[\frac{1}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} (z-1)^n\text{, konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-1| < 3\}\right]$
4. $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$, $a = 0$.
   $\left[-1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n\text{, konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z| < 1\}\right]$
5. $f(z) = \frac{z+2}{z^2+5z+4}$, $a = 1$.
   $\left[\begin{array}{c} \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(2 \cdot 5^{-n-1} + 2^{-n-1}\right)(z-1)^n, \\ \text{konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-1| < 2\} \end{array}\right]$
6. $f(z) = \frac{z}{z^2+4z+3}$, $a = 2$.
   $\left[\begin{array}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \left(3 \cdot 5^{-n-1} - 3^{-n-1}\right)(z-2)^n, \\ \text{konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-2| < 3\} \end{array}\right]$
7. $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z+5}$, $a = i$.
   $\left[\begin{array}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2-3i}{4}(1+i)^{-n-1} - \frac{2+3i}{4}(1-3i)^{-n-1}\right)(z-i)^n, \\ \text{konverguje na } M = \left\{z \in \boldsymbol{C} : |z-i| < \sqrt{2}\right\} \end{array}\right]$
8. $f(z) = \frac{z^2+i}{z^2+iz+2}$, $a = 1$.
   $\left[\begin{array}{c} \frac{2+i}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3}\left[\frac{(1+i)}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1+4i}{(1+2i)^{n+1}}\right](z-1)^n, \\ \text{konverguje na } M = \left\{z \in \boldsymbol{C} : |z-1| < \sqrt{2}\right\} \end{array}\right]$
9. $f(z) = e^{3z-2}$, $a = 1$. $\left[e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}(z-1)^n\text{, konverguje na } M = \boldsymbol{C}\right]$

Laurentove rady a singulárne body funkcií.

Laurentove rady.

Definition 283 *Nech* $\ldots, c_{-n}, \ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots, a$ *sú komplexné čísla. Potom rad*

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \cdots + c_{-n}(z-a)^{-n} + \cdots + c_{-2}(z-a)^{-2} + c_{-1}(z-a)^{-1} + \\ +c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n (z-a)^n + \ldots\end{aligned} \tag{1}$$

nazývame Laurentov rad v bode a.

Rad

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n = \cdots + c_{-n}(z-a)^{-n} + \cdots + c_{-2}(z-a)^{-2} + c_{-1}(z-a)^{-1}$$

sa nazýva hlavná časť radu (1),

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n (z-a)^n + \ldots$$

sa nazýva analytická (regulárna) časť radu (1).

Definition 284 *Hovoríme, že Laurentov rad (1) konverguje (rovnomerne) na množine* $M \subset \boldsymbol{C}$ *ak jeho hlavná časť aj jeho analytická časť konverguje (rovnomerne) na množine* M. *Súčtom Laurentovho radu rozumieme súčet hlavnej a analytickej časti radu.*

Theorem 285 *Pre každý Laurentov rad (1) existujú čísla (jediné)* r, R $(0 \leq r \leq \infty, 0 \leq R \leq \infty)$ *také, že:*

a) analytická časť radu (1) absolútne konverguje na otvorenom kruhu $K(a, R)$, *rovnomerne konverguje na každom uzavretom kruhu* $\overline{K(a, R_1)}$, *kde* $R_1 < R$ *a diverguje na* $\boldsymbol{C} \setminus \overline{K(a, R)}$.

b) hlavná časť radu (1) absolútne konverguje na $\boldsymbol{C} \setminus \overline{K(a, r)}$, *rovnomerne konverguje na každej* $\boldsymbol{C} \setminus \overline{K(a, r_1)}$, *kde* $r_1 > r$ *a diverguje na* $K(a, r)$.

c) Ak $r < R$, *potom Laurentov rad (1) absolútne konverguje v množine* $P(a, r, R)$ *- medzikruží ohraničenom dvomi koncentrickými kružnicami s polomermi* r, R, *rovnomerne konverguje na* $\overline{P(a, r_1, R_1)}$, *kde* $r < r_1 < R_1 < R$ *a diverguje na* $\boldsymbol{C} \setminus \overline{P(a, r, R)}$.

Theorem 286 *Nech*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

je konvergentný na $P(a, r, R)$. *Potom jeho súčet*

$$f : P(a, r, R) \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

je analytická funkcia.

Theorem 287 *Nech $f : P(a,r,R) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je analytická funkcia. Potom existuje jediný Laurentov rad, ktorý na $P(a,r,R)$ konverguje ku funkcii $f(z)$. Koeficienty Laurentovho radu majú tvar*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,\ n = 0,\ \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2}$$

kde C je ľubovoľná jednoduchá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka, ktorá leží v $P(a,r,R)$ tak, že $a \in IntC$.

Remark 288 *Rozvoj funkcie $f(z)$ do Laurentovho radu má jednu výhodu: f môžeme rozvinúť do nekonečného radu v takom bode $z = a$, v ktorom f nie je analytická (v tomto prípade rozklad funkcie do Taylorovho radu v bode $z = a$ nie je možný).*

Výpočet koeficientov Laurentovho radu použitím vzťahov (2) je nepraktický. Pri rozvoji funkcie do Laurentovho radu je výhodnejšie aplikovať znalosti Taylorových rozvojov známych funkcií.

Example 289 *Nájdite Laurentov rad funkcie $f : \boldsymbol{C} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{1-2z}{1-z^2}$ na $P(1,0,2)$.*

Solution 290 *Funkcia je analytická na $P(1,0,2)$ a platí*

$$f(z) = \frac{1-2z}{1-z^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{z-1+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)} \quad \left[nech\ 0 < \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n.$$

Tak pre $0 < |z-1| < 2$ máme

$$f(z) = \frac{1-2z}{1-z^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{2^{n+2}}(z-1)^n$$

a hlavná časť radu vypočítaného Laurentovho radu má iba jeden člen $\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}$, ktorý „konverguje“ na $\boldsymbol{C} \setminus \{1\}$. Analytická časť $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{2^{n+2}}(z-1)^n$ konverguje na $K(1,2)$. Teda (a) konverguje na $P(1,0,2)$. $\square$

Example 291 *Nájdite Laurentov rad funkcie $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ v bode $z = 0$.*

Solution 292 *Funkcia je analytická na $P(0,0,\infty) = \boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ a platí*

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2}e^z\ [nech\ 0 < |z| < \infty] = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{n!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{n!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+2)!}$$

a rad konverguje na $P(0,0,\infty)$. $\square$

Example 293 *Nájdite Laurentov rad funkcie* $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}}$ *na* $P(0, 0,\ \infty)$.

Solution 294 *Funkcia je analytická na* $P(0, 0,\ \infty) = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ *a platí*

$$f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}} \left[nech\ \left| \frac{1}{z} \right| < \infty \implies |z| > 0 \right] =$$

$$= z^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{5-n}}{n!} = \sum_{n=-\infty}^{5} \frac{z^n}{(5-n)!}. \square$$

Cvičenia.

V úlohách 1 - 20 nájdite Laurentov rad funkcie f so stredom v bode a pre medzikružie $P(a, r, R) = \{z \in \boldsymbol{C} : r < |z - a| < R\}$.

1. $f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}},\ a = 0,\ P(0, 0, \infty)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{5-n}\right]$
2. $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2},\ a = i,\ P\left(i, \sqrt{5}, \infty\right)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(2-i)^n}{(z-i)^{n+2}}\right]$
3. $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)},\ a = 0,\ P(0, 0, 1)$. $\left[\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1}\right]$
4. $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)},\ a = i,\ P(i, 0, 1)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1-2^{n+1}}{2(2i)^n} (z - i)^{n-1}\right]$
5. $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)},\ a = 0,\ P(0, 1, \infty)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n-3}\right]$
6. $f(z) = \frac{1}{z(1-z)},\ a = 0,\ P(0, 0, 1)$. $\left[\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right]$
7. $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)},\ a = 1,\ P(1, 0, 1)$. $\left[2(z-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z - 1)^n\right]$
8. $f(z) = \frac{1}{z^2+iz+2},\ a = -2i,\ P(-2i, 3, \infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-1} (3i)^{-n-1} (z + 2i)^{n-1}\right]$
9. $f(z) = \frac{1}{z^2-3iz-2},\ a = 2i,\ P(2i, 1, \infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{-n-1} i^{-n-1} (z - 2i)^{n-1}\right]$
10. $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2},\ a = 1,\ P(1, 0, 1)$. $\left[(-1) \sum_{n=-1}^{\infty} (z - 1)^n\right]$
11. $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2},\ a = 1,\ P(1, 1, \infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-2} (z - 1)^n\right]$
12. $f(z) = \frac{5z+11}{z^2+4z+3},\ a = -1,\ P(-1, 0, 2)$. $\left[3(z+1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-n} (z + 1)^n\right]$
13. $f(z) = \frac{5z+11}{z^2+4z+3},\ a = -1,\ P(-1, 2, \infty)$. $\left[5(z+1)^{-1} + \sum_{n=-\infty}^{-2} (-1)^{n+1} 2^{-n} (z + 1)^n\right]$
14. $f(z) = \frac{5z+11}{z^2+4z+3},\ a = -3,\ P(-3, 0, 2)$. $\left[2(z+3)^{-1} - \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} (z + 3)^n\right]$
15. $f(z) = \frac{5z+11}{z^2+4z+3},\ a = -3,\ P(-3, 2, \infty)$. $\left[2(z+3)^{-1} + 3 \sum_{n=-\infty}^{0} 2^{-n} (z + 3)^n\right]$
16. $f(z) = \frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)},\ a = 0,\ P(0, 1, 2)$. $\left[\left(-\frac{1}{12}\right) \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} z^{2n+1} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-2n-1}\right]$
17. $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)},\ a = 2,\ P\left(2, 0, \sqrt{5}\right)$.
    $\left[(z-2)^{-1} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2+i)^{n+1} - (2-i)^{n+1}}{5^{n+1}} (z - 2)^n\right]$
18. $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)},\ a = 0,\ P(0, 1, 2)$. $\left[2 \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n z^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} z^n\right]$
19. $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{\pi z+1}{z}\right),\ a = 0,\ P(0, 0, \infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{1-n}}{(1-2n)!} z^{2n+1} - z\right]$
20. $f(z) = 2^z + 2^{\frac{1}{z}} - 1,\ a = 0,\ P(0, 0, \infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(\ln 2)^n (-n)!} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} z^n\right]$

Izolované singulárne body.

Definition 295 *Nech $f(z)$ je analytická funkcia v oblasti D $(f(z) \not\equiv 0)$. Nech pre bod $a \in D$ platí*

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0 \quad a \quad f^{(k)}(a) \neq 0.$$

Potom hovoríme, že bod $z = a$ je nulový bod k-teho rádu funkcie $f(z)$. Ak $k = 1$ hovoríme, že bod a je jednoduchý nulový bod funkcie f.

Nech bod $z = a$ je nulový bod k-teho rádu analytickej funkcie $f(z)$, potom platí

$$c_0 = f(a) = 0, c_1 = f'(a) = 0, \ldots, c_{k-1} = \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} = 0, c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$$

a Taylorov rozvoj funkcie $f(z)$ v bode $z = a$ má tvar

$$\begin{aligned} f(z) &= c_k (z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \cdots = (z-a)^k [c_k + c_{k+1}(z-a) + \ldots] = \\ &= (z-a)^k \Phi(z) \end{aligned}$$

kde $\Phi(a) \neq 0$.

Example 296 *Nájdite nulové body funkcie* $\cos z$ *a určte ich druh.*

Solution 297 *Ak použijeme znalosti elementárnej funkcie kosínus* - $\cos z$, *dostaneme, že jej nulové body sú*

$$z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Pretože

$$\cos' z|_{z_k} = -\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1} \neq 0,$$

teda každý nulový bod z_k je jednoduchý. □

V predchádzajúcej časti sme definovali regulárny a singulárny bod. Body, v ktorých funkcia $f(z)$ nie je analytická, sa nazývajú singulárne body alebo singularity funkcie $f(z)$.

Definition 298 *Nech f je analytická funkcia v prstencovém okolí bodu $a \in \overline{\boldsymbol{C}}$. Bod $a \notin D(f)$. Bod a nazývame izolovaný singulárny bod (singularita) funkcie f.*

Funkciu $f(z)$ môžme rozvinúť do Laurentovho radu v bode $z = a$ na $O_r^\circ(a)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Definition 299 *Nech $z = a \in \boldsymbol{C}$ je izolovaný singulárny bod funkcie $f : O^\circ(a) \longrightarrow \boldsymbol{C}$. Potom ak*

a) existuje konečná limita $\lim_{z \longrightarrow a} f(z)$, tento bod nazývame odstrániteľný singulárny bod;

b) ak $\lim_{z \longrightarrow a} f(z) = \infty$, potom bod $z = a$ nazývame pól;

c) ak $\lim_{z \longrightarrow a} f(z)$ neexistuje, bod $z = a$ nazývame podstatne singulárny bod.

Example 300 *a) Funkcia* $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ *má odstrániteľný singulárny bod* $z = 0$, *pretože*

$$\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

b) Funkcia $f : \boldsymbol{C} \setminus \{5i\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{1}{z-5i}$ *má pól v bode* $z = 5i$, *pretože*

$$\lim_{z \longrightarrow 5i} \frac{1}{z-5i} = \infty.$$

c) Funkcia $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ *má podstatný singulárny bod* $z = 0$, *pretože ak* $z \in \boldsymbol{R}$ *platí*

$$\lim_{z \longrightarrow 0^+} e^{\frac{1}{z}} = \infty, \lim_{z \longrightarrow 0^-} e^{\frac{1}{z}} = 0,$$

teda

$$\lim_{z \longrightarrow 0} e^{\frac{1}{z}}$$

neexistuje. □

Ukážeme, že existuje vzťah medzi izolovanými singulárnymi bodmi funkcie f a jej Laurentovým radom v týchto bodoch.

Theorem 301 *Nech* $f(z)$ *je analytická v prstencovom okolí* $O^\circ(a)$ *bodu* $z = a$. *Bod* $z = a$ *je odstrániteľný singulárny bod funkcie* f *vtedy a len vtedy ak jej Laurentov rad má tvar*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

na $O^\circ(a)$.

Remark 302 *Ak funkciu* f, *ktorá má v bode* $z = a$ *odstrániteľný singulárny bod dodefinujeme podľa predchádzajúcej vety v tomto bode hodnotou* $f(a) = c_0$, *potom dostaneme funkciu analytickú na* $O^\circ(a)$.

Example 303 *Ak definujeme funkciu* $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ *z predchádzajúceho príkladu, potom ju možno dodefinovať v bode* $z = 0$ *(odstrániteľnom singulárnom bode), dostaneme analytickú funkciu:*

$$f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & \text{pre} \quad z \neq 0 \\ 1 & \text{pre} \quad z = 0 \end{cases} . \square$$

Theorem 304 *Nech* f *je analytická funkcia definovaná na nejakom prstencovom okolí bodu* $z = a$, $O^\circ(a)$. *Bod* $z = a$ *je pól funkcie* f *vtedy a len vtedy ak pre Laurentov rad funkcie* f *v bode* $z = a$ *definovaný na* $O^\circ(a)$ *existuje koeficient* $c_{-m} \neq 0$, $m > 0$ *a pre každé* $n > m$, $c_{-n} = 0$.

Definition 305 *Nech* f *je analytická funkcia definovaná v prstencovom okolí bodu* $a-$ $O^\circ(a)$ *a má Laurentov rad tvaru*

$$f(z) = c_{-m}(z-a)^{-m} + c_{-m+1}(z-a)^{-m+1} + \cdots + c_{-1}(z-a)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

kde $c_{-m} \neq 0$. *Bod* $z = a$ *nazývame pólom* m*-tého rádu funkcie* f.

Example 306 *Nájdite póly funkcie* $f : \boldsymbol{C} \setminus \{1\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \frac{z}{(z-1)^3}$.

Solution 307 *Pretože na* $P(1, 0, \infty)$ *Laurentov rad funkcie* f *bude:*

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^3} = \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^2},$$

tak vidíme, že bod $z = 1$ *je pól tretieho rádu.* □

Theorem 308 *Nech je funkcia* f *analytická na prstencovom okolí bodu* a, $O^\circ(a)$. *Bod* $z = a$ *je pól m-tého rádu funkcie* f *vtedy a len vtedy ak*

$$\lim_{z \longrightarrow a} (z-a)^m f(z) \neq 0.$$

Theorem 309 *Nech* $z = a$ *je nulový bod m-tého rádu funkcie* $g(z)$, *t.j.* $g(z) = (z-a)^m \Phi(z)$, $\Phi(a) \neq 0$ *a* Φ *je analytická funkcia definovaná na nejakom okolí bodu* $a - O(a)$. *Potom* $z = a$ *je pól m-tého rádu funkcie* $f = \frac{h}{g}$, *kde* h *je analytická funkcia definovaná na* $O(a)$ *a* $h(a) \neq 0$.

Example 310 *Nájdite singulárne body a určte ich typ ak je funkcia daná predpisom* $f : \boldsymbol{C} \setminus \{-1, 2i\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \frac{1}{(z-2i)^2(z+1)}$.

Solution 311 *Pretože funkcia* $g(z) = (z-2i)^2(z+1)$ *má v bode* $z = 2i$ *dvojnásobný nulový bod a v bode* $z = -1$ *jednoduchý nulový bod, tak bod* $z = 2i$ *je pól druhého rádu a bod* $z = -1$ *je jednoduchý pól funkcie* f. □

Veta o odstrániteľnom singulárnom bode spolu s vetou o póle m-tého rádu implikujú nasledujúcu vetu:

Theorem 312 *Bod* $z = a$ *je podstatným singulárnym bodom analytickej funkcie* $f : O^\circ(a) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *vtedy a len vtedy, ak hlavná časť jej Laurentovho radu na* $O^\circ(a)$ *má nekonečne mnoho členov.*

Example 313 *Určte typ singulárneho bodu* $z = 0$ *pre funkciu* $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

Solution 314 *Pretože platí:*

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!},\ \forall z \in P(0, 0, \infty),\ (|z| > 0),$$

teda hlavná časť Laurentovho radu má nekonečne mnoho členov, čo implikuje, že bod $z = 0$ *je podstatný singulárny bod.* □

Rezíduá.

Pojem rezídua je jedným z najdôležitejších pojmov v teórii funkcií komplexnej premennej s mnohými praktickými aplikáciami. Vieme, že ak je funkcia $f(z)$ definovaná v jednoducho súvislej oblasti D analytická, potom podľa Cauchyho integrálnej vety

$$\int_C f(z)\,dz = 0,$$

pre každú jednoduchú, uzavretú, po častiach hladkú krivku ležiacu v oblasti D. Ak funkcia $f(z)$ má izolovaný singulárny bod $z = a \in IntC$, potom $\int_C f(z)\,dz$ vo všeobecnosti nemusí byť rovný nule. Veta o nezávislosti krivkového integrálu z analytickej funkcie hovorí, že hodnota $\int_C f(z)\,dz$ nezávisí od C.

Definition 315 *Nech $f : D(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je analytická s výnimkou izolovaného singulárneho bodu $z = a$. Potom hodnotu*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz,$$

kde C je jednoduchá, po častiach hladká uzavretá kladne orientovaná krivka, taká že $a \in IntC$, nazývame rezíduum funkcie $f(z)$ v bode $z = a$ a označujeme

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz.$$

Ak rozvinieme funkciu f na prstencovom okolí $O^\circ(a)$ do Laurentovho radu v bode $z = a$, potom ľahko vidieť, že

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = c_{-1}$$

kde c_{-1} je koeficient v Laurentovom rade funkcie $f(z)$ pri $(z-a)^{-1}$.

Výpočet rezíduí.

Aby sme mohli rezíduá používať v praktických aplikáciách, musíme vedieť ako rezíduá počítať.

Remark 316 *Nech $z = a$ je podstatný singulárny bod funkcie f, potom $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = c_{-1}$ môžme určiť iba z rozvoja funkcie f do Laurentovho radu v bode $z = a$ na nejakom prstencovom okolí $P(a, 0, R)$.*

Example 317 *Nájdite rezíduum funkcie $f : \boldsymbol{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$.*

Solution 318 *Bod $z = 0$ je podstatný singulárny bod funkcie f. Laurentov rad funkcie f v bode $z = 0$ je*

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

odkiaľ

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \operatorname*{res}_{z=0} e^{-\frac{1}{z}} = c_{-1} = -1.\square$$

Theorem 319 *Nech $z=a$ je pól m-tého rádu funkcie f. Potom*

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \longrightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m f(z) \right].$$

Lemma 320 *Ak je bod $z=a$ jednoduchý pól funkcie f, potom*

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \longrightarrow a} \left[(z-a) f(z) \right].$$

Theorem 321 *Nech sú funkcie g, h analytické v bode $z=a$. Nech $h(a) \neq 0$, $g(a)=0$ a $g'(a) \neq 0$. Potom je bod $z=a$ jednoduchý pól funkcie $f=\frac{h}{g}$ a*

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{h(a)}{g'(a)}.$$

Example 322 *Nájdite rezíduá funkcie $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0,1\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{z^3+z^2+2}{z(z-1)^2}$.*

Solution 323 *Body $z_1=0$ a $z_2=1$ sú izolované singulárne body funkcie $f(z)$. Bod $z_1=0$ je jednoduchý pól a bod $z_2=1$ je pól druhého rádu funkcie f, potom*

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \longrightarrow 0} \left[z \cdot \frac{z^3+z^2+2}{z(z-1)^2} \right] = 2$$

a

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \longrightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 \cdot \frac{z^3+z^2+2}{z(z-1)^2} \right] = 1. \square$$

Example 324 *Nájdite rezíduum funkcie $f : \boldsymbol{C} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \boldsymbol{Z} \right\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \operatorname{tg} z$ v bode $a = \frac{\pi}{2}$.*

Solution 325 *Riešenie Máme*

$$f(z) = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad a \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \cos'(z)\big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -\sin\frac{\pi}{2} = -1,$$

potom aplikáciou **??** *dostaneme*

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = \operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} z = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{-\sin\frac{\pi}{2}} = -1. \square$$

Cauchyho veta o rezíduách.

Theorem 326 *Nech $D \subset \boldsymbol{C}$ je jednoducho súvislá oblasť a C uzavretá, jednoduchá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka taká, že $C \subset D$. Nech $f : D\ (\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je analytická funkcia s výnimkou konečného počtu izolovaných singulárnych bodov. Označme $z_1, z_2, \ldots, z_n$ singulárne body ležiace vo vnútri krivky C. Potom*

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Example 327 *Vypočítajte*

$$\int_C \frac{1}{(z-1)^2 (z^2+1)} dz,$$

kde $C : \varphi : \langle 0, 2\pi \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = 1 + 2\cos t + i(1 + 2\sin t)$ *je kladne orientovaná.*

Solution 328 C *je kružnica so stredom v bode* $1+i$ *a s polomerom* 2. *Singulárne body* $z_1 = 1$ *a* $z_2 = i$ *ležia v* $IntC$, *potom*

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \longrightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 \frac{1}{(z-1)^2 (z^2+1)} \right] = \lim_{z \longrightarrow 1} \left[-\frac{2z}{(z^2+1)^2} \right] = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \longrightarrow i} \left[(z-i) \frac{1}{(z-1)^2 (z+i)(z-i)} \right] = \lim_{z \longrightarrow i} \left[\frac{1}{(z-1)^2 (z+i)} \right] = \frac{1}{4}$$

a

$$\int_C \frac{1}{(z-1)^2 (z^2+1)} dz = 2\pi i \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right] = -\frac{\pi}{2}.\square$$

Example 329 *Vypočítajte*

$$\int_C z^2 e^{\frac{1}{z}} dz,$$

kde $C : |z| = 1$ *je kladne orientovaná.*

Solution 330 C *je kružnica so stredom v začiatku a s polomerom 1. Singulárny bod* $z = 0$ *je podstatný singulárny bod, pričom platí*

$$z^2 e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2-n}}{n!} \quad a \quad c_{-1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

potom

$$\int_C z^2 e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \frac{1}{6} = \frac{\pi i}{3}.\square$$

Výpočet nevlastných integrálov použitím rezíduí.

Theorem 331 *Nech je* $f : A \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} (\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *analytická funkcia a*

a) A *je taká oblasť v komplexnej rovine* C, *že* $\boldsymbol{C}^+ \subset A$, *kde* $\boldsymbol{C}^+ = \{z \in \boldsymbol{C}; \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

b) $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *sú izolované singulárne body funkcie* f *také, že* $\operatorname{Im} z_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

c) Existujú kladné reálne čísla M, ρ, δ *tak, že* $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$ *pre každé* $z \in A$, $|z| > \rho$. *Potom nevlastný integrál*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Example 332 *Vypočítajte*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2+2t+2)^2} dt$$

Solution 333 *Pretože* $f : \boldsymbol{C} \backslash \{z_1, z_2\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{t^2}{(t^2+2t+2)^2}$ *je analytická funkcia s izolovanými singulárnymi bodmi - pólmi druhého rádu* $z_1 = -1+i$, $z_2 = -1-i$. *Pretože*

$$\lim_{z \longrightarrow \infty} z^{1+\delta} f(z) = 0,\ \forall \delta > 0,$$

potom existujú M, ρ *také, že*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}},\ \forall z \in \boldsymbol{C}, |z| > \delta$$

potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2+2t+2)^2} dt = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \pi. \square$$

Cvičenia.

V príkladoch 1 - 14 zistite druh izolovaných singulárnych bodov funkcie f a určte rezíduum funkcie f v týchto bodoch:

1. $f(z) = \frac{z^2}{z+3}$. $[z = -3$, pól 1. stupňa $res_{z=-3}[f(z)] = 9]$
2. $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+4)}$. $\left[\begin{array}{c} z = 2i, \text{ pól 1. stupňa } res_{z=2i}[f(z)] = \frac{-\sin 2 + i\cos 2}{16} \\ z = -2i, \text{ pól 1. stupňa } res_{z=-2i}[f(z)] = \frac{-\sin 2 - i\cos 2}{16} \\ z = 0, \text{ pól 2. stupňa } res_{z=0}[f(z)] = \frac{1}{4} \end{array}\right]$
3. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$. $\left[\begin{array}{c} z = i, \text{ pól 3. stupňa } res_{z=i}[f(z)] = -\frac{3i}{16} \\ z = -i, \text{ pól 3. stupňa } res_{z=-i}[f(z)] = \frac{3i}{16} \end{array}\right]$
4. $f(z) = \frac{z^3+z^2+2}{z(z^2-1)^2}$. $\left[\begin{array}{c} z = 1, \text{ pól 2. stupňa } res_{z=1}[f(z)] = -\frac{3}{4} \\ z = -1, \text{ pól 2. stupňa } res_{z=-1}[f(z)] = -\frac{5}{4} \\ z = 0, \text{ pól 1. stupňa } res_{z=0}[f(z)] = 2 \end{array}\right]$
5. $f(z) = \frac{z+3}{(z-2)^2(z+2i)}$. $\left[\begin{array}{c} z = 2, \text{ pól 2. stupňa } res_{z=2}[f(z)] = \frac{2+3i}{8} \\ z = -2i, \text{ pól 1. stupňa } res_{z=-2i}[f(z)] = \frac{-2-3i}{8} \end{array}\right]$
6. $f(z) = \frac{4+z^2-2z\sin z}{z^3}$. $[z = 0$, pól 3. stupňa $res_{z=0}[f(z)] = -1]$
7. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$. $[z = 0$, pól 1. stupňa $res_{z=0}[f(z)] = 1]$
8. $f(z) = z^3 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$. $[z = 0$, podstatne singulárny bod $res_{z=0}[f(z)] = a_{-1} = 0]$
9. $f(z) = z\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)$. $[z = -1$, podstatne singulárny bod $res_{z=-1}[f(z)] = a_{-1} = -1]$
10. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. $[z = 0$, odstrániteľný singulárny bod $res_{z=0}[f(z)] = 0]$
11. $f(z) = z^2\left(e^{\frac{1}{z}} - 2\right)$. $\left[z = 0\right.$, podstatne singulárny bod $\left.res_{z=0}[f(z)] = a_{-1} = \frac{1}{6}\right]$
12. $f(z) = z^2\cos\left(\frac{z+1}{z}\right)$. $\left[z = 0\right.$, podstatne singulárny bod $\left.res_{z=0}[f(z)] = a_{-1} = \frac{1}{6}\sin 1\right]$
13. $f(z) = \operatorname{tg} z$. $\left[z = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right.$, pól 1. stupňa $\left.res_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi}[f(z)] = -1\right]$

   V príkladoch 14 - 26 pomocou Cauchyho vety o rezíduách vypočítajte integrály po jednoduchých, po častiach hladkých, uzavretých

   orientovaných krivkách C, kde $\oplus$ je kladná orientácia, $\ominus$ je záporná orientácia krivky C.

14. $\int_C \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}dz$, kde $C : |z-1-i| = 2$, $\oplus$. $\left[-\frac{\pi i}{2}\right]$
15. $\int_C \frac{z+3}{(z-2)^2(z+2i)}dz$, kde $C : |z| = 3$, $\ominus$. $[0]$
16. $\int_C \frac{z^3+1}{z(z-1)^3}dz$, kde $C : |z| = 2$, $\oplus$. $[2\pi i]$
17. $\int_C \frac{1}{z^4+1}dz$, kde $C : \{z(t) = (1+\cos t) + i\sin t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$, $\ominus$. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}i\pi\right]$
18. $\int_C \frac{1-\cos z}{z^3}dz$, kde $C : |z| = 1$, $\oplus$. $[\pi i]$

19. $\int_C z^2 e^{\frac{1}{z}} dz,$ kde $C : |z| = \frac{1}{2}$, $\oplus$. $\left[\frac{\pi i}{3}\right]$

20. $\int_C \frac{\cos z}{z} dz,$ kde $C : |z| = 1$, $\ominus$. $[-2\pi i]$

21. $\int_C z^3 \cos\left(\frac{1}{z-2}\right) dz,$ kde $C : |z-2| = 3$, $\oplus$. $\left[2\pi i\left(\frac{1}{4!} - 6\right)\right]$

22. $\int_C \sin^2\left(\frac{1}{z}\right) dz,$ kde $C : |z| = 1$, $\ominus$. $[2\pi i]$

23. $\int_C (z-1)^2 \sin\left(\frac{1}{z-2}\right) dz,$ kde $C : |z| = 3$, $\ominus$. $\left[-\frac{5\pi i}{3}\right]$

24. $\int_C \cos\left(\frac{z}{z+i}\right) dz,$ kde $C : |z+i| = \frac{1}{2}$, $\oplus$. $[-2\pi \sin 1]$

25. $\int_C \operatorname{tg} z dz,$ kde $C : \left|z - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $\ominus$. $[2\pi i]$

26. $\int_C \left(\frac{1}{z^2-9} - \cos\left(\frac{z}{z-3}\right)\right) dz,$ kde $C : |z-3| = 1$, $\oplus$. $\left[2\pi i\left(\frac{1}{6} + 3\sin 1\right)\right]$
V príkladoch 27 - 30 vypočítajte nevlastné integrály

16. Vypočítajte nevlastný integrál $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx$, $a > 0$. $\left[\frac{\pi}{2a}\right]$

17. Vypočítajte nevlastný integrál $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^3} dx$, $a > 0$. $\left[\frac{3\pi}{8a^5}\right]$

18. Vypočítajte nevlastný integrál $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+6x^2+13} dx$. $\left[\frac{\pi}{8}\right]$

19. Vypočítajte nevlastný integrál $\int_0^{\infty} \frac{x^6}{(x^4+a^2)^2} dx$, $a > 0$. $\left[\frac{3\sqrt{2}\pi}{16a}\right]$

Obyčajné diferenciálne rovnice druhého rádu.

Modelovanie v mechanických a elektrických systémoch

Modelovanie v mechanických a elektrických systémoch, ktoré vedie na ODR 2. rádu.

Mechanické systémy, elektrické systémy a systémy riadenia môžu mať oscilatorické chovanie, t.j. po začiatočnom impulze pomaly klesajú ku nule. Proces, ktorý produkuje slabnutie je disipatívny a odčerpáva energiu zo systému, sa nazýva tlmenie.

Prototypom rovnice, ktorý popisuje tento jav, je nasledujúci úkaz z mechaniky: hmotnosť M umiestnená na horizontálnej ploche (podložke) je priťahovaná strunou zanedbateľnej hodnosti ku pevnému bodu. Systém hmota - struna začne oscilovať okolo určitého bodu, keď hmotnosť vychýlime z jej rovnovážneho stavu a potom pustíme.

Ak t je čas, potom zrýchlenie hmoty je $\frac{d^2x}{dt^2}$, preto sila pohybu hmoty je $M\frac{d^2x}{dt^2}$. Sily pôsobiace proti pohybu sú sily struny úmerné posunu x z rovnovážneho stavu a sily trenia, ktoré sú úmerné rýchlosti $\frac{dx}{dt}$ hmotnosti M. Ak je konštanta úmernosti struny p a konštanta trenia k, potom dve proti sebe pôsobiace sily sú: $k\frac{dx}{dt}$ - sila trenia a px sila struny.

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt} - px$$

alebo

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = 0,\ a = \frac{k}{M},\ b = \frac{p}{M}. \qquad ((1))$$

Ak na strunu pôsobí ešte vonkajšia sila $Mf(t)$, potom rovnica prejde na tvar

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = f(t). \qquad ((2))$$

Podobná rovnica ako rovnica (1) riadi osciláciu náboja q v $R - L - C$ elektrickom okruhu.

Otvorený okruh a) s platňami kondenzátora C nesú začiatočný náboj Q a $-Q$, zatiaľ čo v okruhu s uzavretým spínačom S tento spôsobí, že prúd i preteká okruhom vďaka náboju q v čase t. Odpovedajúce úbytky napätia v smere šípky cez odpor R, indukciu L a kapacitu C sú:

$$V = iR,\ \text{kde}\quad i = \frac{dq}{dt},\ L\frac{di}{dt}\ \text{ a }\ \frac{q}{C}.$$

Aplikáciou Kirchhoffovho zákona, ktorý hovorí, že suma úbytkov napätia v okruhu je nula, dostávame: $L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0$. Elimináciou i a použitím vzťahu $i = \frac{dq}{dt}$ dostaneme homogénnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu pre q :

$$LC\frac{d^2q}{dt^2} + RC\frac{dq}{dt} + q = 0.$$

To je rovnica tvaru (1).

Lineárne ODR druhého rádu s konštantnými koeficientami homogénne

Lineárne obyčajné diferenciálne rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientami druhého rádu homogénne.

Podobné rovnice, ako sme odvodili v predchádzajúcej časti pre pohyb systému hmotnosť - struna, na ktorú pôsobí trenie, alebo zmena náboja v elektrickom R-L-C okruhu. Rovica tohto typu popisuje tiež kyvadlový pohyb závažia zavesenom na žeriave, ktoré je uvedené do pohybu, keď sa žeriav pootočí do novej pozície a ihneď zastane. Pohyb závažia sa dá modelovať tak, ako je znázornené na obrázku, kde l je dĺžka lana žeriavu, m je hmotnosť závažia, F je výsledná sila odporu vzduchu pôsobiaca proti pohybu závažia a Θ je uhlová odchýlka kábla od rovnovážnej polohy. Uhlový moment závažia okolo priamky spájajúcej bod upevnenia kábla O so závažím kolmej na rovinu pohybu je $ml^2\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)$, teda miera zmeny uhlového momentu okolo O je $ml^2\left(\frac{d^2\Theta}{dt^2}\right)$. Momenty pôsobia tak, že závažie je v rovnovážnej polohe udržiavané silou odporu vzduchu F pôsobiacou proti pohybu závažia a krútiacim momentom gravitačnej sily mg okolo bodu O. Ak je odpor vzduchu úmerný rýchlosti pohybu závažia a konštanta úmernosti je μ potom sila trenia je $F=\mu l\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)$, teda restoring moment vynaložený silou F okolo O je $lF=\mu l^{\ 2}\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)$. Krútiaci moment vynaložený gravitačnou silou mg okolo O je $mgl\sin\Theta$, teda zmena miery uhlových momentov sa rovná súčtu obnovujúcich momentov a tak dostávame pohybovú rovnicu:

$$ml^2\frac{d^2\Theta}{dt^2}=-\mu l^2\frac{d\Theta}{dt}-mgl\sin\Theta.$$

Ak je uhol kyvu (pohybu) malý, potom hodnotu $\sin\Theta$ aproximujeme hodnotou Θ a pohybová rovnica sa zjednodušuje na tvar:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\Theta}{dt}+\frac{g}{l}\Theta=0.$$

Je vidieť, že lineárne diferenciálne rovnice majú široké uplatnenie v problémoch z praxe. Budeme analyzovať ich vlastnosti.

Skúmame homogénnu lineárnu obyčajnú diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientami

$$\frac{d^2y}{dx^2}+A\frac{dy}{dx}+By=0. \tag{(1)}$$

Lineárna superpozícia riešení, lineárna závislosť a nezávislosť riešení.

Nech $y_1(x)$ a $y_2(x)$ sú dve rôzne riešenia rovnice (1), potom ich lineárna kombinácia $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$, kde $c_1,\ c_2\in\boldsymbol{R}$ sú ľubovoľné konštanty, je tiež riešením rovnice (1).

$$\frac{d^2y}{dx^2}+A\frac{dy}{dx}+By=\frac{d^2\left[c_1y_1+c_2y_2\right]}{dx^2}+A\frac{d\left[c_1y_1+c_2y_2\right]}{dx}+B\left[c_1y_1+c_2y_2\right]=$$

$$=c_1\left[\frac{d^2y_1}{dx^2}+A\frac{dy_1}{dx}+By_1\right]+c_2\left[\frac{d^2y_2}{dx^2}+A\frac{dy_2}{dx}+By_2\right]=0$$

Teda pre ODR typu (1) platí princíp lineárnej superpozície.

Definition 334 *Funkcie* $y_1(x)$ *a* $y_2(x)$ *sú lineárne nezávislé na intervale* $\langle a,b\rangle$*, ak pre každé* $x \in \langle a,b\rangle$ *rovnosť*

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

platí iba v prípade $c_1 = c_2 = 0$*. Ak funkcie* $y_1(x)$ *a* $y_2(x)$ *nie sú lineárne nezávislé, nazývame ich lineárne závislé.*

Example 335 *Zistite, či sú funkcie lineárne nezávislé, alebo lineárne závislé na svojom definičnom obore:*
a) e^x *a* e^{2x}
a) $\ln x^2$ *a* $\ln x^3$
a) $\sinh 2x$ *a* $\sinh x \cosh x$.

Solution 336 *a) Podiel* $\frac{e^{2x}}{e^x} = e^x \neq const$*, teda funkcie sú lineárne nezávislé.*
b) Podiel $\frac{\ln x^3}{\ln x^2} = \frac{3\ln x}{2\ln x} = \frac{3}{2}$*, teda funkcie sú lineárne závislé a platí* $\ln x^3 = \frac{3}{2}\ln x^2$, $\forall x > 0$.
c) Pretože $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$*, sú funkcie lineárne závislé.* □

Ak sú funkcie $y_1(x)$, $y_2(x)$ diferencovateľné, potom určovať lineárnu nezávislosť týchto funkcií môžeme aj iným spôsobom. Podľa definície lineárnej nezávislosti dvoch funkcií rovnosť

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \text{ pre každé } \quad x \in \langle a,b\rangle$$

platí iba v prípade $c_1 = c_2 = 0$. Diferencujme túto rovnicu a dostaneme rovnosť

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0 \text{ pre každé } x \in \langle a,b\rangle .$$

Potom homogénny systém rovníc má iba triviálne riešenie ak determinant W rovný

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Determinant W nazývame Wronského determinat, alebo wronskián podľa poľského matematika Jozefa Maria Wronského (1778-1853), ktorý prvý zaviedol túto podmienku.

Definition 337 *Ak* $y_1(x)$ *a* $y_2(x)$ *sú lineárne nezávislé riešenia rovnice (1), a* c_1 *a* c_2 *sú ľubovoľné konštanty, potom funkciu* $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ *nazývame všeobecným riešením rovnice (1).*

Example 338 *Ukážme, že obyčajná diferenciálna rovnica* $y'' + 4y = 0$ *má lineárne nezávislé riešenia* $y_1(x) = \cos 2x$, $y_2(x) = \sin 2x$*. Nájdime jej všeobecné riešenie.*

Solution 339 *Dosadením do rovnice dostaneme:* $y_1'' + 4y_1 = -4\cos 2x + 4\cos 2x = 0$ *a* $y_2'' + 4y_2 = -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0$*. Teda* $y_1(x) = \cos 2x$ *a a* $y_2(x) = \sin 2x$ *sú riešenia rovnice. Riešenia sú lineárne nezávislé*

$$W = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\left[\cos^2 2x + \sin^2 2x\right] = 2 \neq 0$$

Riešenia sú teda lineárne nezávislé. Potom $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ *je všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice* $y'' + 4y = 0$. □

Všeobecné riešenie rovnice $\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = 0.$

Je zrejmé, že triviálne riešenie $y(x) \equiv 0$ je riešením diferenciálnej rovnice (1). Teraz nájdeme netriviálne všeobecné riešenie rovnice (1). Riešenie hľadajme v tvare:

$$y(x) = ce^{\lambda x}, \qquad ((2))$$

kde c a λ sú konštanty. Dosaďme (2) do rovnice (1) a dostaneme rovnicu:

$$c\left(\lambda^2 + A\lambda + B\right)e^{\lambda x} = 0.$$

Pretože hľadáme netriviálne riešenie uvedenej rovnice, musí platiť $c \neq 0$, pretože $e^{\lambda x} \neq 0$, dostaneme:

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0. \qquad ((3))$$

Definition 340 *Rovnicu (3) nazývame charakteristickou rovnicou diferenciálnej rovnice (1).*

Kvadratická rovnica (3) má tieto tri možnosti riešení:

I Dva reálne rôzne korene. V tomto prípade je diskriminant kvadratickej rovnice (3) $A^2 - 4B > 0$ a jej riešením sú dva rôzne reálne korene

$$\lambda_1 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2},\ \lambda_2 = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2} \in \boldsymbol{R}.$$

Pretože $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tak $e^{\lambda_1 x}$ a $e^{\lambda_2 x}$ sú lineárne nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice (1) (Platí: $\frac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq const.$) Potom

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x},$$

kde c_1, c_2 sú ľubovoľné reálne konštanty, je všeobecné riešenie rovnice (1).

II Dva komplexne združené korene. V tomto prípade je diskriminant kvadratickej rovnice (3) $A^2 - 4B < 0$ a jej riešením sú dva komplexne združené korene

$$\lambda_1 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2},\ \lambda_2 = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2} \in \boldsymbol{C}.$$

Aj v tomto prípade sú riešenia lineárne nezávislé. Pretože hľadané všeobecné riešenie by malo byť reálne, dosiahneme to tak, že konštanty c_1 a c_2 volíme tiež komplexne združené. Ak teda $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ a $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, kde $\alpha = -\frac{A}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{4B - A^2}}{2}$, tak zodpovedajúce lineárne nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice (1) sú $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Potom

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x\right].$$

kde c_1, c_2 sú ľubovoľné reálne konštanty, je všeobecné riešenie rovnice (1).

III Dva rovnaké reálne korene. V tomto prípade je diskriminant kvadratickej rovnice (3) $A^2 - 4B = 0$ a jej riešením je

$$\vartheta = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{A}{2} \in \boldsymbol{R}.$$

V tomto prípade sme vypočítali iba jedno exponenciálne riešenie $y_1(x) = e^{\mu x}$. Ak položíme $y_2(x) = xe^{\mu x}$ a dosadíme do rovnice (1), dostaneme, že aj $y_2(x)$ je riešením. Potom $y_1(x)$ a $y_2(x)$ sú nezávislé riešenia diferenciálnej rovnice (1) a jej všeobecné riešenie má tvar:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{\mu x}.$$

Definition 341 *Lineárne nezávislé riešenia $y_1(x)$, $y_2(x)$ sa nazývajú báza priestoru riešení rovnice (1).*

Dosiaľ sme dostali všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (1). Teraz pre diferenciálnu rovnicu (1) sformulujeme vhodné začiatočné podmienky. Pretože (1) je lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu, sú v nej vo vzájomnom vzťahu $y(x)$, $y'(x)$ a $y''(x)$, teda vhodnou začiatočnou podmienkou bude špecifikácia $y(x)$ a $y'(x)$ v niektorom bode $x = a$. Potom hodnota $y''(a)$ nebude ľubovoľná, ale ju dostaneme z diferenciálnej rovnice (1) použitím hodnôt $y(a)$ a $y'(a)$. Riešenie rovnice (1), ktoré spĺňa začiatočné podmienky, dostaneme z všeobecného riešenia $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, keď vyriešime systém nasledujúcich rovníc (t.j. nájdeme konštanty c_1, c_2.):

Začiatočná podmienka pre $y(x)$:

$$y(a) = c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a),$$

Začiatočná podmienka pre $y'(x)$:

$$y'(a) = c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a).$$

Systém má riešenie ak je determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{(4)}$$

Overenie pre všetky tri predchádzajúce prípady ponechávame na čitateľa.

Začiatočná úloha.

Definition 342 *Diferenciálnu rovnicu $\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = 0$, so začiatočnými podmienkami $y(a) = y_0$, $y'(a) = y_1$, kde y_0, $y_1 \in \boldsymbol{R}$ nazývame začiatočná uloha (ZÚ) pre rovnicu (1).*

Example 343 *Vypočítajme riešenie ZÚ $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.*

Solution 344 *Charakteristická rovnica je* $\lambda^2+\lambda-2=0 \Longrightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=-2$. *Je to prípad I, teda všeobecné riešenie ZÚ je dané:* $y(x)=c_1e^x+c_2e^{-2x}$. *Použitím začiatočných podmienok dostaneme sústavu:*

$$\begin{array}{ccccc} c_1 & + & c_2 & = & 1 \\ c_1 & - & 2c_2 & = & 2 \end{array},$$

ktorej riešením je $c_1=\frac{4}{3}$, $c_2=-\frac{1}{3}$, *teda riešenie ZÚ je* $y(x)=\frac{4}{3}e^x-\frac{1}{3}e^{-2x}$.□

Example 345 *Vypočítajme riešenie ZÚ* $y''+2y'+4y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$.

Solution 346 *Charakteristická rovnica je* $\lambda^2+2\lambda+4=0 \Longrightarrow \lambda_1=-1+i\sqrt{3},\ \lambda_2=-1-i\sqrt{3}$. *Je to prípad II, teda všeobecné riešenie ZÚ je dané:* $y(x)=c_1e^{-x}\cos\sqrt{3}x+c_2e^{-x}\sin\sqrt{3}x$. *Použitím začiatočných podmienok dostaneme sústavu:*

$$\begin{array}{ccccc} c_1 & & & = & 2 \\ -c_1 & + & \sqrt{3}c_2 & = & 1 \end{array},$$

ktorej riešením je $c_1=2$, $c_2=\sqrt{3}$, *teda riešenie ZÚ je* $y(x)=2e^{-x}\cos\sqrt{3}x+\sqrt{3}e^{-x}\sin\sqrt{3}x=e^{-x}\left[2\cos\sqrt{3}x+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x\right]$.□

Example 347 *Vypočítajme riešenie ZÚ* $y''+4y'+4y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=1$.

Solution 348 *Charakteristická rovnica je* $\lambda^2+4\lambda+4=0 \Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=-2$. *Je to prípad III, teda všeobecné riešenie ZÚ je dané:* $y(x)=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$. *Použitím začiatočných podmienok dostaneme sústavu:*

$$\begin{array}{ccccc} c_1 & & & = & 3 \\ -2c_1 & + & c_2 & = & 1 \end{array},$$

ktorej riešením je $c_1=3$, $c_2=7$, *teda riešenie ZÚ je* $y(x)=3e^{-2x}+7xe^{-2x}$.□

Theorem 349 *(O existencii a jednoznačnosti riešení homogénnej rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientami) Nech diferenciálna rovnica (1) má dve lineárne nezávislé riešenia* $y_1(x)$ *a* $y_2(x)$. *Potom pre každé* $x=a$ *a čísla* y_0 *a* y_1 *existuje jediné riešenie rovnice (1), ktoré spĺňa začiatočné podmienky* $y(a)=y_0$, $y'(a)=y_1$.

Dôkaz: Existenciu sme ukázali pri analýze prípadov I, II, III a jednoznačnosť ponechávame na čitateľa. (Overiť že $\Delta\neq 0$ v každom z prípadov I, II, III.).■

Okrajová úloha (dvojbodový problém).

Iný typ problémov súvisiacich s obyčajnými diferenciálnymi rovnicami druhého rádu sa vyskytuje v prípade, keď požadujeme, aby riešenie diferenciálnej rovnice druhého rádu spĺňalo podmienky v dvoch rôznych bodoch $x=a$ a $y=b$ namiesto toho, aby sme požadovali splnenie dvoch začiatočných podmienok. Problémy tohto typu sa nazývajú dvojbodové okrajové úlohy (OÚ), pretože body a a b chápeme ako hranice, medzi ktorými hľadáme riešenie, ktoré musí spĺňat dané okrajové podmienky. Typický dvojbodový problém je úloha nájsť riešenie diferenciálnej rovnice

$$y'' + Ay' + By = 0 \text{ pre } a < x < b, \tag{(5)}$$

ktoré spĺňa okrajové podmieny v bodoch

$$\begin{array}{c} x = a : \alpha y(a) + \beta y'(a) = \mu, \\ x = b : \gamma y(b) + \delta y'(b) = \kappa, \end{array} \tag{(6)}$$

kde α, β, γ, δ, μ, κ sú dané konštanty.

Example 350 *Riešme dvojbodovú okrajovú úlohu* $y'' + 2y' + 17y = 0$ *s okrajovými podmienkami* $y(0) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Solution 351 *Charakteristická rovnica je* $\lambda^2 + 2\lambda + 17 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1 + 4i$, $\lambda_2 = -1 - 4i$. *Teda všeobecné riešenie OÚ je:* $y(x) = c_1 e^{-x}\cos 4x + c_2 e^{-x}\sin 4x$. *Použitím okrajovej podmienky* $y(0) = 1$ *dostaneme* $c_1 = 1$, *z okrajovej podmienky* $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ *dostaneme* $-e^{-\frac{\pi}{4}} + 4c_2 e^{-\frac{\pi}{4}} = 0$ *t.j.* $c_2 = \frac{1}{4}$. *Teda riešenie OÚ je* $y(x) = e^{-x}\left(\cos 4x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)$ *pre* $0 < x < \frac{\pi}{4}$.$\square$

Lineárne ODR druhého rádu s konštantnými koeficientami nehomogénne

Nehomogénne lineárne obyčajné diferenciálne rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientami.

Nehomogénna lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami je rovnica:

$$a_0 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = f(t), \tag{(7)}$$

kde t považujeme za čas a funkcia $f(t)$ je vonkajší vstup systému. Je to najjednoduchší matematický model schopný reprezentovať oscilatorické chovanie fyzikálnych systémov.

V predchádzajúcej časti sme ukázali, že jeden typ takýchto rovníc nastáva, keď popisujeme pohyb sústavy hmotnosť - struna, v ktorej sa hmotnosť pohybuje po nerovnom horizontálnom povrchu, keď proti pohybu hmotnosti pôsobí sila trenia, ktorá je úmerná rýchlosti pohybujúcej sa hmotnosti. Trenie rozptyľuje energiu, čo spôsobuje zánik pohybu ku nule s rastom času, aj keď v systéme pôsobí externý zdroj energie v tvare silovej funkcie, ktorá je v (7) reprezentovaná výrazom $f(t)$. Rozptyľovanie energie pôsobením trenia alebo podobného javu sa nazýva tlmenie. V druhom príklade R-L-C okruhu kde náboj q na kondenzátore spĺňa homogénnu rovnicu (7), kde $a_0 = LC$, $a_1 = RC$ a $a_3 = 1$, tlmenie spôsobuje disipatívny člen $a_1 = RC$. Iný model, ktorý je popísaný rovnicou (7), sa realizuje v prípade, keď cylindrickú hmotnosť s momentom zotrvačnosti I skrúcame okolo jej osi s odporom voči torzii, ktorý je úmerný uhlu natočenia Θ a tlmenie, úmerné s uhlovou rýchlosťou $\frac{d\Theta}{dt}$ okolo hriadeľa. Rovnica popisujúca torzné oscilácie $\Theta(t)$ ako funkciu času je

$$I\frac{d^2\Theta}{dt^2} + k\frac{d\Theta}{dt} + \mu\Theta = f(t),$$

kde k a μ sú konštanty a $f(t)$ je silová funkcia.

Mnoho iných fyzikálnych situácií možno reprezentovať rovnicou podobnou so (7). Predokladsáme, že $a_0 \neq 0$ a rovnicu (7) preformulujeme do nasledujúceho tvaru:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_2 y = f(x), \qquad ((8))$$

Riešiť nehomogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientami (8) znamená nájsť partikulárne riešenie $y_p(x)$ nehomogénnej rovnice (8) t.j.

$$\frac{d^2y_p(x)}{dx^2} + a_1\frac{dy_p(x)}{dx} + a_2 y_p(x) = f(x),$$

a všeobecné riešenie $y_h(x)$ homogénnej diferenciálnej rovnice (8),

$$\frac{d^2y_h(x)}{dx^2} + a_1\frac{dy_h(x)}{dx} + a_2 y_h(x) = 0.$$

Partikulárne riešenie $y_h(x)$ neobsahuje žiadne neurčité konštanty. Všeobecné riešenie nehomogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu (8) je potom ich súčtom: $y(x) = y_h(x) + y_P(x)$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_2y = \frac{d^2(y_h(x)+y_P(x))}{dx^2}+a_1\frac{d(y_h(x)+y_P(x))}{dx}+a_2(y_h(x)+y_P(x)) =$$

$$= \frac{d^2y_p(x)}{dx^2} + a_1\frac{dy_p(x)}{dx} + a_2y_p(x) + \frac{d^2y_h(x)}{dx^2} + a_1\frac{dy_h(x)}{dx} + a_2y_h(x) = f(x).$$

Ako nájsť všeobecné riešenie homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu sme vysvetlili v predchádzajúcej kapitole. Tak máme:

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

Zameriame sa na výpočet partikulárneho riešenia nehomogénnej lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu. Na jej riešenie použijeme metódu variácie konštánt. Najskôr nájdeme dve lineárne nezávislé riešenia homogénnej rovnice. Potom partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice budeme hľadať v tvare $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, kde $u_1(x)$ a $u_2(x)$ sú neznáme funkcie, ktoré musíme vypočítať. Potrebujeme dve rovnice, aby sme našli neznáme funkcie $u_1(x)$ a $u_2(x)$. Najskôr nájdeme prvú rovnicu. Zderivujeme funkciu $y_p'(x)$:

$$y_p'(x) = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x) + u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x).$$

Budeme požadovať, aby

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0,$$

potom

$$y_p'(x) = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x).$$

Zderivujeme funkciu $y_p'(x)$ ešte raz: $y_p''(x) = u_1(x)\,y_1''(x) + u_2(x)\,y_2''(x) + u_1'(x)\,y_1'(x) + u_2'(x)\,y_2'(x)$ a dosadíme do rovnice (8). Dostaneme:

$$u_1(x)\,y_1''(x)+u_2(x)\,y_2''(x)+u_1'(x)\,y_1'(x)+u_2'(x)\,y_2'(x)+a_1\left(u_1(x)\,y_1'(x)+u_2(x)\,y_2'(x)\right)+$$
$$+a_2\left(u_1(x)\,y_1(x)+u_2(x)\,y_2(x)\right)=f(x),$$

rovnicu preformulujeme do tvaru:

$$u_1(x)\underbrace{\left[y_1''(x)+a_1y_1'(x)+a_2y_1(x)\right]}_{=0}+u_2(x)\underbrace{\left[y_2''(x)+a_1y_2'(x)+a_2y_2(x)\right]}_{=0}+$$
$$+u_1'(x)\,y_1'(x)+u_2'(x)\,y_2'(x)=f(x),$$

Pretože $y_1(x)$, $y_2(x)$ sú riešenia homogénnej úlohy, dostaneme druhú rovnicu:

$$u_1'(x)\,y_1'(x)+u_2'(x)\,y_2'(x)=f(x).$$

Tak hľadáme riešenie sústavy:

$$\begin{array}{ccccc} u_1'(x)\,y_1(x) & + & u_2'(x)\,y_2(x) & = & 0 \\ u_1'(x)\,y_1'(x) & + & u_2'(x)\,y_2'(x) & = & f(x) \end{array}.$$

Pretože wronskián

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=y_1(x)\,y_2'(x)-y_1'(x)\,y_2(x)\neq 0.$$

Potom

$$u_1'(x)=-\frac{y_2(x)\,f(x)}{W(x)} \quad \text{a} \quad u_2'(x)=\frac{y_1(x)\,f(x)}{W(x)},$$

odkiaľ

$$u_1(x)=-\int\frac{y_2(x)\,f(x)}{W(x)}dx \quad \text{a} \quad u_2(x)=\int\frac{y_1(x)\,f(x)}{W(x)}dx.$$

Potom dostaneme

$$y_p(x)=-y_1(x)\int\frac{y_2(x)\,f(x)}{W(x)}dx+y_2(x)\int\frac{y_1(x)\,f(x)}{W(x)}dx. \qquad ((9))$$

Example 352 *Nájdite všeobecné riešenie obyčajnej diferenciálnej rovnice* $y''+2y'+y=xe^{-x}$.

Solution 353 *Charakteristická rovnica je* $\lambda^2+2\lambda+1=0 \Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=-1$, *teda všeobecné riešenie homogénnej rovnice je dané:* $y_h(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$. *Báza riešení homogénnej úlohy (dve lineárne nezávislé riešenia) sú:* $y_1(x)=e^{-x}$, $y_2(x)=xe^{-x}$. *Potom wronskián je daný vzťahom:*

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=e^{-x}\left(e^{-x}-xe^{-x}\right)+e^{-x}xe^{-x}=e^{-2x}.$$

Dosadením do vzťahu (9) dostaneme:

$$y_p(x)=-y_1(x)\int\frac{y_2(x)\,f(x)}{W(x)}dx+y_2(x)\int\frac{y_1(x)\,f(x)}{W(x)}dx=$$

$$= -e^{-x}\int\frac{xe^{-x}xe^{-x}}{e^{-2x}}dx + xe^{-x}\int\frac{e^{-x}xe^{-x}}{e^{-2x}} =$$

$$= -e^{-x}\int x^2dx + xe^{-x}\int xdx = \frac{1}{6}x^3e^{-x}.$$

Potom hľadané všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice bude: $y_h(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{1}{6}x^3e^{-x}.\square$

Cvičenia.

1. Zistite, či sú nasledujúce dvojice funkcií lineárne nezávislé, alebo lineárne závislé:

   (a) $\sinh^2 x,\ \cosh^2 x,$ pre každé $x \in \boldsymbol{R}$,

   (b) $\cos x,\ \sin x,$ pre každé $x \in \boldsymbol{R}$,

   (c) $1+x,\ 1+x^2,$ pre každé $x \in \boldsymbol{R}$,

   (d) $e^{2x},\ xe^{2x},$ pre každé $x \in \boldsymbol{R}$,

   (e) $\sin x,\ \operatorname{tg} x,\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle,$

   (f) $\sin x,\ |\sin x|\,,\ x \in \langle \pi, 2\pi \rangle\,,$

   (g) $x\,|x|\,,\ x^2,\ x \geq 0.$

2. Vypočítajte všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice:

   (a) $y'' + 3y' - 4y = 0.$ $[y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}]$

   (b) $y'' - 2y' + 2y = 0.$ $[y(x) = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)]$

   (c) $y'' + 6y' + 9y = 0.$ $[y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}]$

3. Vyriešte začiatočné úlohy:

   (a) $y'' + 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$ $[y(x) = 5e^{-2x} - 4e^{-3x}]$

   (b) $y'' + 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 1.$ $[y(x) = e^{-x}(3\cos x + 4\sin x)]$

   (c) $y'' - 3y' - 4y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2.$ $\left[y(x) = -\frac{6}{5}e^{-x} + \frac{1}{5}e^{4x}\right]$:

4. Vypočítajte všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice:

   (a) $y'' + 2y' - 3y = 4 + x + 4e^{2x}.$
   $\left[y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{3}x + \frac{4}{5}e^{2x} - \frac{14}{9}\right]$

   (b) $y'' + 4y' + 4y = 2 - \sin 3x.$
   $\left[y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{12}{169}\cos 3x + \frac{5}{169}\sin 3x + \frac{1}{2}\right]$

   (c) $y'' + 2y' - 8y = 3x\cos 4x.$
   $\left[y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x} + \frac{3}{200}\cos 4x + \frac{57}{1600}\sin 4x - \frac{9}{80}x\cos 4x + \frac{3}{80}x\sin 4x\right]$

5. Vyriešte začiatočné úlohy:

   (a) $y'' + 2y' + 5y = 2\sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
   $$\left[\begin{array}{c} \text{Všeobecné riešenie D.R. : } y(x) = \frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x + C_1(\cos 2x)e^{-x} + C_2(\sin 2x)e^{-x} \\ \text{Riešenie ZÚ: } y(x) = \frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x + \frac{6}{5}(\cos 2x)e^{-x} + \frac{2}{5}(\sin 2x)e^{-x} \end{array}\right]$$

   (b) $y'' + 2y' + y = \sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
   $$\left[\begin{array}{c} \text{Všeobecné riešenie D.R. : } y(x) = C_1 e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + C_2 x e^{-x} \\ \text{Riešenie ZÚ: } y(x) = \frac{3}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}xe^{-x} - \frac{1}{2}\cos x \end{array}\right]$$

   (c) $y'' + 3y' + 2y = \sin 3x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
   $$\left[\begin{array}{c} \text{Všeobecné riešenie D.R. : } y(x) = C_1 e^{-x} - \frac{7}{130}\sin 3x - \frac{9}{130}\cos 3x + C_2 e^{-2x} \\ \text{Riešenie ZÚ: } y(x) = \frac{3}{10}e^{-x} + \frac{3}{13}e^{-2x} - \frac{7}{130}\sin 3x - \frac{9}{130}\cos 3x \end{array}\right]$$

BIBLIOGRAPHY

[1] Galanová, J., Gatial, J., Kaprálik, P.: Lineárna algebra, STU Bratislava, 2002

[2] Marko Ľ.: Matematická analýza online, 2001, http://aladin.elf.stuba.sk/~marko

[3] Stroud,K.A.: Engineering Mathematics, Macmillan Presss LTD, Hong Kong, 1993

[4] Šulka, R., Moravský, L., Satko, L.: Matematická analýza I, Alfa, SNTL, Bratislava 1986

[5] Glyn, J.: Modern engineering mathematics, Addison Wesley, 2008