Prednáška z M3E - Calculus
Komplexná premenná.

Ľ. Marko
FEI STU

1 Komplexné čísla a funkcie komplexnej premennej.

1.1 Definícia komplexného čísla. Komplexné čísla a algebraické operácie s nimi.

V množine reálnych čísel $\boldsymbol{R}$ neexistuje číslo, ktoré by bolo riešením rovnice

$$x^2 + 1 = 0. \qquad ((1))$$

Aby sme odstránili tento defekt v systéme reálnych čísel zavedieme nový číselný systém.

Definition 1 *Symbolom $\boldsymbol{C}$ označíme množinu $\{z = x + iy : x,\, y \in \boldsymbol{R}\}$*

s nasledujúcimi operáciami:

1. sčítanie: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$,
2. násobenie: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)\,,$ pre $z_1 = x_1 + iy_1,\, z_2 = x_2 + iy_2 \in \boldsymbol{C}$.

Čísla tvaru

$$z = x + iy,$$

kde $x,\, y \in \boldsymbol{R}$ sa nazývajú komplexné čísla. Takýto tvar komplexných čísel sa nazýva algebrický alebo kartézsky tvar komplexného čísla z. Symbol, ktorý označíme i nazývame imaginárna jednotka. Toto komplexné číslo $i = 0 + 1i$ spĺňa základné zákony algebry: asociatívny, komutatívny a distributívny zákon a okrem toho rovnosť

$$i^2 = -1.$$

Potom rovnica (1) má v $\boldsymbol{C}$ dva korene i a $-i$.

Násobenie komplexných čísel v algebrickom tvare je definované ako násobenie polynómov s použitím rovností $i^2 = -1$, $(i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ \ldots.)$

Terminológia: reálne číslo x sa nazýva reálna časť komplexného čísla z, reálne číslo y imaginárna časť komplexného čísla z, čo budeme označovať $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Ak $y = 0$ číslo z nazývame rýdzo reálne číslo, ak $x = 0$ číslo z nazývame rýdzo imaginárne číslo. Geometricky komplexné číslo $z = x + iy$ odpovedá bodu so súradnicami $(x,\, y)$ v rovine Oxy alebo vektoru $\boldsymbol{r} = \overline{(x,\, y)}$, kde rýdzo reálne čísla ležia na osi o_x, ktorú nazývame reálna os a rýdzo imaginárne čísla ležia na osi o_y, ktorú nazývame imaginárna os.

Dve komplexné čísla $x + iy$ a $x - iy$ s rovnakými reálnymi časťami a opačnými imaginárnymi časťami sa nazývajú komplexne združené čísla. Komplexne združené číslo k číslu $z = x + iy$ budeme označovať $\overline{z} = x - iy$ a v rovine Oxy sú to čísla symetrické podľa reálnej osi a platí $z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$. Pravidlá konjugovania:

$\overline{(\overline{z})} = z$,

$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,

$\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}, \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

Množinu všetkých komplexných čísel označíme $\boldsymbol{C}$ a množinu všetkých bodov $(x,\, y)$ v rovine Oxy, ktoré odpovedajú komplexným číslam $x+iy$ nazývame komplexná rovina. Existuje jednoznačné priradenie medzi $\boldsymbol{C}$ a množinou všetkých komplexných bodov v komplexnej rovine a odteraz nebudeme rozlišovať medzi týmito množinami.

Poloha komplexného čísla $z = x+iy$ sa dá určiť aj použitím polárnych súradníc r, φ. Kladné reálne číslo r rovné vzdialenosti bodu $(x,\, y)$ odpovedajúceho bodu $z = x + iy$ od stredu súradnicového systému nazývame modul alebo absolútna hodnota komplexného čísla z a definujeme:

$$|| \,:\, \boldsymbol{C} \longrightarrow \langle 0, \infty) \,,\; r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\text{tak máme } |z| = |z \cdot \overline{z}|^{\frac{1}{2}} = |\overline{z}| = |z| \,,\; |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \,.$$

Uhol medzi kladným smerom reálnej osi a vektorom $\overline{(x,\, y)}$ nazývame argument komplexného čísla $z = x+iy$. (Používa sa aj názov amplitúda).

$$\varphi = \operatorname{Arg}\, z.$$

Modul komplexného čísla z je definovaný jednoznačne, ale pre argument máme

$$\operatorname{Arg}\, z = \{\arg z + 2k\pi,\; k = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots\} \,,$$

čo chápeme tak, že pre dané komplexné číslo $z \in \boldsymbol{C}$ vieme nájsť nekonečne mnoho hodnôt jeho argumentu, preto zavádzame funkciu

$$\arg \,:\, \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow (-\pi,\, \pi\rangle \,, \qquad ((2))$$

ktorú nazývame hlavnou hodnotou (alebo hlavnou vetvou) argumentu z.

Pripomeňme si, že za predpokladu (2) má hlavná hodnota argumentu $\arg z$ nespojitosť na zápornej časti reálnej osi:

a) ak sa bod z „blíži“ ku bodu na zápornej časti reálnej osi „zhora“ potom $\arg z$ sa „blíži“ k hodnote π,

b) ak sa bod z „blíži“ ku bodu na zápornej časti reálnej osi „zdola“ potom $\arg z$ sa „blíži“ k hodnote $-\pi$.

Pre komplexné čísla $z = 0$ a $z = \infty$ (ktoré zavedieme neskôr) Arg z nie je definovaná.

Remark 2 *Niektorí autori zavádzajú funkciu hlavná hodnota argumentu z takto:* $\arg : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \langle 0, 2\pi)$.

Ak z je rýdzo reálne kladné číslo, potom $\arg z = 0$. Ak z je rýdzo reálne záporné číslo, potom $\arg z = \pi$. Ak z je rýdzo imaginárne číslo s kladnou imaginárnou časťou, potom $\arg z = \frac{\pi}{2}$.Ak z je rýdzo imaginárne číslo so zápornou imaginárnou časťou, potom $\arg z = -\frac{\pi}{2}$. Ľahko nahliadneme, že

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}\ \text{ ak }\ x \neq 0,\ \operatorname{cotg}\varphi = \frac{x}{y}\ \text{ ak }\ y \neq 0. \tag{(3)}$$

Example 3 *Nájdime vzťahy pre výpočet hlavnej hodnoty argumentu* $\arg z$.

Solution 4 *Dostávame*

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & \textit{pre} \quad x > 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \textit{pre} \quad x < 0,\ y \geq 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \textit{pre} \quad x < 0,\ y < 0 \end{cases}.$$

ak predpokladáme, že $-\pi < \arg z \leq \pi$ *a* $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \leq \frac{\pi}{2}$.

Ľahko vidieť, že

$$|z| = |\overline{z}| \quad \text{a} \quad \arg\overline{z} = -\arg z.$$

Ak predpokladáme, že $\varphi = \arg z$, môžme definovať trigonometrický (goniometrický) tvar komplexného čísla z

$$z = x + iy = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

Example 5 *Nájdime trigonometrický tvar komplexného čísla* $z = 1 - i$.

Solution 6 *Použitím vzťahov (2) a (3) máme*

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad a \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{1} = -1,$$

t.j.

$$\arg z = -\frac{\pi}{4} \quad a \quad z = 1 - i = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] . \square$$

Example 7 *Nájdime trigonometrický tvar nasledujúcich komplexných čísel:* $z_1 = 2$, $z_2 = -3$, $z_3 = 3i$, $z_4 = -2i$.

Solution 8 *Priamo môžeme písať:*

$$|z_1| = 2, \arg z_1 = 0, \quad tak \quad z_1 = 2 = 2(\cos 0 + i \sin 0),$$

$$|z_2| = 3, \arg z_2 = \pi, \quad tak \quad z_2 = -3 = 3 (\cos \pi + i \sin \pi),$$

$$|z_3| = 3, \arg z_3 = \frac{\pi}{2}, \quad tak \quad z_3 = 3i = 3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right),$$

$$|z_4| = 2, \arg z_4 = -\frac{\pi}{2}, \quad tak \quad z_4 = -2i = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) . \square$$

Použitím Eulerovej formuly (ktorú dokážeme neskôr)

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

môžeme definovať exponenciálny tvar komplexného čísla z

$$z = |z| \, e^{i\varphi}.$$

Example 9 *Nájdime exponenciálny tvar komplexných čísel z predchádzajúcich príkladov.*

Solution 10 *Máme*

$$z = 1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}, \ z_1 = 2e^{i0}, \ z_2 = -3 = 3e^{i\pi},$$

$$z_3 = 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}, \ z_4 = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} . \square$$

Je jasné, že v množine komplexných čísel nemožno zaviesť usporiadanie ale je možné porovnávať moduly komplexných čísel. Napríklad $|10i| > |i|$ alebo $|2 + 3i| < |6 + 5i|$.

Ak z_1 a z_2 sú dané v trigonometrickom a v exponenciálnom tvare

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1} \quad \text{a} \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2},$$

potom máme

$$z = z_1 z_2 = r_1 \left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right) r_2 \left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) = r_1 r_2 \left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right),$$

$$z = z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

čo implikuje

$$|z| = |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|\,,$$

$$\text{Arg } z = \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2.$$

Pretože $-\pi < \arg z \leq \pi$ pre hlavné hodnoty dostaneme

$$\arg(z_1 z_2) = \begin{cases} \arg z_1 + \arg z_2 & \text{pre} \quad \arg z_1 + \arg z_2 \in (-\pi,\, \pi\rangle \\ \arg z_1 + \arg z_2 - 2\pi & \text{pre} \quad \arg z_1 + \arg z_2 > \pi \\ \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi & \text{pre} \quad \arg z_1 + \arg z_2 < -\pi \end{cases}.$$

Delenie dvoch komplexných čísel $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ definujeme

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Použitím

$$\frac{z_1}{z_2} z_2 = z_1$$

dostaneme

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

a pre trigonometrický a exponenciálny tvar:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)}{r_2 \left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)} = \frac{r_1}{r_2} \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

$$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg } z_1 \setminus \text{Arg } z_2.$$

Pre hlavné hodnoty argumentu platia podobné pravidlá ako pre násobenie a čitateľ si ich iste odvodí aj sám.

Geometrický význam

1. sčítanie: $z, a \in \boldsymbol{C}$, potom $z + a$ reprezentuje posun bodu z o vektor a,

2. násobenia: $za = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,|a|(\cos\psi + i\sin\psi) = |z|\,|a|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$
znamená pootočenie o uhol ψ a rovnoľahlosť so stredom v začiatku
s koeficientom $|a|$,

3. delenia: odporúčame odvodiť čitateľovi.

Example 11 *Daný je trojúholník s vrcholmi $1+i,\ i,\ -1+2i$. Otočte tento trojúholník o pravý uhol vzhľadom k počiatku.*

Solution 12 *Pootočené vrcholy: $i(1+i) = -1+i,\ i^2 = -1,\ i(-1+2i) = -2-i$, alebo ďalšia možnosť: $(-i)(1+i) = 1-i,\ (-i)\,i = 1,\ (-i)(-1+2i) = 2+i$*

Modul rozdielu dvoch komplexných čísel $z_1,\ z_2$ je rovný vzdialenosti bodov $(x_1,\,y_1)$ a $(x_2,\,y_2)$ t.j.

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}.$$

Overte platnosť nasledujúcich nerovností:

1. $|\mathrm{Re}\,z|\,,|\mathrm{Im}\,z| \le |z|\,,$

2. $|z+w| \le |z| + |w|$ (trojuholníková nerovnosť)

3. $|z+w| \ge ||z| - |w||\,,$

4. $|z| \le |\mathrm{Re}\,z| + |\mathrm{Im}\,z|\,.$

Example 13 *Aké geometrické útvary v rovine reprezentujú nasledujúce popisy:*

$\{z \in \boldsymbol{C} :\ |z-a| = r\} = S(a,\,r),\ r > 0, a \in \boldsymbol{C}$ *je kružnica v komplexnej rovine $\boldsymbol{C}$ so stredom v bode $z=a$ a s polomerom r,*

$\{z \in \boldsymbol{C} : |z-a| < r\} = K(a,\,r)\,,\ r > 0, a \in \boldsymbol{C}$ *je vnútro kruhu so stredom v bode $z=a$ s polomerom r,*

$\{z \in \boldsymbol{C} :\ |z-a| > r\} = \boldsymbol{C} \setminus \overline{K(a,\,\rho)},\ r > 0, a \in \boldsymbol{C}$ *je množina všetkých vonkajších bodov kruhu so stredom v bode $z=a$ a s polomerom r,*

$[z_1, z_2] = \{z_1 + t(z_2 - z_1) : t \in \langle 0,1 \rangle\}$ *je úsečka,*

$\{z \in \boldsymbol{C} :\ \mathrm{Re}\,z \ge 5\}$ *je polrovina,*

$\left\{z \in \boldsymbol{C} :\ \frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{3\pi}{4}\right\}$ *je uhol s vrcholom v bode 0 a s ramenami $\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}$,*

$\{z \in \boldsymbol{C} :\ |z-a| = |z-b|\}\,, a \ne b,$ *je os úsečky $[a,b]\,.$*

1.2 Mocnina komplexného čísla.

Ak n je prirodzené číslo, potom aplikáciou pravidla pre násobenie komplexných čísel ľahko odvodíme, že ak $z = re^{i\varphi}$, potom

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi},$$

čo pre trigonometrický tvar dáva

$$z^n = r^n \left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right).$$

Posledná rovnosť implikuje tzv. Moivreovu formulu:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi),$$

odkiaľ napríklad pre $n = 2$ máme

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,\ \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

a pre $n = 3$ dostaneme

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi,\ \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$$

1.3 Odmocnina komplexného čísla.

Nech $z(\neq 0, \infty)$ je komplexné číslo a n je prirodzené číslo. Hľadáme všetky riešenia binomickej rovnice

$$w^n = z \tag{(4)}$$

Nech $z = re^{i\varphi}$ a $w = \rho e^{i\Theta}$. Potom máme

$$\rho^n e^{in\Theta} = re^{i\varphi},$$

čo implikuje

$$\rho^n = r \ \text{ a } \ n\Theta = \varphi + 2k\pi, \ \text{ pre } \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{(5)}$$

a (5) definuje jediné kladné riešenie ρ a množinu hodnôt Θ:

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \Theta = \Theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}. \tag{(6)}$$

Ak položíme $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ v druhej rovnici (6) dostaneme n rôznych hodnôt Θ_k :

$$\Theta_0 = \frac{\varphi}{n},\ \Theta_1 = \frac{\varphi + 2\pi}{n},\ \Theta_2 = \frac{\varphi + 4\pi}{n},\ \ldots,\ \Theta_{n-1} = \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n},$$

takých že ďalšie hodnoty Θ_k pre $k = \ldots, -n, -(n-1), \ldots, -2, -1, n, n+1, \ldots$ sa líšia od týchto hodnôt iba o násobok čísla 2π. Tak rovnice (5) definujú iba n rôznych hodnôt

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad \text{pre} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{(7)}$$

ktoré sú riešeniami rovnice (4). Ak komplexné číslo z zapíšeme v trigonometrickom tvare $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, a korene rovnice (4) napíšeme tiež v trigonometrickom tvare:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad \text{pre} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{(8)}$$

Formula (6) implikuje, že každá z rôznych hodnôt w_k má ten istý modul $\sqrt[n]{|z|}$ a ich argumenty sa líšia iba o hodnotu $\frac{2\pi}{n}$, čo znamená, že každé riešenie w_k rovnice (4) leží na kružnici $S\left(0, \sqrt[n]{|z|}\right)$. a argument prvej hodnoty $(k = 0)$ sa rovná $\frac{\varphi}{n}$. Túto hodnotu

$$w_0 = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

nazývame hlavnou vetvou n-tej odmocniny z komplexného čísla z.

Pre hodnoty $z = 0$ a $z = \infty$ definujeme jediné hodnoty odmocnín $w = 0$ a $w = \infty$.

Example 14 *Nájdime všetky riešenia rovnice* $z^3 = 1 + i$.

Pretože

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

dostaneme

$$z_k = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right), \; k = 0, 1, 2$$

Teda máme

$$k = 0, \; z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$k = 1, \; z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}\right),$$

$$k = 2, \; z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right). \square$$

2 Cvičenia.

1. Nájdite modul, hlavnú hodnotu argumentu a zobrazte v komplexnej rovine nasledujúce komplexne čísla:

   (a) $1-\sqrt{3}i$, $\left[2,\ -\frac{\pi}{3}.\right]$

   (b) $-2+2i$, $\left[2\sqrt{2},\ \frac{3\pi}{4}.\right]$

   (c) $-4, [4,\ \pi.]$

   (d) i^5. $\left[1, \frac{\pi}{2}.\right]$

2. Zapíšte nasledujúce čísla v trigonometrickom a exponenciálnom tvare:

   (a) $1+\sqrt{3}i$, $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right), 2e^{i\frac{\pi}{3}}.\right]$

   (b) $2+2i$, $\left[2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right), 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.\right]$

   (c) $-2, [2(\cos\pi+i\sin\pi), 2e^{i\pi}.]$

   (d) $-i^3$. $\left[\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right), e^{i\frac{\pi}{2}}.\right]$

3. Vypočítajte a napíšte v algebrickom tvare:

   (a) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^3$, $[-8.]$

   (b) $\frac{(1-i)^2}{1+i}$. $[-1-i.]$

4. Nájdite všetky korene rovníc a zobrazte ich v komplexnej rovine

   (a) $z^3=i$, $\left[w_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, w_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, w_3=-i.\right]$

   (b) $z^4=-1$, $\left[w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, w_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, w_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i, w_4=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i.\right]$

   (c) $z^4=1-\sqrt{3}i$,
   $$\begin{bmatrix} w_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right), w_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right), \\ w_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right), w_4=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right) \\ \text{alebo}\quad w_4=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right). \end{bmatrix}$$

   (d) $z^4=1, [w_1=1, w_2=i, w_3=-1, w_4=-i.]$

   (e) $z^3=-1$. $\left[w_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, w_2=-1, w_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.\right]$

3 Základné pojmy analýzy v $\boldsymbol{C}$.

3.1 Okolia, oblasti.

Základom analýzy je pojem limity, preto zopakujeme pojem okolia bodu, ktoré sme zaviedli už pre reálne funkcie viacerých premenných. Nech $a \in \boldsymbol{C}$, $a \neq \infty$. Množina

$$O_{\varepsilon}(a) = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-a| < \varepsilon\}$$

sa nazýva ε-okolie bodu a. Množinu

$$O_{\varepsilon}^{\circ}(a) = O_{\varepsilon}(a) \setminus \{a\} = \{z \in \boldsymbol{C} : 0 < |z-a| < \varepsilon\}$$

nazývame ε-prstencovým okolím bodu a.

3.2 Nekonečno.

Ku množine všetkých konečných komplexných čísel pridáme jedno nekonečné komplexné číslo, ktoré označíme ∞ a nazývame nekonečno. Pre ∞ nemá zmysel definovať argument a modul definujeme takto: $|\infty| = +\infty$. Označíme $\overline{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$.

Rozšírená aritmetika: $\forall a \in \boldsymbol{C} : -\infty = \infty,\ a \pm \infty = \infty,\ a.\infty = \infty,\ \frac{a}{\infty} = 0,\ \frac{a}{0} = \infty$ pre $a \neq 0$.

Množinu $O_{\varepsilon}(\infty) = \{z \in \boldsymbol{C}; |z| > \frac{1}{\varepsilon}\}$ nazývame ε-okolím bodu ∞, definujeme $O_{\varepsilon}(\infty) = O_{\varepsilon}^{\circ}(\infty)$.

Definition 15 *Nech $E \subset \boldsymbol{C}$. Bod $a \in E$ sa nazýva vnútorný bod množiny E, ak $\exists\ \varepsilon > 0$ tak, že $O_{\varepsilon}(a) \subset E$.*

Bod $a \in \boldsymbol{C}$ sa nazýva hraničným bodom množiny E ak pre každé $\varepsilon > 0$ $O_{\varepsilon}(a)$ obsahuje ako body z množiny E, tak aj body, ktoré neležia v množine E, teda $\forall O_{\varepsilon}(a)$ platí $O_{\varepsilon}(a) \cap E \neq \emptyset \wedge O_{\varepsilon}(a) \cap (\boldsymbol{C} \setminus E) \neq \emptyset$,

Bod $a \in \boldsymbol{C}$ sa nazýva vonkajším bodom množiny E ak $\exists\ \varepsilon > 0$ tak, že $O_{\varepsilon}(a) \cap E = \emptyset$.

Množinu všetkých vnútorných (hraničných, vonkajších) bodov množiny E nazývame vnútrom (hranicou, vonkajškom) množiny E a označujeme $intE$ $(\partial E, extE)$.

Bod $a \in \boldsymbol{C}$ sa nazýva hromadný bod množiny E ak $\forall \varepsilon > 0$ je $O_{\varepsilon}^{\circ}(a) \cap E \neq \emptyset$.

Množina E sa nazýva otvorená, ak $E = intE$, uzáverom $\overline{E}$ množiny E nazývame $\overline{E} = E \cup \partial E$. Množinu nazývame uzavretá, ak platí $\overline{E} = E$ (E je uzavretá $\iff \boldsymbol{C} \setminus E$ je otvorená $\iff \partial E \subset E$), $\emptyset$ je otvorená množina.

Definition 16 *Množina $D \subset \boldsymbol{C}$ taká, že*

1. D obsahuje len vnútorné body (je otvorená),

2. ľubovoľné dva body z D možno spojiť spojitou čiarou, ktorá celá leží v D,

sa nazýva oblasť. Množinu bodov pozostávajúcu z oblasti D a jej hranice ∂D nazveme uzavretou oblasťou a značíme $\overline{D} = D \cup \partial D$.

Example 17 *Množiny bodov Nech $\{z \in \boldsymbol{C} : |z-a| < \varepsilon\}$ a $\{z \in \boldsymbol{C} : |z-a| > \varepsilon\}$. sú oblasti, ale $\{z \in \boldsymbol{C} : |z-a| = \varepsilon\}$ oblasťou nie je, pretože nie je otvorená.*

Example 18 *Nech $H = \{z \in \boldsymbol{C} : (\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z) > 0 \wedge |z| < R\}$. Zistite, či je množina H oblasť?*

Solution 19 *H nie je oblasť, pretože $0 \notin H$, t.j. H nesplňa podmienku 2.* $\square$

Ďalším dôležitým pojmom je rád súvislosti.

Definition 20 *Počet navzájom nespojených (neprepojených) častí, z ktorých pozostáva hranica oblasti sa nazýva rád súvislosti oblasti. Oblasť ohraničená jednou spojitou uzavretou čiarou sa nazýva jednoducho súvislá oblasť, oblasť ohraničená dvomi nepretínajúcimi sa uzavretými čiarami sa nazýva dvojnásobne súvislá oblasť, ...*

Definition 21 *Za kladný smer obchádzania oblasti budeme považovať taký smer, pri ktorom oblasť zostáva vždy po ľavej strane.*

3.3 Postupnosti komplexných čísel.

Definition 22 *Zobrazenie $f : \boldsymbol{N} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ nazývame postupnosťou komplexných čísel a označujeme symbolom $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pre každé $n \in \boldsymbol{N}$ máme*

$$z_n = x_n + iy_n,$$

t.j. definícia postupnosti komplexných čísel je ekvivalentná s definíciou dojice postupností reálnych čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Dôležíté nerovnice: pre $z_n = x_n + iy_n$ máme: $|z_n| = |x_n + iy_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leq |x_n| + |y_n|$, $|x_n| \leq |z_n|$, $|y_n| \leq |z_n|$.

Definition 23 *Postupnosť $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{C}$ je ohraničená, ak pre každé $n \in \boldsymbol{N}$ platí $|z_n| < M$, kde $M > 0$.*

Theorem 24 *Postupnosť* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{C}$ *je ohraničená* $\Longleftrightarrow$ *ak* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{R}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{R}$ *sú ohraničené.*

Definition 25 *Postupnosť* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{C}$ *má limitu* $z \in \overline{\boldsymbol{C}}$, *ak pre každé okolie* $O_{\varepsilon}(z)$ *platí, že iba konečne mnoho členov postupnosti* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *neleží v* $O_{\varepsilon}(z)$.

Theorem 26 *1.* $\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = z \in \boldsymbol{C} \Longleftrightarrow$ *ak* $\lim_{n\longrightarrow\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z \wedge \lim_{n\longrightarrow\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$.

2. $\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = \infty \Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} |z_n| = \infty$.

Tvrdenie platí:
$\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = z \in \boldsymbol{C} \Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} |z_n - z| = 0 \wedge |\operatorname{Re}(z_n - z)|, |\operatorname{Im}(z_n - z)| \leq$
$\leq |z_n - z| \leq |\operatorname{Re}(z_n - z)| + |\operatorname{Im}(z_n - z)|$

Example 27 *Nech* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{2n-1}{n} + i\left(1 - \frac{3}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$. *Nájdime* $\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n$.

Solution 28 *Riešenie*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left[\frac{2n-1}{n} + i\left(1 - \frac{3}{n}\right)\right] = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2n-1}{n} + i\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1 - \frac{3}{n}\right) = 2 + i.\Box$$

Example 29 *Nech* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + i\cos\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. *Nájdime* $\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n$.

Solution 30

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + i\cos\frac{1}{n}\right] = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + i\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right) = e + i.\Box$$

Remark 31 $lim_{n\to\infty}(-1)^n n = \infty$. *Pozor! Táto limita v* $\boldsymbol{R}$ *neexistuje.*

3.4 Rady komplexných čísel.

Definition 32 *Nech* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť komplexných čísel. Definujeme postupnosť* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *čiastočných súčtov takto:*

$s_1 = z_1$,
$s_2 = z_1 + z_2$,
$s_3 = z_1 + z_2 + z_3$,
$\ldots$
$s_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$.

Definition 33 *Výraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + \ldots$$

používame na označenie toho, že členy postupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sčítavame. Každý takýto výraz nazývame radom komplexných čísel. Ak postupnosť čiastočných súčtov* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má konečnú limitu*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} s_n = s$$

potom s *nazývame súčtom radu a označujeme* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$*, hovoríme, že rad* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *konverguje. Ak postupnosť čiastočných súčtov nemá limitu, alebo konverguje k nekonečnu hovoríme, že rad* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *diverguje.*

Theorem 34 *Rad* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$*,* $z_n = x_n + iy_n$ *konverguje vtedy a len vtedy ak konvergujú oba rady* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$*.*

Lemma 35 *Ak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *konverguje, potom* $\lim_{n \longrightarrow \infty} z_n = 0$*.*

Definition 36 *Hovoríme, že rad* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *je absolútne konvergentný ak rad*

$$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|,$$

konverguje.

Pretože absolútna konvergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ znamená konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ s reálnymi nezápornými členmi, môžme použiť všetky známe kritériá konvergencie.

Example 37 *Zistite, či rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-in}{(2n+1)!}$ *konverguje alebo diverguje.*

Solution 38 *Platí*

$$\left| \frac{3 - in}{(2n+1)!} \right| = \frac{\sqrt{9 + n^2}}{(2n+1)!}$$

potom použitím d' Alembertovho kritéria máme:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 + (n+1)^2}\,(2n+1)!}{\sqrt{9 + n^2}(2n+3)!} = 0 < 1$$

teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-in}{(2n+1)!}$ *je absolútne konvergentný.* $\square$

Theorem 39 *Rad* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$*, absolútne konverguje vtedy a len vtedy ak absolútne konvergujú oba rady* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$*.*

4 Cvičenia.

1. V úlohách 1 - 5 zistite, aká množina je určená daným vzťahom. Jej obraz načrtnite v komplexnej rovine.

2. $|z - z_0| = r,\ r > 0,\ z_0$ je pevný bod. [Kružnica so stredom z_0 a polomerom r]

3. $|z + i| + |z - i| < 4.$ $\left[\text{Vnútro elipsy } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1\right]$

4. $|z + 2| > 1.$ [Vonkajšok kružnice so stredom $S = (-2; 0)$ a polomerom $r = 1$]

5. $|z - 2| < |z|\,.$ [Polrovina $\operatorname{Re} z > 1$.]

6. $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = 2.$ $\left[z \neq 0,\ \text{kružnica so stredom } S = \left(0, -\frac{1}{4}\right) \text{ a polomerom } r = \frac{1}{4}\right]$

7. Zistite, či sú nasledujúce množiny oblasti. (Načrtnite ich v komplexnej rovine):

   (a) $|z| < 4,$ [áno]

   (b) $1 \leq |z - 1| \leq 3,$ [nie]

   (c) $\frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4},$ [nie]

   (d) $0 < |z - 2| < 3,$ [áno]

   (e) $\operatorname{Re} z < 2.$ [áno]

8. Nájdite limity postupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak

   (a) $z_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n + \frac{n+1}{3n-1}i,$ $\left[\sqrt[3]{e} + \frac{1}{3}i\right]$

   (b) $z_n = 2n \sin \frac{1}{n} + \frac{4n+1}{5n-1}i,$ $\left[2 + \frac{4}{5}i\right]$

   (c) $z_n = n \operatorname{tg} \frac{1}{2n} + \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n i,$ $\left[\frac{1}{2} + ie^4\right]$

9. Zistite, či rady $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergujú, alebo divergujú

   (a) $z_n = \frac{\sin n + i \cos n}{n^3},$ [absolútne konverguje]

   (b) $z_n = \frac{1}{n(n+1)} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}} i,$ [absolútne konverguje]

   (c) $z_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \frac{n}{3^n} i,$

   $\left[\text{diverguje, návod rad } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \text{ nespĺňa nutnú podmienku konvergencie}\right]$

5 Funkcie komplexnej premennej.

Definition 40 *Funkciou komplexnej premennej* $f : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $w = f(z)$ *rozumieme pravidlo, ktoré každému prvku* $z \in A$ *priradí jednu (jednoznačná funkcia) alebo viac hodnôt* $w \in \boldsymbol{C}$ *(môže byť aj* ∞*) (mnohoznačná funkcia) . Množinu* $A \subset \boldsymbol{C}$ *nazývame definičný obor funkcie* f.

Example 41 *Funkcia* $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $w = z^2$ *je jednoznačná funkcia,* $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $w = \sqrt{z}$, *ktorá každému* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *priradí dve hodnoty*
$\left\{w_1 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right), w_2 = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right)\right\}$

Možné interpretácie sú: ak napíšeme komplexné čísla $z, w \in \boldsymbol{C}$ v algebrickom tvare $z = x + iy$ a $w = u + iv$, potom môzeme písať:

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

kde

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), v(x, y) = \operatorname{Im} f(z),\ u, v : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}.$$

Ak $z = re^{i\varphi}$ a $w = u + iv$ dostaneme

$$w = f(z) = f(r, \varphi) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi).$$

$f(x + iy)$, $f(r, \varphi)$ je dvojica reálnych funkcií teda vektorové pole. Funkciu $z \mapsto f(z)$ možno tiež chápať ako nejakú transformáciu roviny.

Example 42 *Nájdite reálnu a imaginárnu časť funkcie* $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $w = z^2$.

Solution 43 *Ak* $z = x + iy$ *a* $w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, *potom*

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy,$$

odkiaľ

$$u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy.\square$$

5.0.1 Limita funkcie komplexnej premennej.

Definition 44 *Nech $f : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $w = f(z)$ je funkcia komplexnej premennej. Nech $z_0 \in \boldsymbol{C}$ je hromadný bod množiny A. Ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $z \in A$, $0 < |z - z_0| < \delta$ máme $|f(z) - a| < \varepsilon$ hovoríme, že funkcia $f(z)$ má limitu a ak sa z blíži ku z_0 čo zapisujeme*

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = a.$$

Ak $a = b + ic$, $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ a $z_0 = x_0 + iy_0$ potom platí nasledujúca veta:

Theorem 45 *Limita funkcie*

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = a = b + ic$$

vtedy a len vtedy ak

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = b \quad a \quad \lim_{(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = c.$$

Predchádzajúca veta implikuje nasledujúci dôsledok:

Lemma 46 *Ak $\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = a$, potom $\lim_{z \longrightarrow z_0} |f(z)| = |a|$ a ak $a \neq 0, \infty$, potom aj $\lim_{z \longrightarrow z_0} \arg f(z) = \arg a$.*

Vety o limitách rozšíme prirodzeným spôsobom na nasledujúce limity:

Theorem 47 *Nech pre $f, g : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ platí*

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = a_1, \ \lim_{z \longrightarrow z_0} g(z) = a_2.$$

Potom

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} (f \pm g)(z) = a_1 \pm a_2,$$

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} (fg)(z) = a_1 a_2,$$

$$ak\ g(z) \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ \lim_{z \longrightarrow z_0} \left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{a_1}{a_2}.$$

Definition 48 *Hovoríme, že*

$$\lim_{z \longrightarrow \infty} f(z) = a,\ a \neq \infty,$$

ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $N(\varepsilon) > 0$, také že $|z| > N(\varepsilon) \Longrightarrow |f(z) - a| < \varepsilon$.

Definition 49 *Hovoríme, že*

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = \infty,$$

ak pre každé $N > 0$ *existuje* $\delta > 0$, *také že* $0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z)| > N$.

Example 50 *Vypočítajme:* $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}$, $\lim_{z\to\infty} z^2$, $\lim_{z\to 0} \frac{1}{z}$.

Solution 51 $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ *neexistuje*, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \nexists \wedge \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-2xy}{x^2+y^2} \nexists$

$\lim_{z\to\infty} z^2 = \infty$,

$\lim_{z\to 0} \frac{1}{z} = \infty$, *na rozdiel od limity v reálnom obore !!!*

5.0.2 Spojitosť funkcie komplexnej premennej.

Nech funkcia $w = f(z)$ je definovaná na nejakom okolí $O(z_0)$ bodu z_0.

Definition 52 *Hovoríme, že funkcia* $f : O(z_0) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je spojitá v bode* z_0 *ak*

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0), \text{ pričom } f(z_0) \neq \infty.$$

Theorem 53 *Funkcia komplexnej premennej* $f : O(z_0) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *je spojitá v bode* $z_0 = x_0 + iy_0$ *vtedy a len vtedy ak sú obe funkcie* $u : O(x_0, y_0) \left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $v : O(x_0, y_0) \left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *spojité v bode* (x_0, y_0).

Example 54 *Funkcia* $f(z) = \arg z$ *je spojitá v* $\{\boldsymbol{C} \setminus \{0\}\} \setminus \boldsymbol{R}^-$. *Prechodom cez zápornú časť reálnej osi dostávame skok* 2π.

6 Cvičenia.

1. V úlohách 1 a 2 nájdite definičný obor funkcie f :
2. $f(z) = \frac{3iz-12z+i}{iz^2+1-i}$. $\left[D(f) = \boldsymbol{C} \backslash \left\{ \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{i\frac{9\pi}{8}} \right\}\right]$
3. $f(z) = \frac{\overline{z}}{(z^3-2i)(|z|-3)}$.
   $\left[D(f) = \boldsymbol{C} \backslash \left(\{z \in \boldsymbol{C};\ |z| = 3\} \cup \left\{ \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, -\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, -i\sqrt[3]{2} \right\} \right)\right]$
   V úlohách 3 - 5 vypočítajte funkčnú hodnotu funkcie f v čísle z_0 :
4. $f(z) = \frac{\overline{z}}{(z^3-2i)(|z|-3)}$, $z_0 = i$. $\left[-\frac{1}{6}\right]$
5. $f(z) = z + \overline{z}^2 - \mathrm{Re}(z\overline{z}) - \mathrm{Im}(z\overline{z})$, $z_0 = 8 - 6i$. $[-64 + 90i]$
6. $f(z) = \arg z$
   (a) $z_0 = 8 - 6i$. $\left[-\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)\right]$
   (b) $z_0 = -1 + 2i$. $[\pi - \operatorname{arctg} 2]$
   (c) $z_0 = -1 - i$. $\left[-\frac{3\pi}{4}\right]$
7. Vyjadrite reálnu a imaginárnu časť funkcie:
   (a) $f(z) = z^2 - z + 1$,
   $[\mathrm{Re} f(z) = x^2 - y^2 - x + 1, \mathrm{Im} f(z) = 2xy - y]$
   (b) $f(z) = \frac{1}{z}$,
   $\left[\mathrm{Re} f(z) = \frac{x}{x^2+y^2}, \mathrm{Im} f(z) = -\frac{y}{x^2+y^2}\right]$
   (c) $f(z) = |z| + \mathrm{Re}\, z$.
   $\left[\mathrm{Re} f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} + x, \mathrm{Im} f(z) = 0\right]$.

   V úlohách 7 - 12 vypočítajte limity:
8. $\lim_{z \longrightarrow 2i} \frac{z+3}{z^2+2iz}$. $\left[-\frac{3+2i}{8}\right]$
9. $\lim_{z \longrightarrow i} \frac{z^2-iz+z-i}{3iz^2+3z}$. $\left[-\frac{1+i}{3}\right]$
10. $\lim_{z \longrightarrow 2+i} \frac{3iz-6i+3}{2iz^2-4iz+2z}$. $\left[\frac{6-3i}{10}\right]$
11. $\lim_{z \longrightarrow i} \frac{z^2+(2-i)z-2i}{z^2+1}$. $\left[\frac{1}{2} - i\right]$
12. $\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{z^3}{|z|^2}$. $[0]$

13. $\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{z^2}{|z|^2}$.

[Návod:vyjadrite reálnu a imaginárnu časť funkcie, potom ukážte, že limita neexistuje.]

V úlohách 13 - 15 vyšetrite spojitosť funkcie f :

14. $f(z) = \frac{1}{1-z}$. [Spojitá v $\boldsymbol{C} \setminus \{1\}$]

15. $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. [Spojitá v $\boldsymbol{C} \setminus \{-i, i\}$]

16. $f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$. [Spojitá v $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$]

V úlohách 16 - 17 zistite, či je možné dodefinovať funkciu f v bode z_0 tak, aby bola spojitá v tomto bode:

17. $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0, 1+i\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{z^3 - z^2 - iz^2 + iz - i + 1}{z^2 - z - iz}$, $z_0 = 1 + i$.

$\left[\text{Je možné, ak } f(1+i) = \frac{3}{2}(1+i)\right]$

18. $f : \boldsymbol{C} \setminus \{4+i\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{z^2 - (3+2i)z - 6 + 7i}{z - 4 - i}$, $z_0 = 4 + i$.

[Nie je možné, lebo $f \lim_{z \longrightarrow 4+i} f(z) = \infty$]

6.1 Rady funkcií komplexnej premennej.

Rad

$$u_1(z) + u_2(z) + \cdots + u_n(z) + \ldots, \qquad ((1))$$

kde $u_k : A \longrightarrow \boldsymbol{C}$ sú funkcie komplexnej premennej sa nazýva rad funkcií komplexnej premennej. Pre pevnú hodnotu $z = z_0 \in A$ z (1) dostaneme rad komplexných čísel

$$u_1(z_0) + u_2(z_0) + \cdots + u_n(z_0) + \ldots \qquad ((2))$$

Ak je rad (2) konvergentný, potom bod $z = z_0$ nazývame bodom konvergencie radu (1). Množinu všetkých bodov konvegrencie nazývame obor konvergencie radu (1). Označme obor konvergencie K ($K \subset A$). Ak označíme

$$s_n(z) = \sum_{k=1}^{n} u_k(z)$$

čiastočný súčet radu (1), potom v každom bode z oboru konvergencie radu (1) existuje

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} s_n(z) = f(z)$$

kde $f : K \longrightarrow \boldsymbol{C}$ nazývame súčtom radu (1). Nech $R_n(z)$ je zvyšok po n-tom čiastočnom súčte radu (1)

$$R_n(z) = f(z) - s_n(z).$$

Potom v každom bode z oboru konvergencie radu (1) máme

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} R_n(z) = 0.$$

Definition 55 *Nech je rad (1) konvergentný v každom bode $z \in K(\subset A)$, t.j. pre každé $\varepsilon > 0$ existuje číslo $N(\varepsilon, z)$ také, že $n > N \Longrightarrow |R_n(z)| < \varepsilon$. Potom hovoríme, že rad (1) bodovo konverguje ku f na množine K.*

Definition 56 *Hovoríme, že rad (1) rovnomerne konverguje k funkcii $f : K \longrightarrow \boldsymbol{C}, w = f(z)$ v oblasti $K \subset A$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje číslo $N(\varepsilon)$ také, že*

$$n > N \Longrightarrow |f(z) - s_n(z)| = |R_n(z)| < \varepsilon,$$

pre každé $z \in K$.

Rovnomernú konvergenciu radu (1) možno zistiť pomocou nasledujúcej postačujúcej podmienky:

Theorem 57 *(Weierstrassovo kritérium.) Ak*

$$|u_n(z)| \leq a_n,$$

kde $u_n : A(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, *pre každé* $z \in A$ *a rad s nezápornými členmi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentný, potom je rad (1) absolútne a rovnomerne konvergentný v oblasti* A.

Theorem 58 *Nech* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, *kde* $u_n : A(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, *je rovnomerne konvergentný rad v oblasti* A *a nech* $u_n(z)$ *sú spojité funkcie pre každé* $n = 1, 2, 3, \ldots$. *Potom súčet radu* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = f(z)$ *je funkcia spojitá v oblasti* A.

6.2 Mocninové rady.

Definition 59 *Rad tvaru*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{(3)}$$

kde $a, c_0, c_1, c_2, \ldots$ *sú dané pevné komplexné čísla a* $z \in \boldsymbol{C}$ *nazývame mocninový rad so stredom v bode* a.

Pretože (3) je zvláštnym prípadom radu (1), všetky výsledky platné pre rady funkcií komplexnej premennej zostávajú v platnosti aj pre mocninové rady.

Označme:

- kruh so stredom v bode a s polomerom r

$$K(a, R) = \{z \in \mathbf{C};\ |z-a| < r\},$$

- uzavretý kruh so stredom v bode a s polomerom r

$$\overline{K(a, R)} = \{z \in \mathbf{C};\ |z-a| \leq r\}.$$

Theorem 60 *(Abelova) Ak mocninový rad* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *konverguje v bode* $z = z_0 \neq a$, *potom tento rad absolútne konverguje v kruhu* $K(a, |z_0 - a|)$. *V každom uzavretom kruhu* $\overline{K(a, r)}$, $r < |z_0 - a|$ *rad* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *rovnomerne konverguje.*

Ak (3) diverguje v bode $z = z_1$, potom diverguje na množine

$$\boldsymbol{C} \setminus \overline{K(a, |z_1 - a|)} = \{z \in \mathbf{C};\ |z-a| > |z_1 - a|\}$$

Definition 61 *Nech je mocninový rad* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *konvergentný v* $K(a,R)$ *a divergentný v* $\boldsymbol{C} \backslash \overline{K(a,R)}$, *potom množinu* $K(a,R)$ *nazývame kruh konvergencie a* R *polomer konvergencie radu* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$.

Kruh a polomer konvergencie radu (3) môžme určiť nasledovne: použijeme vhodné kritérium konvergencie (napr. D' Allembertovo alebo Cauchyho) pre rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |z-a|^n , \qquad ((4))$$

ktorý je radom s nezápornými člemni a zároveň aj majorantným radom k radu (3). Ak rad (4) konverguje pre nejaké $z_0 \in \boldsymbol{C}$, potom v kruhu $K(a, |z_0 - a|)$ konverguje aj rad (3).

Example 62 *Nájdite kruh konvergencie radu* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^3}{n} z^n$.

Solution 63 *Použijeme D' Allembertovo kritérium. Máme* $a_n = \left| \frac{(-1)^3}{n} \right| |z|^n$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^3}{n+1} z^{n+1}}{\frac{(-1)^3}{n} z^n} \right| = |z| < 1,$$

teda rad je absolútne konvergentný v kruhu $K(0,1)$ *a rovnomerne konvergentný v kruhu* $K(0,\rho)$, *kde* $\rho < 1$.□

Lemma 64 *Mocninové rady* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$ *konvergujú v tom istom kruhu konvergencie. (t.j. majú taký istý polomer konvergencie.)*

Example 65 *Nájdite kruh konvergencie radu* $\sum_{n=0}^{\infty} n! (z-a)^n$.

Solution 66 *Máme* $a_n = |n!(z-a)^n|$.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!\, (z-a)^{n+1}}{n!\, (z-a)^n} \right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} (n+1) |z-a| = \begin{cases} 0 & ak \quad z = a \\ \infty & ak \quad z \neq a \end{cases} .$$

teda rad $\sum_{n=0}^{\infty} n! (z-a)^n$ *konverguje iba v bode* a. □

Example 67 *Nájdite kruh konvergencie radu* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Solution 68 *Máme* $a_n = \left|\frac{z^n}{n!}\right|$.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = |z|\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{1}{(n+1)!}\right| = 0 < 1,$$

ak $z \in \boldsymbol{C}$, *teda rad* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ *absolútne konverguje v každom bode* $z \in \boldsymbol{C}$.
□

Example 69 *Nájdite kruh konvergencie radu* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}(z-1)^n$.

Solution 70 *Máme* $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}|z-1|^n$.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}|z-1|^n} = |z-1|\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= |z-1|\,e < 1, \Longrightarrow |z-1| < \frac{1}{e},$$

teda rad $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}(z-1)^n$ *absolútne konverguje na kruhu* $K\left(1,\frac{1}{e}\right)$.
□

Example 71 *Nájdite kruh konvergencie radu* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Solution 72 *Použijeme podielové kritérium konvergencie nekonečného radu. Máme*

$$a_n = \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{\frac{z^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| = |z|^2\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}\right| = 0 < 1, \forall z \in \boldsymbol{C}$$

teda rad $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *absolútne konverguje v každom bode komplexnej roviny.* □

Chovanie radu (3) na kružnici

$$S(a,R) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z-a| = R\}$$

je potrebné skúmať v každom jej bode osobitne.

Abelova veta implikuje, že rad (3) rovnomerne konverguje v každom uzavretom kruhu $\overline{K(a,r)}$, kde $r \in (0,R)$ a R je polomer konvergencie radu (3).

Skúmajme rady so zápornými mocninami $(z-a)$.

$$\frac{b_1}{(z-a)} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{b_k}{(z-a)^k} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n} \qquad ((5))$$

Ak zavedieme substitúciu

$$\frac{1}{z-a} = \Theta \qquad ((6))$$

dostaneme rad

$$b_1\Theta + b_2\Theta^2 + \cdots + b_k\Theta^k + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\Theta^n. \qquad ((7))$$

Nech polomer konvergencie radu (7) je ρ t.j. rad (7) konverguje v $K(0,\rho)$ a diverguje na množine $\boldsymbol{C} \setminus \overline{K(0,\rho)}$. Potom substitúcia (6) implikuje, že rad (5) konverguje na $\boldsymbol{C} \setminus K\left(a, \frac{1}{\rho}\right)$ a diverguje v $K\left(a, \frac{1}{\rho}\right)$.

Budeme teraz uvažovať rad

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \cdots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + \\ &+c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \ldots \end{aligned} \qquad ((8))$$

Rad (8), ktorý pozostáva z dvoch radov je konvergentný vtedy a len vtedy ak oba rady t.j.

$$c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad ((9))$$

$$\cdots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \qquad ((10))$$

konvergujú. Ak rad (9) konverguje v nejakom kruhu $K(a,R)$ a (10) je konvergentný v $\boldsymbol{C} \setminus \overline{K(a,r)}$. Ak platí $r < R$, potom oba rady konvergujú v prstenci pozostávajúcom z dvoch koncentrických kružníc so stredom v bode $z = a$ a s polomermi r, R, ktorý nazývame medzikružie konvergencie a označujeme $P(a,r,R)$, kde

$$P(a,r,R) = \{z \in \boldsymbol{C};\ r < |z-a| < R\},$$

kde $0 \le r < R \le \infty$.

Example 73 *Nájdite obor konvergencie radu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+2)(n+3)} \left(\frac{1+2i}{z-i}\right)^n. \qquad ((11))$$

Solution 74 *Riešenie Nech* $\frac{1}{z-i} = \Theta$. *Potom dostaneme rad*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+2)(n+3)} (1+2i)^n \, \Theta^n. \tag{(12)}$$

pre ktorý dostaneme: $a_n = |\Theta|^n |1+2i|^n \frac{(n+1)}{(n+2)(n+3)}$,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |\Theta| \, |1+2i| \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{(n+2)^2(n+3)}{(n+1)(n+3)(n+4)} = |\Theta|\sqrt{5} < 1,$$

teda kruh konvergencie radu (12) je $K\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ *a rad (11) konverguje na množine* $\boldsymbol{C} \setminus \overline{K\left(i, \sqrt{5}\right)}$. $\square$

7 Cvičenia.

1. Nájdite obor konvergencie mocninového radu:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$. $[K(0,1) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < 1\}]$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$. [konverguje len v strede $a = 0$]

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$. $[K(0,e) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < e\}]$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n-1}}{1+in} z^n$. $[K(0,1) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < 1\}]$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$. $[K(0,2) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < 2\}]$

   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{2n}$. $\left[K\left(0,\sqrt{2}\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < \sqrt{2}\right\}\right]$

   (g) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in)\, z^n$. $\left[K\left(0,\frac{1}{e}\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < \frac{1}{e}\right\}\right]$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{2n}} (z-1+i)^n$.
   $\left[K\left(1-i,\frac{1}{3}\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ |z-1+i| < \frac{1}{3}\right\}\right]$

   (i) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2} (z-2i)^n$.
   $[K(2i,e^2) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z-2i| < e^2\}]$

   (j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+in}{2^n} (z+i)^n$. $[K(-i,2) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z+i| < 2\}]$

   (k) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{5}\right)^n$ $[K(1,5) = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-1| < 5\}]$

   (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2i)^n}{(n+1)(n+3)} (z+3i)^n$,
   $\left[K\left(-3i,\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C} : |z+3i| < \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}\right]$

   (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} \left(\frac{z-1+i}{1-3i}\right)^n$,
   $\left[K\left(1-i,\sqrt{10}\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C} : |z-1+i| < \sqrt{10}\right\}\right]$

   (n) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{5}\right)^n$ $[K(1,5) = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-1| < 5\}]$

8 Elementárne funkcie komplexnej premennej.

V predchádzajúcich častiach matematiky sme definovali funkcie e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\sinh x$, $\cosh x$, ... Ak miesto x zavedieme komplexnú premennú z potom definície týchto funkcií strácajú zmysel. Budeme preto znova definovať elementárne funkcie komplexnej premennej tak aby boli rozšírením elementárnych funkcií reálnej premennej.

8.1 Mocninová funkcia s prirodzeným exponentom.

Definition 75 *Nech $n \in \boldsymbol{N}$. Funkciu $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = z^n$ nazývame mocninovou funkciou komplexnej premennej s prirodzeným exponentom.*

Mocninová funkcia je pre $n = 1$ identita t.j. bijektívna funkcia. Ukážeme, že pre $n > 2$ mocninová funkcia nie je injektívna funkcia a nájdeme množinu, na ktorej bude funkcia $f(z) = z^n$ injektívnou funkciou. Nech $z_1 \neq z_2$

$$z_1 = |z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad \text{a} \quad z_2 = |z_2| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)\,,$$

potom

$$z_1^n = |z_1|^n (\cos n\varphi_1 + i \sin n\varphi_1) \quad \text{a} \quad z_2^n = |z_2|^n (\cos n\varphi_2 + i \sin n\varphi_2)\,.$$

Nech by

$$z_1^n = z_2^n,$$

platí to vtedy a len vtedy, ak

$$|z_1|^n = |z_2|^n \quad \text{a} \quad n\varphi_1 = n\varphi_2 + 2l\pi,\ l \in \boldsymbol{Z}$$

$l = mn + k$, kde $m \in \boldsymbol{Z}$ a $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Tak implikácia $z_1 \neq z_2 \Longrightarrow z_1^n = z_2^n$ je pravdivá vtedy a len vtedy ak

$$|z_1| = |z_2| \quad \text{a} \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{2k\pi}{n} + 2m\pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \quad \text{a} \quad m \in \boldsymbol{Z}.$$

Tak sme ukázali, že $f(z) = z^n$ nie je injektívna funkcia. Z predošlých úvah vidíme, že $f(z) = z^n$ bude injektívnou funkciou na každej množine, ktorú dostaneme tak, že $\boldsymbol{C}$ rozdelíme na výseky s vrcholom v bode 0, ramená ktorých zvierajú uhly $\frac{2\pi}{n}$. Jednou z týchto množín je napríklad množina:

$$V_0 = \left\{ z \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}\,;\ -\frac{\pi}{n} < \arg z \leq \frac{\pi}{n} \right\} \cup \{0\}\,.$$

Nech $w \in \boldsymbol{C}$ je ľubovoľné číslo. Ak $w = 0$, potom mu odpovedá číslo $z = 0 \in V_0$. Ak $w \neq 0$ potom z rovnice $z^n = w$ dostávame čísla

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\arg w + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg w + 2k\pi}{n}\right), \quad \text{pre} \;\; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

a pre $k = 0$ potom máme

$$z_0 = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\arg w}{n} + i\sin\frac{\arg w}{n}\right).$$

Pretože je $w \neq 0$, tak $-\pi < \arg w \leq \pi$ t.j. $-\frac{\pi}{n} < \frac{\arg w}{n} \leq \frac{\pi}{n}$, t.j. $z_0 \in V_0$. Ukázali sme, že funkcia $f_0 : V_0 \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f_0(z) = z^n$ je bijekcia a f_0 má inverznú funkciu.

8.2 Hlavná vetva n-tej odmocniny.

Definition 76 *Nech $n \geq 2$ je prirodzené číslo. Potom inverznú funkciu k funkcii $f_0 : V_0 \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f_0(z) = z^n$ nazývame hlavnou vetvou n-tej odmocniny a označujeme $f_0^{-1}(z) = \left(\sqrt[n]{z}\right)_0$, $z \in \boldsymbol{C}$.*

Remark 77 *Niektorí autori množinu všetkých riešení rovnice $w^n = z$ označujú symbolom*

$$\sqrt[n]{z} = \left\{\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right), k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\right\}$$

a nazývajú ju n-tou odmocninou z komplexného čísla z, ktorú uvažujú ako viacznačnú funkciu.

Definition 78 *Funkciu*

$$P_n : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\; P_n(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_n,$$

kde $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \boldsymbol{C}$ sú komplexné čísla a $n \in \boldsymbol{N}$ nazývame polynóm n-tého stupňa komplexnej premennej z.Podiel dvoch polynómov nazývame racionálna funkcia.

8.3 Exponenciálna funkcia, funkcie sínus a kosínus.

Definition 79 *Definujeme funkcie* $\exp, \cos, \sin : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$,

$$\exp z = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \qquad ((1))$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad ((2))$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad ((3))$$

Rady (1), (2), (3) konvergujú absolútne v $K(0,\infty) = \boldsymbol{C}$. Čitateľ sa iste o tom presvedčí. Ak si uvedomíme, že pre absolútne konvergentné rady ľubovoľné prerovnanie takéhoto radu má ten istý súčet skúmaním e^{iz} dostaneme formulu

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{i^2 z^2}{2!} + \dots + \frac{i^n z^n}{n!} + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots\right) +$$

$$+ i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\right) = \cos z + i \sin z,$$

ktorú nazývame Eulerova formula.

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \tag{(4)}$$

Ak zameníme z za $-z$ dostaneme

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \tag{(5)}$$

a nakoniec použitím (4) a (5) dostávame

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{(6)}$$

Uvedieme niektoré známe identity (bez dôkazu):

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \ \forall z_1, z_2 \in \boldsymbol{C}$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2.$$

8.4 Vlastnosti exponenciálnej funkcie.

Ukážeme, že $e^z \neq 0$ pre každé $z \in \boldsymbol{C}$, $z = x + iy$, $x, y \in \boldsymbol{R}$. Platí

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Nech by existovalo $z \in \boldsymbol{C}$ také, že $e^z = 0$. To znamená:

$$e^x \cos y = 0 \wedge e^x \sin y = 0$$

a pretože $e^x \neq 0$, tak

$$\cos y = 0 \wedge \sin y = 0,$$

odkiaľ plynie, že také reálne číslo y neexistuje. To znamená, že obor hodnôt je $R(\exp) = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$.

Ukážeme za akých predpokladov je funkcia exp bijekcia.

Exponenciálna funkcia nie je injekcia, má periodu $2\pi i$:

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^z, \quad \text{pre každé} \quad z \in \boldsymbol{C}.$$

T.j. definičný obor exponenciálnej funkcie $D(\exp) = \boldsymbol{C}$ môžme rozdeliť na „pásy“

$$P_k = \{z \in \boldsymbol{C};\, (2k-1)\pi < \operatorname{Im} z \leq (2k+1)\pi\}\,,\ k \in \boldsymbol{Z} \qquad ((7))$$

pre každé $k \in \boldsymbol{Z}$ je funkcia

$$\exp_k : P_k \longrightarrow \boldsymbol{C} \setminus \{0\}\,,\ \exp_k(z) = e^z \qquad ((8))$$

injekcia.

Nech $z = x + iy \in P_k$, $w = u + iv \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ a $e^z = w$. Tak dostaneme

$$e^x \cos y = u \wedge e^x \sin y = v$$

odkiaľ

$$x = \frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2),\ y = \operatorname{arccotg}\frac{u}{v}, \quad \text{ak} \quad v \neq 0$$

alebo

$$x = \frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2),\ y = \operatorname{arctg}\frac{v}{u}, \quad \text{ak} \quad u \neq 0$$

t.j.

$$x = \ln|w|\,,\ y = \arg w + 2k\pi, \quad \text{ak} \quad w \neq 0 \qquad ((9))$$

Teda $\exp_k$ je surjekcia.

To znamená, že pre každé $k \in \boldsymbol{Z}$ je funkcia

$$\exp_k : P_k \longrightarrow \boldsymbol{C} \setminus \{0\}\,,\ \exp_k(z) = e^z \qquad ((10))$$

bijekcia

8.4.1 Logaritmická funkcia.

Definition 80 *Inverznú funkciu k bijekcii*

$$\exp_0 : P_0 \longrightarrow \boldsymbol{C} \setminus \{0\}\,,\ \exp_0(z) = e^z$$

nazývame hlavnou vetvou logaritmu a označujeme

$$\ln : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow P_0, \ln z = w \Leftrightarrow z = \exp_0(w) = e^w.$$

Ak

$$\ln z = w \Longleftrightarrow w = \ln z = \ln|z| + i \arg z, \, \forall z \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \qquad ((11))$$

Remark 81 *Logaritmická funkcia sa dá definovať ako inverzia ku každej bijekcii (10). Niektorí autori namiesto hlavnej vetvy logaritmu definujú viacznačnú funkciu*

$$\mathrm{Ln}\,(z) = \{\ln z + 2k\pi i, k \in \boldsymbol{Z}\},$$

ktorá je množinou všetkých riešení rovnice $e^z = w$*. Každá z týchto hodnôt leží na priamke* $u = \ln|z|$ *a líši sa od ostatných hodnôt iba aditívnou konštantou* $2k\pi i$*.*

Example 82 *Nájdime* $\mathrm{Ln}(-3)$.

Solution 83 *Pretože* $|-3| = 3$ *a* $\arg(-3) = \pi$*, potom*
$\mathrm{Ln}(-3) = \{\ln 3 + i(2k+1)\pi, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
a hlavná hodnota $\ln(-3) = \ln 3 + \pi i$.$\square$

Example 84 *Nájdite všetky riešenia rovnice* $e^z = 1 + i$.

Solution 85 *Pretože* $|1+i| = \sqrt{2}$ *a* $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$*, potom*

$$\mathrm{Ln}(1+i) = \left\{ \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}.\square$$

8.4.2 Vlastnosti funkcií sínus a kosínus.

Podobným spôsobom ako pre exponenciálnu funkciu sa dá ukázať, že platí

$$\sin z = 0 \Longleftrightarrow z = k\pi, \; k \in \boldsymbol{Z} \qquad ((13))$$

$$\cos z = 0 \Longleftrightarrow z = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \boldsymbol{Z} \qquad ((14))$$

t.j. ako v reálnej analýze. Ukážeme, že pre každé komplexné číslo $z = x + iy$, $x, y \in \boldsymbol{R}$, $y \neq 0$ platí

$$\sin z \neq 0 \wedge \cos z \neq 0 \qquad ((15))$$

Máme

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy)$$

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)$$

Pretože

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} \neq 0, \, \sin(iy) = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} \neq 0 \qquad ((16))$$

a $\sin x$ a $\cos x$ nemôžu byť rovné nule naraz pre to isté číslo $x \in \boldsymbol{R}$ tak platí (15).

Funkcie $\sin z$ a $\cos z$ sú periodické s periodou 2π. Chceme zistiť, či pre $z_1 \neq z_2$ je

$$\sin z_1 = \sin z_2,\ \cos z_1 = \cos z_2$$

Ak platí prvá z rovností, potom

$$\sin z_1 = \sin z_2 \Longrightarrow \sin z_1 - \sin z_2 = 0 \Longrightarrow 2 \sin \frac{z_1 - z_2}{2} \cos \frac{z_1 + z_2}{2} = 0$$

t.j.

$$\sin z_1 = \sin z_2 \Longleftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi \quad \text{alebo} \quad z_1 + z_2 = (2k+1)\pi$$

podobne sa dá ukázať, že

$$\cos z_1 = \cos z_2 \Longleftrightarrow z_1 - z_2 = (2k+1)\pi \quad \text{alebo} \quad z_1 + z_2 = (2k+1)\pi$$

Teda funkcie sin a cos nie sú injektívne funkcie. Sformulujme vetu:

Theorem 86 *Nech*

$$Q_k = \left\{ z \in \boldsymbol{C};\ -\frac{\pi}{2} + k\pi < \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\},\ k \in \boldsymbol{Z} \qquad ((17))$$

$$S_k = \{ z \in \boldsymbol{C};\ k\pi < \operatorname{Re} z \leq (k+1)\pi \},\ k \in \boldsymbol{Z} \qquad ((18))$$

potom zúžené funkcie:

$$\sin|_{Q_k} : Q_k \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \sin|_{Q_k}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad ((19))$$

$$\cos|_{S_k} : S_k \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \cos|_{S_k}(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad ((20))$$

sú bijekcie pre každé $k \in \boldsymbol{Z}$.

Podobne ako pre reálne premenné môžme definovať ostatné trigonometrické funkcie. My sa v krátkosti zmienime o funkciách tg a cotg.

$$\begin{array}{l} \operatorname{tg} : \boldsymbol{C} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \boldsymbol{Z} \right\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \\ \operatorname{cotg} : \boldsymbol{C} \setminus \{ k\pi, k \in \boldsymbol{Z} \} \longrightarrow \boldsymbol{C}, \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\operatorname{tg} z} \end{array} \qquad ((21))$$

Použitím vzťahov (6) a (21) dostaneme

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,\ \operatorname{tg} z \operatorname{cotg} z = 1.$$

Podobne ako pre funkcie sin a cos sa dá ukázať:

$$\operatorname{tg} z = 0 \Longleftrightarrow z = k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}, \operatorname{cotg} z = 0 \Longleftrightarrow z = (2k+1)\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(z+\pi), \operatorname{cotg} z = \operatorname{cotg}(z+\pi)$$

$$\operatorname{tg} z_1 = \operatorname{tg} z_2 \Longleftrightarrow z_1 = z_2 + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

$$\operatorname{cotg} z_1 = \operatorname{cotg} z_2 \Longleftrightarrow z_1 = z_2 + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

Ak označíme

$$Q_k^0 = \left\{ z \in \boldsymbol{C};\ -\frac{\pi}{2} + k\pi < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} + k\pi \right\},\ k \in \boldsymbol{Z}$$

$$S_k^0 = \{ z \in \boldsymbol{C};\ k\pi < \operatorname{Re} z < (k+1)\pi \},\ k \in \boldsymbol{Z}$$

potom podobne ako pre sin a cos môžme dokázať, že funkcie

$$\operatorname{tg}|_{Q_k^0} : Q_k^0 \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \operatorname{tg}|_{Q_k^0}(z) = \frac{\sin z}{\cos z},$$

$$\operatorname{cotg}|_{S_k^0} : S_k^0 \longrightarrow \boldsymbol{C}, \operatorname{cotg}|_{S_k^0}(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$$

sú bijekcie pre každé $k \in \boldsymbol{Z}$.

8.4.3 Hyperbolické funkcie.

Definujeme funkcie:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},\ \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

pre ktoré platí

$$\cos(iz) = \frac{e^{iiz} + e^{-iiz}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z,$$

$$\sin(iz) = \frac{e^{iiz} - e^{-iiz}}{2i} = i\frac{e^z - e^{-z}}{2} = i \sinh z,$$

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z,$$

$$\sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \sin z.$$

8.4.4 Inverzné funkcie k trigonometrickým a hyperbolickým funkciám.

Inverzné funkcie k trigonometrickým a hyperbolickým funkciám komplexnej premennej sú definované podľa tých istých pravidiel ako odpovedajúce inverzné funkcie k trigonometrickým a hyperbolickým funkciám pre reálnu premennú. Nebudeme sa im venovať podrobnejšie. Tak dostaneme:

- bijekcia $\sin|_{Q_0}$ má inverznú funkciu

$$\arcsin : \boldsymbol{C} \longrightarrow Q_0 = \left\{ z \in \boldsymbol{C};\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z \le \frac{\pi}{2} \right\},\ \arcsin z = w \Longleftrightarrow z = \sin w,$$

- bijekcia $\cos|_{S_0}$ má inverznú funkciu

$$\arccos : \boldsymbol{C} \longrightarrow S_0 = \{ z \in \boldsymbol{C};\ 0 < \operatorname{Re} z \le \pi \},\ \arccos z = w \Longleftrightarrow z = \cos w,$$

- bijekcia $\operatorname{tg}|_{Q_0^0}$ má inverznú funkciu

$$\operatorname{arctg} : \boldsymbol{C} \longrightarrow Q_0^0 = \left\{ z \in \boldsymbol{C};\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} \right\},\ \operatorname{arctg} z = w \Longleftrightarrow z = \operatorname{tg} w,$$

- bijekcia $\operatorname{cotg}|_{S_0^0}$ má inverznú funkciu

$$\operatorname{arccotg} : \boldsymbol{C} \longrightarrow S_0^0 = \{ z \in \boldsymbol{C}; 0 < \operatorname{Re} z < \pi \},\ \operatorname{arccotg} z = w \Longleftrightarrow z = \operatorname{cotg} w.$$

Pre tieto funkcie dostaneme

$$\arcsin z = -i \ln \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right), \quad \text{pre každé} \quad z \in \boldsymbol{C},$$

$$\arccos z = -i \ln \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right), \quad \text{pre každé} \quad z \in \boldsymbol{C},$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{i}{2} \ln \frac{i + z}{i - z}, \quad \text{pre každé} \quad z \in \boldsymbol{C},$$

$$\operatorname{arccotg} z = \frac{i}{2} \ln \frac{z - i}{z + i}, \quad \text{pre každé} \quad z \in \boldsymbol{C}.$$

8.4.5 Mocninová funkcia so všeobecným exponentom.

Definition 87 *Nech $a, z \neq 0$ sú komplexné čísla. Funkciu $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \exp_0 (a \ln z)$ nazývame hlavná vetva (hodnota) mocniny so všeobecným exponentom..*

Example 88 *Nájdite $1^{\sqrt{2}}$.*

Solution 89 *Máme*

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln 1} = e^0 = 1. \square$$

Example 90 *Nájdite 2^{1-i}.*

Solution 91 *Máme*

$$2^{1-i} = e^{(1-i) \ln 2} = 2(\cos(\ln 2) - i \sin(\ln 2)). \square$$

9 Cvičenia.

1. Vypočítajte funkčné hodnoty:

   (a) $\ln(-1)$, $[i\pi]$
   (b) $\ln(-i)$, $\left[-\frac{1}{2}i\pi\right]$
   (c) $\ln\left(1-\sqrt{3}i\right)$. $\left[\frac{1}{2}\ln 4-\frac{1}{3}i\pi\right]$
   (d) $\ln(-3)$ $[\ln 3+i\pi]$
   (e) $\ln(5i)$ $\left[\ln 5+i\frac{\pi}{2}\right]$
   (f) $\ln(2)$ $[\ln 2]$
   (g) $\ln(e)$ $[1]$
   (h) $\ln(2+2i)$ $\left[\ln\left(\sqrt{8}\right)+i\frac{\pi}{4}\right]$
   (i) $\ln(-2+2i)$ $\left[\ln\left(\sqrt{8}\right)+i\frac{3\pi}{4}\right]$
   (j) $\ln(-2-2i)$ $\left[\ln\left(\sqrt{8}\right)+i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$
   (k) $\ln(2-2i)$ $\left[\ln\left(\sqrt{8}\right)-i\frac{\pi}{4}\right]$
   (l) $\ln(3+4i)$ $\left[\ln 5+i\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right]$
   (m) $\ln(-3-4i)$ $\left[\ln 5+i\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)-\pi\right)\right]$
   (n) $\ln(3-4i)$ $\left[\ln 5-i\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right]$
   (o) $\ln(1-i)$ $\left[\frac{1}{2}\ln 2-i\frac{\pi}{4}\right]$
   (p) $\ln(-\sqrt{3}-i)$ $\left[\ln 2-i\frac{5\pi}{6}\right]$
   (q) $\ln(1-i\sqrt{3})$ $\left[\ln 2-i\frac{\pi}{3}\right]$
   (r) $\ln(-8+15i)$ $\left[\ln 17+i\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{15}{8}\right)\right]$
   (s) $\ln\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$ $\left[i\frac{\pi}{4}\right]$
   (t) $\ln\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$ $\left[\ln\sqrt{3}+i\frac{\pi}{6}\right]$

2. Nájdite všetky riešenia z rovníc:

   (a) $e^z=-1$, $[\operatorname{Ln}(-1)=\{i\pi(1+2k),\ k\in\boldsymbol{Z}\}]$
   (b) $e^z=-i$, $\left[\operatorname{Ln}(-i)=\left\{i\pi\left(-\frac{1}{2}+2k\right),\ k\in\boldsymbol{Z}\right\}\right]$
   (c) $e^z=1-\sqrt{3}i$. $\left[\operatorname{Ln}\left(1-i\sqrt{3}\right)=\left\{\frac{1}{2}\ln 4-\frac{1}{3}i\pi+2k\pi i,\ k\in\boldsymbol{Z}\right\}\right]$

3. Vypočítajte hodnoty:

   (a) $e^{2+i\frac{\pi}{2}}$, $[ie^2]$
   (b) e^{2+i}, $[e^2\cos 1+ie^2\sin 1]$

(c) i^i. $\left[e^{-\frac{1}{2}\pi}\right]$

(d) $(-3i)^{2i}$ $[e^{\pi}\left[\cos(\ln 9) + i\sin(\ln 9)\right]]$

(e) i^{1+i} $\left[ie^{-\frac{\pi}{2}}\right]$

(f) $i^{\frac{3}{4}}$ $\left[\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right]$

(g) $(1-i)^{2+i}$ $\left[2e^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)\right) - i\cos\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)\right)\right]$

(h) $(1+i)^{\frac{1}{2}}$ $\left[\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\right]$

(i) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{2-i}$ $\left[4e^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \ln 2\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \ln 2\right)\right)\right]$

4. Vypočítajte hodnoty:

(a) $\sin i$, $[i\sinh 1]$

(b) $\cos(1-i)$. $[\cos 1\cosh 1 + i\sin 1\sinh 1]$

(c) $\sin(2-3i)$
$\left[\frac{\sin 2\left(e^3+e^{-3}\right)}{2} - i\frac{\cos 2\left(e^3-e^{-3}\right)}{2} = \sin 2\cosh 3 - i\cos 2\sinh 3\right]$

(d) $\cos i$ $\left[\frac{e^{-1}+e}{2} = \cosh 1\right]$

(e) $\cos(4+i)$ $[\cos 4\cosh 1 - i\sin 4\sinh 1]$

(f) $\mathrm{tg}(2-i)$ $\left[\frac{e^2\sin 4 + i\left(1-e^2\cos 4\right)}{e^2\cos 4 + 1 + ie^2\sin 4}\right]$

(g) $\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 2\right)$ $\left[\frac{8+15i}{17}\right]$

10 Diferenciálny počet funkcií komplexnej premennej.

10.1 Derivácia funkcie komplexnej premennej.

Definition 92 *Nech $f : A(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je jednoznačná funkcia komplexnej premennej, A je otvorená, $a \in A$. Ak existuje konečná limita $\lim_{z \longrightarrow a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$, potom túto limitu nazývame derivácia funkcie f v bode a, označujeme $f'(a)$ a hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná v bode a. Ak je funkcia f diferencovateľná v každom bode z A, hovoríme, že f je diferencovateľná funkcia a funkciu*

$$f' : A(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f'(a) = \lim_{z \longrightarrow a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

nazývame deriváciou funkcie f.

Pretože definícia derivácie funkcie komplexnej premennej v bode je taká istá ako pre funkciu reálnej premennej, platia všetky pravidlá, ktoré platili pre derivovanie funkcií reálnej premennej, ako aj všetky vety o diferencovateľnosti, napríklad diferencovateľnosť funkcie komplexnej premennej $f(z)$ v nejakom bode z definičného oboru implikuje spojitosť funkcie f v tomto bode.

Example 93 *Nájdite deriváciu funkcie*

$$f : \boldsymbol{C} \setminus \left\{\frac{4}{3}i\right\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \frac{z-2i}{3iz+4}.$$

Solution 94 *Funkcia f je spojitá na celom definičnom obore a máme*

$$f' : \boldsymbol{C} \setminus \left\{\frac{4}{3}i\right\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f'(z) = \frac{-2}{(3iz+4)^2}.\square$$

Example 95 *Nájdite deriváciu funkcie*

$$f : \boldsymbol{C} \setminus \left\{-\frac{2+i}{3}\right\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \ln(2+i+3z).$$

Solution 96 *Pretože funkcia $\ln z$ nie je spojitá na množine reálnych záporných čísel, derivácia $f'(z)$ pre tieto hodnoty neexistuje. Ak $z = x+iy$, potom*

$$2+i+3z = 2+3x+i(1+3y)$$

a toto číslo je reálne záporné vtedy a len vtedy ak $y = -\frac{1}{3}$ *a* $x < -\frac{2}{3}$, *to znamená, že* f *nie je spojitá na množine*

$$A_1 = \left\{ z \in \boldsymbol{C};\ \mathrm{Re}\, z < -\frac{2}{3} \wedge \mathrm{Im}\, z = -\frac{1}{3} \right\},$$

teda f *je diferencovateľná na množine*

$$M = \boldsymbol{C} \setminus \left[A_1 \cup \left\{ -\frac{2+i}{3} \right\} \right] = \boldsymbol{C} \setminus \left\{ z \in \boldsymbol{C};\ \mathrm{Re}\, z \leq -\frac{2}{3} \wedge \mathrm{Im}\, z = -\frac{1}{3} \right\},$$

a jej derivácia je

$$f' : M \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f'(z) = \frac{3}{2+i+3z}. \square$$

10.2 Cauchyho - Riemannove rovnice.

V tejto časti budeme formulovať nutné a postačujúce podmienky pre diferencovateľnosť funkcie komplexnej premennej, ktorú vyjadríme v tvare:

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y).$$

Theorem 97 *(Nutná a postačujúca podmienka) Funkcia* $f : A\, (\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$, *(*$A$ *je otvorená) je diferencovateľná v bode* $a = a_1 + i a_2$ *vtedy a len vtedy ak sú funkcie* $u(x,y)$ *a* $v(x,y)$ *diferencovateľné v bode* $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ *a platia podmienky*

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{a})}{\partial x} = \frac{\partial v(\boldsymbol{a})}{\partial y},\ \frac{\partial u(\boldsymbol{a})}{\partial y} = -\frac{\partial v(\boldsymbol{a})}{\partial x} \qquad ((1))$$

potom

$$f'(a) = \frac{\partial u(\boldsymbol{a})}{\partial x} + i \frac{\partial v(\boldsymbol{a})}{\partial x} = \frac{\partial v(\boldsymbol{a})}{\partial y} - i \frac{\partial u(\boldsymbol{a})}{\partial y}.$$

Rovnice (1) nazývame Cauchyho - Riemannove rovnice.

Example 98 *Nájdite deriváciu funkcie* $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i\,(3x^2y - y^3)$.

Solution 99 *Máme*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2.$$

Parciálne derivácie sú spojité pre každé $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ *a spĺňajú Cauchyho - Riemannove rovnice. Teda* f *má deriváciu v každom bode* $z \in \boldsymbol{C}$ *a*

$$f': \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f'(z) = 3x^2 - 3y^2 + i6xy.$$

Ak chceme funkciu f *zapísať ako funkciu premennej* z *musíme použiť vzťahy*

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad a \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Aplikáciu týchto vzťahov dostaneme

$$f'(z) = 3z^2. \square$$

Example 100 *Vyšetrite, v ktorých bodoch je funkcia* $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = |z^2|$ *diferencovateľná.*

Solution 101 *Nech* $z = x + iy$, *potom* $f(z) = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$ *a*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Odtiaľ plynie, že Cauchyho - Riemannove rovnice sú splnené v jedinom bode $(x, y) = (0, 0)$, *teda* f *je diferencovateľná iba v bode* 0 *a* $f'(0) = 0. \square$

10.3 Analytické funkcie.

Definition 102 *Nech* $f : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $(A$ *otvorená) je funkcia komplexnej premennej. Hovoríme, že* f *je*

a) analytická v oblasti $M \subset A$ *ak* $f'(z)$ *existuje v každom bode* $z \in M$,

b) analytická v bode $a \in A$ *ak existuje okolie* $O(a) \subset A$ *také, že v* $\forall$ *bode* $z \in O(a)$ *existuje* $f'(z)$.

Remark 103 *Diferencovateľnosť a analytickosť funkcie v oblasti sú zhodné pojmy. Analytickosť funkcie v bode je silnejšia vlastnosť než diferencovateľnosť funkcie v bode.*

Example 104 *Napríklad funkcia* $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = |z^2| = |z|^2$ *z príkladu 100 má deriváciu v bode* $a = 0$, *ale nie je analytická v tomto bode, pretože jej derivácia* $f'(z)$ *neexistuje v žiadnom bode z ľubovoľného okolia bodu* $a = 0$.

Remark 105 *Niektorí autori namiesto pojmu analytická funkcia používajú pojem holomorfná funkcia.*

Definition 106 *Body komplexnej roviny $\boldsymbol{C}$ v ktorých je funkcia analytická nazývame regulárne body funkcie. Body v ktorých funkcia nie je analytická (teda aj tie, v ktorých funkcia nie je definovaná) nazývame singulárne body.*

Example 107 *Ukážte, že funkcia $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0, i\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{1}{z^2 - iz}$ je analytická.*

Solution 108 *Vypočítajme deriváciu funkcie v bode a*

$$f'(a) = -\frac{2a - i}{(a^2 - ia)^2}$$

existuje v každom bode $a \in \boldsymbol{C} \setminus \{0, i\}$. $\square$

Z predchádzajúcej kapitoly o elementárnych funkciách plynie, že

mocninová funkcia s prirodzeným exponentom,

polynomická funkcia,

exponenciálna funkcia, goniometrické a hyperbolické funkcie sú analytické funkcie,

hlavná hodnota argumentu komplexného čísla, hlavná hodnota (vetva) logaritmu a všeobecnej mocniny, sú analytické na množine všetkých komplexných čísel s výnimkou nuly a záporných reálnych čísel. Je to z toho dôvodu, že tieto funkcie sú definované pomocou hlavnej hodnoty argumentu.

Použitím vety 97 vieme nájsť analytickú funkciu, ak je daná iba jej reálna časť alebo iba jej imaginárna časť.

Example 109 *Nájdite analytickú funkciu $f : A\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ ak je daná $v : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $v(x,y) = 2xy + 3x$.*

Solution 110 *Pretože hľadáme analytickú funkciu f, mala by byť diferencovateľná v každom bode oblasti A, t.j. podľa vety 97 funkcie u, v musia byť diferencovateľné v oblasti A a musia splňať Cauchyho - Riemannove rovnice:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \ \forall (x,y) \in A \left(= \boldsymbol{R}^2\right) \tag{(3)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y - 3, \ \forall (x,y) \in A \tag{(4)}$$

Rovnica (3) implikuje

$$u(x,y) = \int 2x dx = x^2 + \Phi(y),$$

teda

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \Phi'(y) = -2y - 3,$$

čo dáva

$$\Phi(y) = -y^2 - 3y + k,\ k \in \boldsymbol{R}.$$

a

$$u(x,y) = x^2 - y^2 - 3y + k.$$

Funkcie u, v *sú diferencovateľné v* $A = \boldsymbol{R}^2$, *teda*

$$f : A\,(=\boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = x^2 - y^2 - 3y + k + i\,(2xy + 3x) = \frac{z^2 + \overline{z}^2}{2} + 3iz + k$$

je analytická funkcia. $\square$

Remark 111 *V ďalšej kapitole ukážeme, že analytická funkcia má v oblasti, v ktorej je analytická derivácie všetkých rádov.*

Remark 112 *Okrem použitia Cauchyho - Riemannových vzťahov existuje aj iný spôsob rekonštrukcie analytickej funkcie, ak poznáme iba jej reálnu alebo imaginárnu zložku.*

Tento spôsob nevyžaduje riešenie dvoch parciálnych diferenciálnych rovníc, jeho hlavnou myšlienkou je metóda reflexie analytickej funkcie od reálnej osi. Ak je definovaná funkcia

$$f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ w = f(z),$$

jej reflexia od reálnej osi je definovaná:

$$\widehat{f} : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \widehat{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}.$$

Remark 113 *Ak je funkcia* $f(z)$ *analytická (holomorfná) na otvorenej množine* $U \subset \boldsymbol{C}$, *potom je* $\widehat{f}(z)$ *analytická (holomorfná) na otvorenej množine* $U' \subset \boldsymbol{C}$, *ktorá je reflexiou* U *od reálnej osi.*

Theorem 114 *Nech* $f(z)$ *je analytická (holomorfná) na okolí začiatku* $\boldsymbol{C}$ *taká, že*

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Potom

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - \overline{f(0)} = 2iv\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) + \overline{f(0)}.$$

Example 115 *Rekonštruujte analytickú funkciu* $f : A (\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ *ak je daná* $v : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $u(x,y) = x^2 - y^2$.

Solution 116 *Podľa predchádzajúcej vety máme:*

$$f(z) = 2\left[\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(\frac{z}{2i}\right)^2\right] - \overline{f(0)},$$

t.j.

$$f(z) = z^2 - \overline{f(0)}.$$

V bode $z = 0$ *dostaneme:*

$$f(0) = 0^2 - \overline{f(0)} \Longrightarrow f(0) + \overline{f(0)} = 0 \Longrightarrow \operatorname{Re} f(0) = 0.$$

Potom

$$f(z) = z^2 + i\beta,\ \beta \in \boldsymbol{R}.\square$$

Ak je funkcia $f(z)$ analytická v okolí nejakého bodu $a \in \boldsymbol{C}$, potom platí nasledujúca veta:

Theorem 117 *Nech* $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ *je analytická (holomorfná) v okolí bodu* $a \in \boldsymbol{C}$. *Potom*

$$f(z) = 2u\left(\frac{z+\overline{a}}{2}, \frac{z-\overline{a}}{2i}\right) - \overline{f(a)} = 2iv\left(\frac{z+\overline{a}}{2}, \frac{z-\overline{a}}{2i}\right) + \overline{f(a)}.$$

10.4 Harmonické a harmonicky združené funkcie.

Definition 118 *Reálna funkcia* $u : A\left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *sa nazýva harmonická funkcia ak*

a) u má spojité parciálne derivácie druhého rádu v oblasti A,

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, *pre každé* $(x,y) \in A$

Poslednú rovnicu nazývame Laplaceova rovnica, ktorá sa často zapisuje v nasledujúcej forme

$$\Delta u = 0,$$

kde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

je Laplaceov operátor.

Theorem 119 *Nech* $f : A \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ *je analytická funkcia a funkcie* u *a* v *sú dvakrát spojite diferencovateľné. Potom* u, v *sú harmonické funkcie v oblasti* A.

Remark 120 *Opačné tvrdenie k predchádzajúcej vete neplatí, pretože dve harmonické funkcie v oblasti* A *nemusia byť časťami analytickej funkcie (nemusia spĺňať Cauchyho - Riemannove rovnice).*

Definition 121 *Nech* $u, v : A\left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *sú harmonické funkcie. Ak* u, v *spĺňajú Cauchyho - Riemannove rovnice v oblasti* A, *potom hovoríme, že* u, v *sú harmonicky združené funkcie.*

Lemma 122 *Reálna aj imaginárna časť každej analytickej funkcie* $f : A \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f = u + iv$, $A \subset \boldsymbol{C}$, *sú harmonicky združené funkcie v oblasti* A, *pričom funkcie* u *a* v *sú dva razy spojite diferencovateľné.*

Remark 123 *Použitím Cauchyho - Riemannových rovníc na ľubovoľnú harmonickú funkciu* $u : A\left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$, *môžme nájsť harmonicky združenú funkciu* $v : A\left(\subset \boldsymbol{R}^2\right) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *tak, že funkcie* $f = u + iv$ *alebo* $g = v + iu$ *sú analytické v oblasti* A.

Example 124 *Nech* $u : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $u(x,y) = x^2 - y^2$. *Nájdite harmonicky združenú funkciu* $v : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *takú, že* $v(0,0) = 0$.

Solution 125 *Pretože platí* $\Delta u = 0$, u *je harmonická funkcia v* $A = \boldsymbol{R}^2$. *Platí*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y.$$

Použitím Cauchyho - Riemannových rovníc dostaneme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

odkiaľ

$$v(x,y) = \int 2x dy = 2xy + \varphi(x)$$

čo implikuje

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x),$$

teda

$$2y = 2y + \varphi'(x) \quad \textit{alebo} \quad \varphi'(x) = 0 \implies \varphi(x) = k,$$

kde $k \in \boldsymbol{R}$ *je ľubovoľná konštanta. Potom*

$$v(x,y) = 2xy + k$$

a pretože $v(0,0) = 0$, *potom* $k = 0$ *a* $v : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}, v(x,y) = 2xy$ *je harmonicky združená funkcia k* $u(x,y)$ *spĺňajúca podmienku* $v(0,0) = 0$ *a* $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = f(x+iy) = (x^2 - y^2) + i2xy = z^2$ *je analytická funkcia a* u, v *sú harmonicky združené funkcie.* $\square$

Example 126 *Nech* $u : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $u(x,y) = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} - 2x - y$, $A = \{(x,y)\,;\, y > 0, x > 0\}$. *Nájdite harmonicky združenú funkciu* $v : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *takú, že* $v(1,1) = -1$.

Solution 127 *Pretože platí* $\Delta u = 0$, u *je harmonická funkcia v* A. *Platí*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2,\ \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x}{x^2+y^2} - 1.$$

Použitím Cauchyho - Riemannových rovníc dostaneme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2,\ \ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} + 1$$

odkiaľ

$$v(x,y) = \int \left(\frac{2y}{x^2+y^2} - 2\right) dy = \ln\left(x^2+y^2\right) - 2y + \varphi(x)$$

čo implikuje

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} + \varphi'(x),$$

teda

$$\varphi'(x) = 1 \implies \varphi(x) = x + k,$$

kde $k \in \boldsymbol{R}$ *je ľubovoľná konštanta. Potom*

$$v(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right) - 2y + x + k$$

a pretože

$$-1 = v(1,1) = \ln 2 - 2 + 1 + k,$$

potom

$$k = -\ln 2 \quad a \quad v(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right) - 2y + x - \ln 2,$$

$$f(z) = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} - 2x - y + i\left[\ln\left(x^2+y^2\right) - 2y + x - \ln 2\right]$$

je analytická funkcia a u, v *sú harmonicky združené funkcie na* A. $\square$

10.5 Geometrický význam derivácie.

Nech $w = f(z)$ je analytická funkcia v oblasti $D \subset \boldsymbol{C}$, ktorá zobrazuje D do oblasti $G \subset \boldsymbol{C}$. Nech $z_0 \in D$ a $w_0 = f(z_0) \in G$ a nech $f'(z_0) \neq 0$. Nech l je ľubovoľná krivka prechádzajúca bodom z_0, ktorá má dotyčnicu v bode z_0. Funkcia f zobrazí krivku l na krivku $L \in G$. Potom

$$f'(z_0)) = \lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0}$$

čo implikuje

$$\arg f'(z_0) = \lim_{z \longrightarrow z_0} [\arg(w - w_0) - \arg(z - z_0)]$$

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \longrightarrow z_0} \left| \frac{w - w_0}{z - z_0} \right|$$

Ak $\arg(z - z_0) = \alpha_1$ a $\arg(w - w_0) = \beta_1$, potom pre $z \longrightarrow z_0$ je $\alpha_1 \longrightarrow \alpha$ a $\beta_1 \longrightarrow \beta$ a my dostaneme

$$\arg f'(z_0) = \beta - \alpha \quad \text{alebo} \quad \beta = \arg f'(z_0) + \alpha.$$

Teda $\arg f'(z_0)$ je uhol o ktorý musíme pootočiť dotyčnicu k l v bode z_0 aby sme dostali dotyčnicu ku L v bode w_0. Pretože

$$f'(z_0) = \lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0}$$

nezávisí od spôsobu aproximácie z ku z_0, teda $\arg f'(z_0)$ bude taký istý pre každú krivku prechádzajúcu bodom z_0 a $\arg f'(z_0)$ sa nazýva uhol pootočenia dotyčnice v bode z_0 vzhľadom k zobrazeniu $w = f(z)$.

11 Cvičenia.

1. Daná je funkcia $f(z) = \frac{iz-1}{iz^2+1+i}$. Nájdite:

   (a) definičný obor; $\left[\boldsymbol{C} \setminus \left\{\sqrt[4]{2}e^{\frac{3\pi}{8}i},\ \sqrt[4]{2}e^{\frac{11\pi}{8}i}\right\}\right]$

   (b) $f\,'$, $f\,'(i)$ $\left[f\,'(z) = \frac{z^2+2iz-1+i}{(iz^2+1+i)^2},\ f\,'(i) = -4+i\right]$

2. Zistite, či sú nasledujúce funkcie diferencovateľné, ak áno vypočítajte ich derivácie:

   (a) $f(z) = \frac{1}{z}$, $[f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \frac{1}{z}$ je analytická, $f'(z) = -\frac{1}{z^2}.]$

   (b) $f(z) = z^2 - 2iz$, $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = z^2 - 2iz$ je analytická, $f'(z) = 2z = 2i.]$

   (c) $f(z) = e^{iz}$, $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = e^{iz}$ je analytická, $f'(z) = ie^{iz}.]$

   (d) $f(z) = |z|$, $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = |z|$ nie je analytická, $f'(z) = \nexists.]$

   (e) $f(z) = \overline{z}$. $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \overline{z}$ nie je analytická, $f'(z) = \nexists.]$

3. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(z) = \frac{3i}{2i-z}$. $\left[D(f) = \boldsymbol{C} \setminus \{2i\} = D(f\,'),\ f\,'(z) = \frac{3i}{(2i-z)^2}\right]$

   V úlohách 4. - 9. pre funkciu f

   a. zistite, kde existuje derivácia,

   b. nájdite $f\,'$ v bodoch, kde existuje

   c. vyšetrite, kde je f analytická (holomorfná)

4. $f(z) = x^2 + iy^2$. $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f\,'\text{existuje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z\}, \\ \text{b. } f\,'(z) = f\,'(x+iy) = 2x, \\ \text{c. nie je analytická v žiadnom bode} \end{array}\right]$

5. $f(z) = |z|$. $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f\,' \text{ neexistuje v žiadnom bode,} \\ \text{b. } f\,'(z) \nexists, \\ \text{c. nie je analytická v žiadnom bode.} \end{array}\right]$

6. $f(z) = z^3 + z$. $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f\,' \text{ existuje na } \boldsymbol{C}, \\ \text{b. } f\,'(z) = 3z^2 + 1, \\ \text{c. je analytická na } \boldsymbol{C}. \end{array}\right]$

7. $f(z) = z \operatorname{Re} z$. $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f\,' \text{ existuje len v bode } z = 0, \\ \text{b. } f\,'(0) = 0, \\ \text{c. nie je analytická v žiadnom bode} \end{array}\right]$

8. $f(z) = f(x+iy) = (2xy + 2x - 1) + i(y^2 - x^2 + 2y)$.

$$\begin{bmatrix} \text{a. } f' \text{ existuje na } \boldsymbol{C}, \\ \text{b. } f'(z) = f'(x+iy) = (2y+2) - i(2x), \\ \text{c. je analytická na } \boldsymbol{C}. \end{bmatrix}$$

9. $f(z) = (e^x \cos y) - i(e^x \sin y)$. $\begin{bmatrix} \text{a. } f' \text{ neexistuje v žiadnom bode,} \\ \text{b. } f'(z) \nexists, \\ \text{c. nie je analytická v žiadnom bode.} \end{bmatrix}$

V úlohách 10 - 33 nájdite na $A \subset \boldsymbol{C}$ analytickú (holomorfnú) funkciu $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, ak je daná jej jedna zložka a prípadne funkčná hodnota v jednom bode:

10. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2,\ f(i) = 0.$

$[f(z) = f(x+iy) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3 + 1)]$

11. $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy,\ f(0) = 0.$

$\left[f(z) = f(x+iy) = (x^2 - y^2 + xy) + i\left(2xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right)\right]$

12. $v(x,y) = x^2 - y^2 - 3x + 2xy,\ u(2,1) = 0.$

$[u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy + 3y - 2]$

13. $v(x,y) = 2e^x \sin y,\ f(0) = 1.$

$[f(z) = f(x+iy) = (2e^x \cos y - 1) + i(2e^x \sin y)]$

14. $v(x,y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y.$

$$\begin{bmatrix} u(x,y) = -2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - y - 2x + k, \text{ alebo} \\ u(x,y) = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - y - 2x + K \end{bmatrix}$$

15. $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$, pričom $f(0) = 0$. $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = ze^z]$

16. $u(x,y) = 2x^2 - 2y^2 - 6xy + x - y + 3$, pričom $f(i) = i$.

$[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ (z) = (2+3i)z^2 + (1+i)z + 3 + 3i.]$

17. $v(x,y) = 2xy + 3x$. $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = z^2 + 3iz + C.]$

18. $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$, pričom $f(0) = 0$. $\left[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \frac{2-i}{2}z^2.\right]$

19. $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - 2y$. $\left[f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \frac{1}{z} + 2iz + C.\right]$

20. $v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$, pričom $f(2) = 0$. $\left[f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{2}.\right]$

21. $u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$, pričom $f(0) = 0$. $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ (1-2i)z^3]$

22. $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$, pričom $f(0) = 0$. $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = ze^z]$

23. $u(x,y) = x\cos x\cosh y + y\sin x\sinh y$, pričom $f(2) = 0$. $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = z\cos z]$

24. $v(x,y) = y\cos y\cosh x + x\sin y\sinh x$, pričom $f(0) = 0$. $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = z\cosh z]$

25. $v(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$. $[f : \boldsymbol{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = 2i\ln z + C.]$

26. $u(x,y) = 4xy(y^2 - x^2)$.

27. $u(x,y) = e^x\cos y$.

28. $u(x,y) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\frac{y}{x^2+y^2}$.

29. $u(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$.

30. $u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

31. $u(x,y) = \exp\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\cos\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

32. $u(x,y) = \frac{x^3-3xy^2}{(x^2+y^2)^3}$.

33. $u(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2n}}\cos\left[\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right],\ n \in \boldsymbol{Z}$.

34. Ukážte, že $u(x,y) = xy$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu.

    $\left[f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = -\frac{1}{2}(x^2-y^2) + C\right]$

35. Ukážte, že $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $\left[f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = 2xy - \frac{1}{2}(x^2-y^2) + C\right]$

36. Ukážte, že $u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu.

    $\left[f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = -2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - y^3 + C.\right]$

37. Ukážte, že $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - x$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $\left[f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 - y + C\right]$

38. Ukážte, že $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu.

    $\left[f : \boldsymbol{R}^2\setminus\{(0,0)\} \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + C\right]$

39. Ukážte, že $u(x,y) = xe^x\cos y - ye^x\sin y$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $\left[f : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = ye^x\cos y + xe^x\sin y + C\right]$

12 Integrálny počet funkcií komplexnej premennej.

12.1 Integrál funkcie komplexnej premennej.

Formálne je integrál funkcie komplexnej premennej definovaný takým istým spôsobom ako krivkový integrál vektorovej funkcie (orientovaný krivkový integrál).

Komplexnú funkciu reálnej premennej

$$\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$$

môžme vyjadriť v tvare

$$\varphi(t) = x(t) + iy(t),$$

kde $x, y : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sú reálne funkcie reálnej premennej $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Hovoríme, že funkcia $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je spojitá ak sú funkcie $x, y : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ spojité.

Definition 128 *Nech $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je spojitá funkcia. Množina $C = \varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$ sa nazýva krivka v komplexnej rovine.*

- funkciu $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$,$\varphi(t) = x(t) + iy(t)$ nazývame parametrizáciou (parametrickou rovnicou) krivky C.
- daná krivka môže mať viac (aj nekonečne mnoho) parametrizácií.
- bod $\varphi(\alpha)$ sa nazýva začiatočný bod a $\varphi(\beta)$ koncový bod krivky C.
- ak $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je injektívna, potom hovoríme, že krivka C je jednoduchá.
- ak $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, potom krivku C nazývame uzavretá.
- ak je krivka C s parametrizáciou $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *jednoduchá a uzavretá*, nazývame ju Jordanova krivka.

Remark 129 *Jordanova veta hovorí, že jednoduchá uzavretá krivka C delí komplexnú rovinu na dve súvislé množiny, ktoré sa nepretínajú: ohraničenú (vnútro krivky - $IntC$) a neohraničenú (vonkajšok krivky - $ExtC$). Dôkaz tejto vety je náročný, preto ho nebudeme uvádzať, ale vetu budeme používať.*

Example 130 *Funkcia*

a) $\varphi : \langle 1, 10\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = t + it^2$, *je parametrizáciou oblúka paraboly*

$C_1 : y = x^2$, *pre* $x \in \langle 1, 10\rangle$,

b) $\varphi : \langle -1, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = t - 2it$, *je parametrizáciou úsečky*

$C_2 : y = -2x, x \in \langle -1, 1\rangle$,

c) $\varphi : \langle 0, \pi\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = \cos 2t + 2i \sin t$, *je parametrizácia časti paraboly*

$C_3 : y^2 = -2x + 2$, *pre* $x \in \langle -1, 1\rangle$.

Platí napríklad $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, *teda krivka* C_3 *nie je jednoduchá.* $\square$

Example 131 *Nech* $a, b \in \boldsymbol{C}$, *potom* $\varphi : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = a + t(b - a)$ *je parametrizáciou jednoduchej krivky* C *- úsečky spájajúcej body* a *a* b. $\square$

Example 132 *Funkcia* $\varphi : \langle 0, 2\pi\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = \cos t + i \sin t$ *je parametrizácia jednoduchej uzavretej krivky* C *- jednotkovej kružnice so stredom v začiatku súradnicovej sústavy. Všimnime si, že* $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$. $\square$

Example 133 *Funkcia* $\varphi : \langle 0, 4\pi\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = 2\cos t + 2i \sin t$ *je tiež parametrizáciou kružnice s polomerom* 2 *so stredom v začiatku súradnicovej sústavy. Táto krivka je tiež uzavretá* $\varphi(0) = \varphi(4\pi)$, *nie je však jednoduchá, pretože napríklad*

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi\left(\frac{5\pi}{2}\right). \square$$

Definition 134 *Ak funkcia* $\varphi : \langle \alpha, \beta\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je taká, že* $\forall t \in \langle \alpha, \beta\rangle$ *je funkcia* $\varphi'(t)$ *spojitá a* $\varphi'(t) \neq 0$, *tak krivku* C *nazývame hladká krivka.*

Delenie krivky. Nech $\varphi : \langle \alpha, \beta\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je parametrizáciou krivky C. Nech Q je delenie intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, $Q = \{\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p = \beta\}$. Potom každému bodu $t_k \in \langle \alpha, \beta\rangle$ odpovedá bod $\varphi(t_k) = z_k \in C$. Potom $P = \{z_k; k = 0, 1, 2, \ldots, p\}$ je delenie krivky C. Funkcie $\varphi_k : \langle t_{k-1}, t_k\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}, \varphi_k(t) = \varphi(t)$, $k = 1, 2, 3, \ldots, p$ sú parametrizáciami čiastočných kriviek C_k so začiatočnými bodmi $\varphi_k(t_{k-1})$ a koncovými bodmi $\varphi_k(t_k)$, $k = 1, \ldots, p$ krivky C.

Definition 135 *Nech* $\varphi : \langle \alpha, \beta\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je po častiach hladká funkcia. Ak existuje delenie intervalu* $\langle \alpha, \beta\rangle$ *-* $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p = \beta\}$ *tak, že čiastočné krivky* C_k *s parametrizáciami*

$$\varphi_k : \langle t_{k-1}, t_k\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}, \varphi_k(t) = \varphi(t), \; k = 1, 2, 3, \ldots, p$$

sú hladké funkcie, potom sa krivka C *nazýva po častiach hladká krivka.*

Nech $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = x(t) + iy(t)$ je parametrizácia hladkej krivky. Definujeme číslo $d(C)$, ktoré nazývame dĺžka krivky C

$$d(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| \, dt,$$

ak C je po častiach hladká krivka potom

$$d(C) = \sum_{k=1}^{p} d(C_k).$$

12.2 Definícia integrálu.

Definition 136 *Nech $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je parametrizácia hladkej krivky C a nech $f : A(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je spojitá funkcia, ktorej definičný obor obsahuje C $(C \subset A)$. Potom integrál z funkcie f po krivke C je definovaný*

$$\int_C f(z) \, dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt.$$

Ak C je po častiach hladká krivka a $f : A(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je spojitá funkcia, ktorej definičný obor obsahuje C $(C \subset A)$, potom integrál z funkcie f po krivke C je definovaný

$$\int_C f(z) \, dz = \sum_{k=1}^{p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt.$$

12.2.1 Vlastnosti integrálu.

1. Ak $c_1, c_2 \in \boldsymbol{C}$ sú ľubovoľné komplexné čísla, C je po častiach hladká krivka a f_1, f_2 sú funkcie spojité na C. Potom

$$\int_C [c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)] \, dz = c_1 \int_C f_1(z) \, dz + c_2 \int_C f_2(z) \, dz.$$

2. Nech $\varphi_1 : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi_2 : \langle \beta, \gamma \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ sú parametrizácie po častiach hladkých kriviek C_1 a C_2, pričom platí $\varphi_1(\beta) = \varphi_2(\beta)$ a ak definujeme parametrizáciu

$$\varphi : \langle \alpha, \gamma \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}, \; \varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{ak} \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle \\ \varphi_2(t) & \text{ak} \quad t \in \langle \beta, \gamma \rangle \end{cases}$$

krivky $C = C_1 + C_2$, potom ak f je funkcia spojitá na C

$$\int_C f(z) \, dz = \int_{C_1} f(z) \, dz + \int_{C_2} f(z) \, dz.$$

3. Nech C je po častiach hladká krivka a f je spojitá funkcia na C. Nech $d(C)$ je dĺžka krivky C. Potom
$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq d(C)\sup_{z\in\boldsymbol{C}}|f(z)|.$$

4. Ak $\varphi : \langle\alpha,\beta\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je po častiach hladká parametrizácia krivky C a funkcia $\varphi^- : \langle-\beta,-\alpha\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, taká, že $\varphi^-(t) = \varphi(-t)$, potom hovoríme, že krivka C^- je opačná ku krivke C. Ak f je spojitá na C. Potom
$$\int_{C^-} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz.$$

Example 137 *Vypočítajte integrál* $\int_C (\overline{z})^2\,dz$ *ak parametrizácia krivky* C *je daná:*
a) $\varphi : \langle 0,1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = t(1+i)$,
b) $\varphi : \langle 0,1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) = 2t & ak \quad t\in\left\langle 0,\frac{1}{2}\right\rangle \\ \varphi_2(t) = 1+(2t-1)i & ak \quad t\in\left\langle \frac{1}{2},1\right\rangle \end{cases}$.

Solution 138 *a) Pre krivku* C $\varphi : \langle 0,1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = t(1+i)$ *máme* $\varphi'(t) = 1+i$ *odkiaľ potom dostaneme*
$$\int_C (\overline{z})^2\,dz = \int_0^1 [t(1-i)]^2(1+i)\,dt = (1-i)^2(1+i)\int_0^1 t^2dt =$$
$$= 2(1-i)\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(1-i).$$

b) Teraz máme $C = C_1 + C_2$, *kde* $\varphi_1 : \left\langle 0,\frac{1}{2}\right\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_1(t) = 2t$ *a* $\varphi_1'(t) = 2$, $\varphi_2 : \left\langle\frac{1}{2},1\right\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_2(t) = 1+i(2t-1)$ *a* $\varphi_2'(t) = 2i$, *potom*
$$\int_C (\overline{z})^2\,dz = \int_{C_1}(\overline{z})^2\,dz + \int_{C_2}(\overline{z})^2\,dz = \int_0^{\frac{1}{2}} 8t^2dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-i(2t-1))^2\,2idt =$$
$$= \left[8\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} + i\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-2i)(2t-1)-(2t-1)^2\,dt = \frac{4}{3}+\frac{2}{3}i. \square$$

Remark 139 *Pretože jedna krivka môže mať viac parametrizácií, napríklad:*
$$\varphi_1 : \langle 0,1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_1(t) = t+it^2$$
a
$$\varphi_2 : \left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_2(t) = \sin t + i\left(1-\cos^2 t\right)$$

sú parametrizácie tej istej krivky C - časti grafu paraboly $y = x^2$, $x \in \langle 0,1 \rangle$. Prirodzená otázka je či integrál $\int_C f(z)\,dz$ nezávisí od parametrizácie (t.j. od funkcie φ). Aj pre všeobecné predpoklady odpoveď znie: integrál nezávisí od parametrizácie krivky. Keby sme chceli urobiť dôkaz, musíme sa obrátiť na časti matematiky, ktoré pojednávajú o krivkových integráloch a Greenovej funkcii.

Example 140 *Vypočítajte integrál $\int_C \operatorname{Im} z dz$ kde C je obvod trojuholníka s vrcholmi $z_1 = 0$, $z_2 = 2+i$, $z_3 = i$ od bodu z_1 cez z_2 a z_3 späť do bodu z_1.*

Solution 141 *Máme $C = C_1 + C_2 + C_3$, kde*
$C_1 : \varphi_1 : \langle 0,1 \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi_1(t) = (2+i)\,t$ a $\varphi_1'(t) = 2+i$,
$C_2 : \varphi_2 : \langle 0,1 \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi_2(t) = (2-2t)+i$ a $\varphi_2'(t) = -2$,
$C_3 : \varphi_3 : \langle 0,1 \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi_3(t) = i(1-t)$ a $\varphi_3'(t) = -i$, *potom*
$\int_C \operatorname{Im} z dz = \int_{C_1} \operatorname{Im} z dz + \int_{C_2} \operatorname{Im} z dz + \int_{C_3} \operatorname{Im} z dz =$
$= \int_0^1 (2+i)\, t dt + \int_0^1 (-2)\, 1 dt + \int_0^1 (1-t)(-i)\, dt = -1.\,\square$

13 Cvičenia.

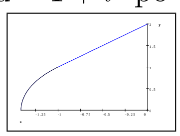
1. Načrtnite krivku C, ktorá je daná parametrizáciou:

   (a) $\varphi : \langle -2, 2\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = 1 + t(1+i)$,
   $\left[\text{Úsečka z bodu } -1-2i \text{ do bodu } 3+2i.\right]$

   (b) $\varphi : \langle 0, \pi\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = i + \frac{1}{2}e^{it}$,
   $\left[\text{Polkružnica so stredom v bode } i \text{ a s polomerom } \frac{1}{2} \text{ od bodu } \frac{1}{2}+i \text{ po bod } -\frac{1}{2}+i.\right]$

   (c) $\varphi : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = \begin{cases} -\sqrt{2}e^{-it} & \text{ak} \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right\rangle \\ (-1+i) + \left(t - \frac{\pi}{4}\right)(1+i) & \text{ak} \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}+1\right\rangle \end{cases}$,

   [Štvrtina kružnice so stredom v bode 0 a polomerom $\sqrt{2}$ od bodu $-\sqrt{2}$po bod $-1+i$ a priamka od bodu $-1+i$ po bod $2i$.

   
   ]

2. Nájdite parametrizáciu nasledujúcich kriviek:

   (a) $C = \{z \in \boldsymbol{C} : |z - 1 + i| = 3\} \oplus$.
   $\left[\begin{array}{c} C \text{ je kružnica so stredom v bode } 1-i \text{ a s polomerom } 3 \\ C : \varphi : \langle 0, 2\pi\rangle \longrightarrow \mathbf{C},\ \varphi(t) = 1 - i + 3e^{it}. \end{array}\right]$

   (b) $C = \left\{z \in \boldsymbol{C} : \arg z = 0 \vee \arg z = -\frac{3\pi}{4} \vee \arg z = \frac{\pi}{4}, |z| < \sqrt{2},\ \text{začiatočný bod } -1-i\right\}$
   $\left[\begin{array}{c} C \text{ je úsečka od bodu } -1-i \text{ po bod } 1+i \\ C : \varphi : \langle -1, 1\rangle \longrightarrow \mathbf{C},\ \varphi(t) = (1+i)t. \end{array}\right]$

   (c) C je kladne orientovaná hranica oblasti $\{z \in \boldsymbol{C} : |z + i| < 2,\ \operatorname{Re} z > 0\}$, $\oplus$

   $\left[\begin{array}{c} C \text{ je časť kružnice so stredom v bode } -i, \text{ s} \\ \text{polomerom } 2 \text{ od bodu } \sqrt{2} \text{ po bod } -\sqrt{2}, \\ C : \varphi : \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\rangle \longrightarrow \mathbf{C},\ \varphi(t) = -i + 2e^{it}. \end{array}\right]$

   (d) C je kladne orientovaná krivka zložená z úsečky so začiatočným bodom 1, koncovým bodom $1+i$ a úsečka so začiatočným bodom $1+i$, koncovým bodom i a štvrťkružnica $|z-1-i| = 1$ so začiatočným bodom i a koncovým bodom 1. $\left[\begin{array}{c} C = C_1 + C_2 + C_3,\ \text{pričom} \\ C_1 : \varphi_1 : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \mathbf{C},\ \varphi_1(t) = 1 + it, \\ C_2 : \varphi_2 : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \mathbf{C},\ \varphi_2(t) = 1 + i - t, \\ C_3^- : \varphi_3 : \left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right\rangle \longrightarrow \mathbf{C},\ \varphi_3(t) = 1 + i + e^{it}. \end{array}\right]$

Vypočítajte integrály: ($\oplus$ je kladná orientácia, $\ominus$ je záporná orientácia krivky C.)

3. $\int_C z \sin z dz$, kde

   (a) C je úsečka od bodu 0 po bod i. $[-ie^{-1}]$

   (b) oblúk paraboly $C : \varphi : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = t^2 - t + it$ so začiatočným bodom 0 a koncovým bodom i. $[i(\sinh 1 - \cosh 1).]$

4. $\int_C \operatorname{Re} z dz$, C je úsečka

   (a) od bodu 0 po bod $1 + i$. $\left[\frac{1}{2} + \frac{i}{2}.\right]$

   (b) od bodu -1 po bod $1 + i$. $[0]$

   (c) polkružnica $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$ so začiatočným bodom 1 a koncovým bodom -1, $\left[\frac{i\pi}{2}\right]$

   (d) kladne orientovaná kružnica $|z| = a$, $a > 0$. $[ia^2\pi.]$

5. $\int_C (\overline{z})^2 dz$, $C : z(t) = t + i\frac{t}{3}$, $t \in \langle 0, 3\rangle$ orientovaná súhlasne s parametrickým vyjadrením. $\left[\frac{10(3-i)}{3}\right]$

6. $\int_C \frac{1}{z} dz$, C je úsečka od bodu 1 po bod $1 + i$. $\left[\ln\left(\sqrt{2}\right) + i\frac{\pi}{4}\right]$

7. $\int_C e^{\overline{z}} dz$, C je lomená krivka, ktorá sa skladá z dvoch úsečiek: prvá so začiatočným bodom 0 a koncovým bodom i, druhá so začiatočným bodom i a koncovým bodom $1+i$. $[1 + (e - 2)(\cos 1 - i \sin 1)]$

8. $\int_C \frac{1}{z} dz$, $C : |z| = 2$, $\operatorname{Im} z \leq 0$ od bodu -2 po bod 2. $[i\pi]$

9. $\int_C |z| dz$, kde

   (a) úsečka so začiatočným bodom 0 a koncovým bodom $2-i$, $\left[\sqrt{5} - i\frac{\sqrt{5}}{2}.\right]$

   (b) $C : |z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu -1 po bod 1. $[2.]$

   (c) $C : |z| = 2$, $\operatorname{Re} z \leq 0$ od bodu $-2i$ po bod $2i$. $[8i.]$

   (d) polkružnica $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ so začiatočným bodom -1 a koncovým bodom 1, $[2.]$

   (e) polkružnica $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \leq 0$ so začiatočným bodom $-i$ a koncovým bodom i, $[2i.]$

   (f) kladne orientovaná kružnica $|z| = a$, $a > 0$. $[0.]$

10. $\int_C \overline{z} |z| dz$, kde $C : |z| = 1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$ od bodu i po bod $-i$ a úsečka od bodu $-i$ po bod i. $[-i\pi]$

11. $\int_C \operatorname{Re} z dz$, kde $C : |z| = 1$, $\ominus$. $[-i\pi]$

12. $\int_C z \operatorname{Im} z dz,$ kde $C : |z| = 2,\ \operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu -2 po bod 2. $\left[\frac{16i}{3}\right]$

13. $\int_C \frac{z}{\bar{z}} dz,$ kde $C : |z| = 2,\ \operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu 2 po bod -2 a úsečka od bodu -2 po bod -1 a $|z| = 1,\ \operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu -1 po bod 1 a úsečka od bodu 1 po bod 2. $\left[\frac{4}{3}\right]$

14. Vypočítajte $\int_C z dz,$ kde C je úsečka so začiatočným bodom 0 a koncovým bodom $3 + 4i$. $\left[-\frac{7}{2} + 12i.\right]$

15. Vypočítajte $\int_C \frac{1}{z} dz,$ kde C je kladne orientovaná kružnica $|z| = a,\ a > 0$. $[2i\pi.]$

16. Vypočítajte $\int_C \frac{1}{1+z^2} dz,$ kde C je:

    (a) kladne orientovaná kružnica $|z| = 2$. $[0.]$

    (b) kladne orientovaná elipsa $C : \varphi : \langle 0, 2\pi \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = \cos t + i\frac{\sin t}{2}$. $[0.]$

17. Vypočítajte $\int_C (z-a)^n dz,\ n \in \boldsymbol{Z},$ kde C je:

    (a) polkružnica $|z - a| = R,\ \operatorname{Im} z \geq 0$ so začiatočným bodom $a + R$ a koncovým bodom $a - R$, $\left[\begin{cases} \frac{R^{n+1}\left[(-1)^{n+1}-1\right]}{n+1} & \text{pre} \quad n \neq -1 \\ \pi i & \text{pre} \quad n = -1 \end{cases}\right]$

    (b) kladne orientovaná kružnica $|z| = a,\ a > 0$. $[0.]$

    (c) kladne orientovaný obvod štvorca so stredom v bode a a stranami, ktoré sú rovnobežné so súradnicovými osami. $\left[\begin{cases} 0 & \text{pre} \quad n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{pre} \quad n = -1 \end{cases}.\right]$

18. Vypočítajte $\int_C e^{\bar{z}} dz,$ kde C je krivka zložená z dvoch úsečiek, ktorá má začiatočný bod 0 a koncový bod $1 + i$ ak spoločným bodom oboch úsečiek je:

    (a) bod 1, $\left[\begin{array}{c} C = C_1 + C_2 \\ C_1 : \varphi_1 : \langle 0, 1 \rangle \longrightarrow \mathbf{C},\ \varphi_1(t) = t, \\ C_2 : \varphi_2 : \langle 0, 1 \rangle \longrightarrow \mathbf{C},\ \varphi_2(t) = 1 + it, \\ \int_C e^{\bar{z}} dz = \int_{C_1} e^{\bar{z}} dz + \int_{C_2} e^{\bar{z}} dz = \\ = \int_0^1 e^t dt + i \int_0^1 e^{1-it} dt = 2e - 1 - e\cos 1 + ie \sin 1 = \\ = 2e - 1 - e^{1-i}. \end{array}\right]$

    (b) bod i. $[1 - 2e^{-i} + e^{1-i}.]$

13.1 Cauchyho integrálna veta.

Hovoríme, že oblasť ohraničená jednou jednoduchou, spojitou, uzavretou krivkou sa nazýva jednoducho súvislá oblasť. Oblasť ohraničená dvomi jednoduchými, spojitými, uzavretými a nepretínajúcimi sa krivkami nazývame dvojnásobne súvislá oblasť, ... Hovoríme, že hranica oblasti je kladne orientovaná, ak pri pohybe po hranici v smere jej orientácie vnútro oblasti zostáva po našej ľavej ruke. Je možné dokázať nasledujúcu vetu:

Theorem 142 *Nech f je analytická funkcia v jednoducho súvislej oblasti D. Ak C je jednoduchá, po častiach hladká uzavretá krivka v D, potom*

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Example 143 *Vypočítajte integrál*

$$\int_C \frac{2z^2 - 3z + 4}{z+1} dz,$$

ak $\varphi : \langle 0, 2\pi \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = \frac{1}{2}\cos t + i\frac{1}{2}\sin t.$

Solution 144 *Krivka C je uzavretá, hladká krivka, $C = \left\{ z \in \boldsymbol{C};\ |z| = \frac{1}{2} \right\}$. Nech $D = \left\{ z \in \boldsymbol{C};\ |z| = \frac{3}{4} \right\}$. D je jednoducho súvislá a $C \subset D$. Funkcia $f(z) = \frac{2z^2-3z+4}{z+1}$ je analytická v oblasti D, teda $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1} dz = 0.$* $\square$

Cauchyho integrálna veta implikuje skutočnosť, že integrál z analytickej funkcie v jednoducho súvislej oblasti D nezávisí od integračnej cesty. Nech C_1, C_2 sú dve jednoduché, po častiach hladké, nepretínajúce sa krivky s rovnakým začiatočným bodom z_1 aj rovnakým koncovým bodom z_2. Nech $C_1 \subset D$ a $C_2 \subset D$. Potom $C = C_1 + C_2^-$, kde C_2^- má opačnú orientáciu ako C_2, je jednoduchá uzavretá, po častiach hladká krivka, ktorá spĺňa predpoklady vety 142, teda

$$0 = \int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2^-} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz,$$

teda

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

Tak sme dokázali tvrdenie.

Lemma 145 *Ak je $f : D\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ analytická funkcia definovaná v jednoducho súvislej oblasti D, potom $\int_C f(z)\,dz$ v oblasti D nezávisí od cesty.*

Ak z_1 je začiatočný bod a z_2 koncový bod krivky C, potom namiesto zápisu $\int_C f(z)\,dz$ môžme použiť zápis $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$.

Remark 146 *Nech $f : D\,(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je analytická funkcia v jednoducho súvislej oblasti D a nech $z_1, z_2 \in D$. Nech pre každé $z \in D$ platí $F'(z) = f(z)$, potom funkciu F nazývame primitívnou funkciou k funkcii f na D. Ak má analytická funkcia f primitívnu funkciu F, potom*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz. = F(z_2) - F(z_1).$$

Example 147 *Vypočítajte integrál*

$$\int_C z^2 dz$$

kde

a) C je úsečka spájajúca bod $z_1 = 0$ s bodom $z_2 = 1 + i$,

b) C je krivka zložená z dvoch úsečiek spájajúcich body $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + i$.

Solution 148 *a) Krivka C sa dá parametrizovať takto $\varphi : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = t(1+i)$. Potom $\varphi'(t) = 1 + i$, odkiaľ potom máme*

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \int_0^1 [t(1+i)]^2 (1+i)\,dt = (1+i)^3 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(-2+2i).$$

Použitím poznámky tento výsledok dostaneme priamo: pretože je $\frac{z^3}{3}$ primitívna funkcia ku funkcii z^2, máme

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{1+i} = \frac{1}{3}(-2+2i).$$

b) Teraz máme $C = C_1 + C_2$, kde

$$C_1 : \varphi_1 : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}, \varphi_1(t) = t \quad a \quad \varphi'(t) = 1,$$

$$C_2 : \varphi_2 : \langle 0, 1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}, \varphi_2(t) = 1 + it \ a\ \varphi'(t) = i,$$

potom

$$\int_C z^2 dz = \int_{C_1} z^2 dz + \int_{C_2} z^2 dz = \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1+it)^2\, i dt =$$

$$= \frac{1}{3} + \left[\frac{(1+it)^3}{3i} \right]_0^1 = \frac{1}{3}(-2+2i).$$

Porovnaním a) a b) vidíme, že náš integrál nezávisí od cesty. Ale tento výsledok sme očakávali, pretože funkcia $f(z) = z^2$ je analytická funkcia v celej komplexnej rovine C. $\square$

Treba si uvedomiť, že funkcia $f(z) = (\overline{z})^2$ z príkladu 137 nie je analytická funkcia a preto $\int_C (\overline{z})^2 dz$ závisí od integračnej cesty.

13.2 Cauchyho integrálna veta vo viacnásobne súvislých oblastiach.

Theorem 149 *Nech je $f : A(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je analytická funkcia a $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ sú jednoduché, po častiach hladké, uzavreté krivky orientované v jednom smere, ktoré spĺňajú podmienky:*
a) $\overline{IntC_i} \subset IntC_0$, pre $i = 1, 2, \ldots, n$
b) $\overline{IntC_i} \cap \overline{IntC_j} = \emptyset$, pre každé $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$
c) $\overline{IntC_0} \setminus \bigcup_{i=1}^n IntC_i \subset A$. Potom

$$\int_{C_0} f(z)\, dz = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f(z)\, dz.$$

Theorem 150 *(Veta o deformácii integračnej krivky.) Nech C_1, C_2 sú dve jednoduché uzavreté, po častiach hladké rovnako orientované krivky, ktoré sa nepretínajú a $C_2 \subset IntC_1$. Nech tieto krivky a množina bodov ležiacich medzi nimi ležia v oblasti D. Ak $f : D(\subset \boldsymbol{C}) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je analytická funkcia, tak*

$$\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{C_2} f(z)\, dz.$$

Example 151 *Vypočítajte*

$$\int_C \frac{1}{z-a} dz,$$

kde C je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka komplikovaného tvaru, ktorá vo svojom vnútri obsahuje singulárny bod $z = a$ funkcie $f(z) = \frac{1}{z-a}$.

Solution 152 *Aplikujeme vetu 150 a dostaneme, že ak C_1 je krivka jednoduchého tvaru, jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná napríklad kružnica so stredom v bode $z = a$ a s polomerom R, ktorá leží v $IntC$, tak dostaneme*

$$\int_C \frac{1}{z-a} dz = \int_{C_1} \frac{1}{z-a} dz.$$

Pretože

$$C_1 : \varphi_1 : \langle 0, 2\pi \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C},\ \varphi_1(t) = a + Re^{it},\ \varphi_1'(t) = iRe^{it},$$

potom

$$\int_C \frac{1}{z-a}dz = \int_{C_1} \frac{1}{z-a}dz = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{a + Re^{it} - a}dt = i[t]_0^{2\pi} = 2\pi i. \square$$

Example 153 *Vypočítajte*

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n}dz,\ n \neq 1,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

kde C je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka, ktorá vo svojom vnútri obsahuje bod $z = a$.

Solution 154 *Aplikujeme tú istú metódu ako v predchádzajúcom príklade a dostaneme*

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n}dz = \int_{C_1} \frac{1}{(z-a)^n}dz = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{(a + Re^{it} - a)^n}dt =$$

$$= \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t}dt = \frac{i}{R^{n-1}} \left[\frac{e^{i(1-n)t}}{i(1-n)} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

pričom sme použili

$$e^{(1-n)2\pi i} = \cos((1-n)2\pi) + i\sin((1-n)2\pi) = 1,$$

tak dostaneme

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n}dz = \left\{ \begin{array}{lll} 2\pi i & \text{pre} & n = 1 \\ 0 & \text{pre} & n = 0, -1, \pm 2, \ldots \end{array} \right. . \square$$

13.3 Cauchyho integrálna formula.

Theorem 155 *Nech C je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka a $f : IntC \cup C \longrightarrow \boldsymbol{C}$ je analytická funkcia. Potom pre každé $a \in IntC$*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

Nasledujúcu vetu uvedieme bez dôkazu.

Theorem 156 *Každá funkcia $f(z)$ analytická v uzavretej oblasti $\overline{D}$ má v tejto oblasti derivácie všetkých rádov a platí*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,\ n = 1, 2, \ldots$$

kde C je uzavretá, kladne orientovaná, po častiach hladká krivka, ktorá leží so svojím vnútrom v $\overline{D}$.

Example 157 *Vypočítajte integrál $\int_C \frac{e^z}{z(z-i)}dz$, kde C je kladne orientovaná kružnica so stredom v bode $z = i$ a s polomerom $\frac{1}{2}$.*

Solution 158 *Pretože funkcia $f(z) = \frac{e^z}{z}$ je analytická vo vnútri kruhu C a bod $z = i \in IntC$, potom*

$$\int_C \frac{e^z}{z(z-i)}dz = \int_C \frac{\frac{e^z}{z}}{z-i}dz = 2\pi i\left[\frac{e^z}{z}\right]_{z=i} = 2\pi e^i. \square$$

Example 159 *Vypočítajte integrál $\int_C \frac{\sin z}{(z-i)^4}dz$, kde C je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka obsahujúca bod i.*

Solution 160 *Funkcia $\sin z$ je analytická funkcia v $\boldsymbol{C}$. Bod $z = i \in IntC$, potom*

$$\int_C \frac{\sin z}{(z-i)^4}dz = \frac{2\pi i}{3!}\left[\frac{d^3(\sin z)}{dz^3}\right]_{z=i} = -\frac{\pi i}{3}\cos i = -\frac{\pi i}{3}\cosh 1. \square$$

14 Cvičenia.

V príkladoch 1 - 5 pomocou Cauchyho integrálnej vety vypočítajte integrály po jednoduchých, po častiach hladkých, uzavretých, kladne orientovaných krivkách:

1. $\int_C \frac{1}{z^2+1} dz$, $C = \left\{ z \in \boldsymbol{C} : (\operatorname{Re} z)^2 + 4 (\operatorname{Im} z)^2 = 1 \right\}$. [0.]
2. $\int_C \frac{z+4}{z^2+2z+5} dz$, $C : |z| = 1$. [0.]
3. $\int_C \frac{z^2+5}{z^2+1} dz$, $C = \left\{ z \in \boldsymbol{C} : 4 (\operatorname{Re} z)^2 + 16 (\operatorname{Im} z)^2 = 1 \right\}$. [0.]
4. $\int_C \frac{e^z+1}{z+i} dz$, $C : |z| = \frac{1}{2}$. [0.]
5. $\int_C \frac{z+2}{z^2-2z+2} dz$, $C : |z+1| = 1$. [0.]

   V príkladoch 6 - 14 pomocou Cauchyho integrálnej vety, alebo Cauchyho integrálnej formuly vypočítajte integrály po jednoduchých, po častiach hladkých, uzavretých, kladne orientovaných krivkách:

6. $\int_C \frac{e^z \cos z}{(1+z^2) \sin z} dz$, $C : |z-2-i| = \sqrt{2}$. [0.]
7. $\int_C \frac{\sin z}{z+i} dz$, $C : |z-i| = 1$. [0.]
8. $\int_C \frac{1}{(z-2)(z+2i)} dz$, $C : |z| = 1$. [0.]
9. $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1} dz$, $C : |z| = \frac{1}{2}$. [0.]
10. $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1} dz$, $C : |z| = \frac{3}{2}$. $[18\pi i.]$
11. $\int_C \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz$, $C : |z-2i| = \frac{3}{2}$. $\left[\frac{\pi}{e}.\right]$
12. $\int_C \frac{z}{z^4-1} dz$, $C : |z-a| = a$, $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 1$. $\left[i\frac{\pi}{2}.\right]$
13. $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1} dz$, $C : |z+1| = 1$. $[18\pi i.]$
14. $\int_C \frac{e^z+1}{z+i} dz$, $C : |z+i| = 2$. $[2\pi \sin 1 + 2i\pi (1 + \cos 1).]$
15. $\int_C \frac{z^2}{(z-4)(z^2+4)} dz$, $C : |z-1+i| = 2$. $\left[-\frac{2\pi}{5} + i\frac{\pi}{5}.\right]$
16. $\int_C \frac{\sin z}{z^2+1} dz$, $C : |z+i| = 1$. $[i\pi \sinh 1.]$
17. $\int_C \frac{z+2}{z^2-2z+2} dz$,

    (a) $C : |z-1-2i| = 2$. $[\pi (3+i).]$

(b) $C: |z-1+2i| = 2$. $[\pi(-3+i).]$

18. $\int_C \frac{1}{z^4-1} dz$, $C: |z-1-i| = \sqrt{2}$. $\left[\frac{\pi(-1+i)}{2}.\right]$

19. Vypočítajte $\int_C \frac{1}{z^2-i} dz$, ak C je jednoduchá, po častiach hladká, uzavretá, kladne orientovaná krivka, na ktorej neležia korene menovateľa. Vypočítajte všetky možnosti.

$$\left[\begin{array}{c} \text{korene menovateľa: } z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\,,\ z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\,. \\ \text{a. } z_0 \in IntC,\ z_1 \notin IntC\ \left[\frac{\pi\sqrt{2}}{2}(1+i)\,.\right] \\ \text{b. } z_0 \notin IntC,\ z_1 \in IntC\ \left[-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}(1+i)\,.\right] \\ \text{c. } z_0,\ z_1 \in IntC\ [0.] \\ \text{d. } z_0,\ z_1 \notin IntC\ [0.] \end{array}\right]$$

Použitím Cauchyho integrálnej formuly vypočítajte integrály:

20. Vypočítajte $\int_C \frac{\sin z}{z} dz$, kde C je kladne orientovaná kružnica $|z| = 1$. [0.]

21. Vypočítajte $\int_C \frac{\cos z}{z} dz$, kde C je kladne orientovaná kružnica $|z| = 1$. $[2\pi i.]$

22. Vypočítajte $\int_C \frac{z^2}{z-2i} dz$, kde C je:

    (a) $|z| = 3$, $\oplus$, $[-8\pi i.]$
    (b) $|z| = 1$, $\oplus$. [0.]

23. Vypočítajte $\int_C \frac{\sin\left(\frac{\pi z}{4}\right)}{z^2-1} dz$, kde C je kladne orientovaná kružnica $|z-1| = 1$. $\left[\frac{\pi i}{\sqrt{2}}.\right]$

24. Vypočítajte $\int_C \frac{1}{z^2+9} dz$, kde C je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká kladne orientovaná krivka, pričom:

    (a) body $3i \in IntC$, $-3i \in ExtC$, $\left[\frac{\pi}{3}.\right]$
    (b) body $-3i \in IntC$, $3i \in ExtC$, $\left[-\frac{\pi}{3}.\right]$
    (c) body $-3i$, $3i \in IntC$. [0.]

25. Vypočítajte $\int_C \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz$, kde C je kladne orientovaný obvod štvorca s vrcholmi v bodoch 1, $1+2i$, $-1+2i$, -1. $[-\pi i \cosh 1.]$

26. Vypočítajte $\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$, kde C je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká kladne orientovaná krivka, pričom:

(a) body $0 \in IntC$, $1 \in ExtC$, $[2\pi i.]$

(b) body $1 \in IntC$, $0 \in ExtC$, $[-\pi ie.]$

(c) body 0, $1 \in IntC$. $[\pi i\,(2-e)\,.]$

15 Taylorove a Laurentove rady.

15.1 Analytickosť súčtu mocninového radu.

Theorem 161 *Ak mocninový rad* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *má polomer konvergencie* $R > 0$*. Potom jeho súčet*

$$f : K(a,R) \longrightarrow \boldsymbol{C},\; f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

je analytická funkcia a platí

$$f\,' : K(a,R) \longrightarrow \boldsymbol{C},\; f\,'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}.$$

Theorem 162 *Ak má mocninový rad* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *polomer konvergencie* $R > 0$*, potom jeho súčet*

$$f : K(a,R) \longrightarrow \boldsymbol{C},\; f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

má derivácie všetkých rádov a platí

$$f^{(k)} : K(a,R) \longrightarrow \boldsymbol{C},\; f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\, c_n (z-a)^{n-k}.$$

a

$$f^{(k)}(a) = k! c_k, \quad \textit{alebo} \;\; c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Theorem 163 *Nech funkcionálny rad funkcií komplexnej premennej*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

rovnomerne konverguje na C*, kde* $C : \varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je jednoduchá, po častiach hladká krivka. Ak sú funkcie* $f_n(z)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ *spojité na* C *a ak* $f : C \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *je ich súčet, potom*

$$\int_C f(z)\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(z)\, dz.$$

15.2 Taylorove rady.

Z predchádzajúceho odseku vieme, že súčet mocninového radu, ktorý je konvergentný v kruhu $K(a, R)$ je analytická funkcia v tomto kruhu. Ukážeme, že platí aj obrátené tvrdenie.

Definition 164 *Nech má funkcia komplexnej premennej f v bode $a \in \boldsymbol{C}$ derivácie všetkých rádov. Potom mocninový rad*

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \tag{(1)}$$

nazývame Taylorovým radom funkcie f v bode a.

Theorem 165 *Nech f je analytická funkcia v oblasti D. Nech $a \in D$ a $K(a, R) \subset D$. Potom existuje mocninový rad*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

taký, že

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad pre \quad každé\ z \in K(a, R),$$

pričom

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi,$$

kde C je jednoduchá, po častiach hladká, uzavretá krivka, kladne orientovaná, ktorá leží v $K(a, R)$ tak, že $a \in IntC$.

Veta 196 a veta 199 implikujú nasledujúcu vetu:

Theorem 166 *Ak f je analytická funkcia v oblasti D, potom f má v každom bode z D derivácie všetkých rádov. Ak $K(a, R) \subset D$, potom*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \ pre\ každé \ \ z \in K(a, R).$$

Example 167 *Nájdite Taylorov rozvoj funkcie $f: \boldsymbol{C} \setminus \{-1\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z)=\ln(1+z)$ v bode $a=0$ a jeho oblasť konvergencie.*

Solution 168 *Funkcia f je analytická funkcia v $\boldsymbol{C}\setminus\{z\in\boldsymbol{C}:\operatorname{Re}z\leq-1\wedge\operatorname{Im}z=0\}$, teda aj v bode $a=0$ a platí*

$$f'(z)=\frac{1}{z+1},\ f''(z)=-\frac{1}{(z+1)^2},\ldots,\ f^{(n)}(z)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(z+1)^n}$$

odkiaľ

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=-1,\ldots,\ f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!$$

Potom Taylorov rad má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$$

a jednoduchou aplikáciou riešenia príkladu 96 konverguje v kruhu $K(0,1)$ a platí

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n},\quad \textit{pre každé}\ z\in K(0,1).\ \square$$

Example 169 *Nájdite Taylorov rozvoj funkcie $\exp:\boldsymbol{C}\longrightarrow\boldsymbol{C}, f(z)=e^z$ v bode $a=0$.*

Solution 170 *Riešenie Funkcia f je analytická funkcia v $\boldsymbol{C}$ a platí*

$$f^{(n)}(z)=e^z$$

a my dostaneme rad

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},$$

ktorý konverguje v kruhu $K(0,\infty)=\boldsymbol{C}$ a teda platí

$$\exp z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\ \forall z\in\boldsymbol{C}.\ \square \tag{(2)}$$

Podobným spôsobom môžeme dostať Taylorove rady

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \forall z\in\boldsymbol{C}, \tag{(3)}$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\ \forall z\in\boldsymbol{C}, \tag{(4)}$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \ \forall\ z \in K\left(0,1\right)\ , \tag{(5)}$$

čo si čitateľ iste overí. Ak sa dá derivácia funkcie f vyjadriť rekurentným vzťahom, potom pre takúto funkciu môžme nájsť Taylorov rad ihneď. Ak to nie je možné, použijeme na nájdenie Taylorovho radu danej funkcie f algebrické rovnosti a Taylorove rady známych funkcií. Napríklad:

Example 171 *Nájdite Taylorov rozvoj funkcie* $f:\boldsymbol{C}\setminus\{-1\}\longrightarrow\boldsymbol{C}$, $f\left(z\right)=\frac{1}{1+z}$ *v bode* $a=i$.

Solution 172 *Očakávame, že hľadaný TR dostaneme v tvare:* $f\left(z\right)=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-i\right)^n.$

Máme $\frac{1}{1+z}=\frac{1}{z-i+i+1}=\frac{1}{1+i}\frac{1}{1+\frac{z-i}{1+i}}=\frac{1}{1+i}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{1+i}\right)}$. *Ak budeme predpokladať, že*

$$\left|-\frac{z-i}{1+i}\right|=\left|\frac{z-i}{1+i}\right|<1\iff\left|z-i\right|<\sqrt{2},$$

potom pomocou známeho Taylorovho radu (5) dostaneme

$$f\left(z\right)=\frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(\frac{z-i}{1+i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{\left(z-i\right)^n}{\left(1+i\right)^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(1+i\right)^{n+1}}\left(z-i\right)^n, \forall z\in K\left(i,\sqrt{2}\right).\square$$

Example 173 *Nájdite Taylorov rozvoj funkcie* $f:\boldsymbol{C}\setminus\{3\}\longrightarrow\boldsymbol{C}$, $f\left(z\right)=\frac{z}{\left(z-3\right)^2}$ *v bode* $a=0$.

Solution 174 *Očakávame, že hľadaný TR dostaneme v tvare:* $f\left(z\right)=\frac{z}{\left(z-3\right)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-0\right)^n.$

Máme

$$\frac{z}{\left(z-3\right)^2}=z\frac{1}{\left(z-3\right)^2}=\frac{z}{9}\frac{1}{\left(\frac{z}{3}-1\right)^2}=\frac{z}{9}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{3}\right)^2}$$

Z Taylorovho radu (5) funkcie $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n, \forall z\in K\left(0,1\right),$ *derivovaním dostaneme:*

$$\frac{1}{\left(1-z\right)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n\,z^{n-1}, \forall z\in K\left(0,1\right),$$

potom ak $\left[\left|\frac{z}{3}\right|<1\iff\left|z\right|<3\right]$ *dostávame*

$$\frac{z}{9}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{3}\right)^2}=\frac{z}{9}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{z}{3}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{z^n}{3^{n+1}}, \forall z\in K\left(0,3\right).\square$$

Example 175 *Nájdite Taylorov rozvoj funkcie* $f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = ze^{-z^2}$ *v bode* $a = 0$.

Solution 176 *Očakávame, že hľadaný TR dostaneme v tvare:* $f(z) = ze^{-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Funkcia f *je analytická funkcia v* $\boldsymbol{C}$ *a s použitím radu (2) platí*

$$f(z) = ze^{-z^2} = \left[\ ak\ \left|-z^2\right| < \infty \iff |z| < \infty\ \right] =$$

$$= z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-z^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{n!},\ \forall\, z \in \boldsymbol{C}. \square$$

16 Cvičenia.

V úlohách 1 - 2 pomocou definície nájdite Taylorov rad funkcie f so stredom v bode a a vyšetrite jeho konvergenciu:

1. $f(z) = \sin^2 z$, $a = 0$.
   $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}, \text{ konverguje na } M = \boldsymbol{C}\right]$

2. $f(z) = \ln(iz+2)$, $a = 1+2i$.
   $\left[i\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (z-1-2i)^n, \text{ konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-1-2i| < 1\}\right]$
   V úlohách 3 - 9 vypočítajte Taylorov rad funkcie f so stredom v bode a a vyšetrite jeho konvergenciu:

3. $f(z) = \frac{z}{z+2}$, $a = 1$.
   $\left[\frac{1}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} (z-1)^n, \text{ konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-1| < 3\}\right]$

4. $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$, $a = 0$.
   $\left[-1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n, \text{ konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z| < 1\}\right]$

5. $f(z) = \frac{z+2}{z^2+5z+4}$, $a = 1$.
   $\left[\begin{array}{c} \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(2 \cdot 5^{-n-1} + 2^{-n-1}\right)(z-1)^n, \\ \text{konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-1| < 2\} \end{array}\right]$

6. $f(z) = \frac{z}{z^2+4z+3}$, $a = 2$.
   $\left[\begin{array}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \left(3 \cdot 5^{-n-1} - 3^{-n-1}\right)(z-2)^n, \\ \text{konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-2| < 3\} \end{array}\right]$

7. $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z+5}$, $a = i$.
   $\left[\begin{array}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2-3i}{4}(1+i)^{-n-1} - \frac{2+3i}{4}(1-3i)^{-n-1}\right)(z-i)^n, \\ \text{konverguje na } M = \left\{z \in \boldsymbol{C} : |z-i| < \sqrt{2}\right\} \end{array}\right]$

8. $f(z) = \frac{z^2+i}{z^2+iz+2}$, $a = 1$.
   $\left[\begin{array}{c} \frac{2+i}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3} \left[\frac{(1+i)}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1+4i}{(1+2i)^{n+1}}\right](z-1)^n, \\ \text{konverguje na } M = \left\{z \in \boldsymbol{C} : |z-1| < \sqrt{2}\right\} \end{array}\right]$

9. $f(z) = e^{3z-2}$, $a = 1$. $\left[e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}(z-1)^n, \text{ konverguje na } M = \boldsymbol{C}\right]$

16.1 Laurentove rady a singulárne body funkcií.

Definition 177 *Nech* $\ldots, c_{-n}, \ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots, a$ *sú komplexné čísla. Potom rad*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \cdots + c_{-n}(z-a)^{-n} + \cdots + c_{-2}(z-a)^{-2} + c_{-1}(z-a)^{-1} + \\ + c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \ldots \qquad ((1))$$

nazývame Laurentov rad v bode a.

Rad

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n = \cdots + c_{-n}(z-a)^{-n} + \cdots + c_{-2}(z-a)^{-2} + c_{-1}(z-a)^{-1}$$

sa nazýva hlavná časť radu (1),

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \ldots$$

sa nazýva analytická (regulárna) časť radu (1).

Definition 178 *Hovoríme, že Laurentov rad (1) konverguje (rovnomerne) na množine* $M \subset \boldsymbol{C}$ *ak jeho hlavná časť aj jeho analytická časť konverguje (rovnomerne) na množine* M. *Súčtom Laurentovho radu rozumieme súčet hlavnej a analytickej časti radu.*

Theorem 179 *Pre každý Laurentov rad (1) existujú čísla (jediné)* r, R $(0 \le r \le \infty, 0 \le R \le \infty)$ *také, že:*

a) analytická časť radu (1) absolútne konverguje na otvorenom kruhu $K(a,R)$, *rovnomerne konverguje na každom uzavretom kruhu* $\overline{K(a,R_1)}$, *kde* $R_1 < R$ *a diverguje na* $\boldsymbol{C} \setminus \overline{K(a,R)}$.

b) hlavná časť radu (1) absolútne konverguje na $\boldsymbol{C} \setminus \overline{K(a,r)}$, *rovnomerne konverguje na každej* $\boldsymbol{C} \setminus \overline{K(a,r_1)}$, *kde* $r_1 > r$ *a diverguje na* $K(a,r)$.

c) Ak $r < R$, *potom Laurentov rad (1) absolútne konverguje v množine* $P(a,r,R)$ *- medzikruží ohraničenom dvomi koncentrickými kružnicami s polomermi* r, R, *rovnomerne konverguje na* $\overline{P(a,r_1,R_1)}$, *kde* $r < r_1 < R_1 < R$ *a diverguje na* $\boldsymbol{C} \setminus \overline{P(a,r,R)}$.

Theorem 180 *Nech*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

je konvergentný na $P(a,r,R)$. *Potom jeho súčet*

$$f : P(a,r,R) \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

je analytická funkcia.

Theorem 181 *Nech* $f : P(a,r,R) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ *je analytická funkcia. Potom existuje jediný Laurentov rad, ktorý na* $P(a,r,R)$ *konverguje ku funkcii* $f(z)$. *Koeficienty Laurentovho radu majú tvar*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,\ n = 0,\ \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{(2)}$$

kde C *je ľubovoľná jednoduchá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka, ktorá leží v* $P(a,r,R)$ *tak, že* $a \in IntC$.

Remark 182 *Rozvoj funkcie* $f(z)$ *do Laurentovho radu má jednu výhodu:* f *môžeme rozvinúť do nekonečného radu v takom bode* $z = a$, *v ktorom* f *nie je analytická (v tomto prípade rozklad funkcie do Taylorovho radu v bode* $z = a$ *nie je možný).*

Výpočet koeficientov Laurentovho radu použitím vzťahov (2) je nepraktický. Pri rozvoji funkcie do Laurentovho radu je výhodnejšie aplikovať znalosti Taylorových rozvojov známych funkcií.

Example 183 *Nájdite Laurentov rad funkcie* $f : \boldsymbol{C} \setminus \{-1,1\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \frac{1-2z}{1-z^2}$ *na* $P(1,0,2)$.

Solution 184 *Očakávame, že hľadaný LR dostaneme v tvare:* $f(z) = \frac{1-2z}{1-z^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-1)^n$.

Funkcia je analytická na $P(1,0,2)$ *a platí*

$$f(z) = \frac{1-2z}{1-z^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{z-1+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)} \quad \left[nech\ 0 < |z-1| \wedge \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1 \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{2}\right)^n.$$

Tak pre $0 < |z-1| < 2$ *máme*

$$f(z) = \frac{1-2z}{1-\ z^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{2^{n+2}} (z-1)^n$$

a hlavná časť radu vypočítaného Laurentovho radu má iba jeden člen $\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}$, *ktorý „konverguje“ na* $\boldsymbol{C}\setminus\{1\}$. *Analytická časť* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3}{2^{n+2}}(z-1)^n$ *konverguje na* $K(1,2)$. *Teda (a) konverguje na* $P(1,0,2)$. $\square$

Example 185 *Nájdite Laurentov rad funkcie* $f : \boldsymbol{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ *v bode* $z = 0$.

Solution 186 *Očakávame, že hľadaný LR dostaneme v tvare:* $f(z) = \frac{e^z}{z^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$.

Funkcia je analytická na $P(0,0,\ \infty) = \boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ *a platí*

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\, e^z\ [nech\ 0 < |z| <\ \infty] = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{n!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{n!} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+2)!}$$

a rad konverguje na $P(0,0,\ \infty)$. $\square$

Example 187 *Nájdite Laurentov rad funkcie* $f : \boldsymbol{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}}$ *na* $P(0,0,\ \infty)$.

Solution 188 *Očakávame, že hľadaný LR dostaneme v tvare:* $f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$.

Funkcia je analytická na $P(0,0,\ \infty) = \boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ *a platí*

$$f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}}\ \left[nech\ \left|\frac{1}{z}\right| <\ \infty\ \Longrightarrow |z| > 0\right] =$$

$$= z^5 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{5-n}}{n!} = \sum_{n=-\infty}^{5}\frac{z^n}{(5-n)!}.\square$$

17 Cvičenia.

V úlohách 1 - 20 nájdite Laurentov rad funkcie f so stredom v bode a pre medzikružie $P(a,r,R) = \{z \in \boldsymbol{C} : r < |z-a| < R\}$.

1. $f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}}$, $a = 0$, $P(0,0,\infty)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{5-n}\right]$
2. $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$, $a = i$, $P\left(i, \sqrt{5}, \infty\right)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(2-i)^n}{(z-i)^{n+2}}\right]$
3. $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$, $a = 0$, $P(0,0,1)$. $\left[\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1}\right]$
4. $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$, $a = i$, $P(i,0,1)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1-2^{n+1}}{2(2i)^n} (z-i)^{n-1}\right]$
5. $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$, $a = 0$, $P(0,1,\infty)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n-3}\right]$
6. $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$, $a = 0$, $P(0,0,1)$. $\left[\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right]$
7. $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}$, $a = 1$, $P(1,0,1)$. $\left[2(z-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n\right]$
8. $f(z) = \frac{1}{z^2+iz+2}$, $a = -2i$, $P(-2i,3,\infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-1} (3i)^{-n-1} (z+2i)^{n-1}\right]$
9. $f(z) = \frac{1}{z^2-3iz-2}$, $a = 2i$, $P(2i,1,\infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{-n-1} i^{-n-1} (z-2i)^{n-1}\right]$
10. $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$, $a = 1$, $P(1,0,1)$. $\left[(-1) \sum_{n=-1}^{\infty} (z-1)^n\right]$
11. $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$, $a = 1$, $P(1,1,\infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-2} (z-1)^n\right]$
12. $f(z) = \frac{5z+11}{z^2+4z+3}$, $a = -1$, $P(-1,0,2)$. $\left[3(z+1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-n} (z+1)^n\right]$
13. $f(z) = \frac{5z+11}{z^2+4z+3}$, $a = -1$, $P(-1,2,\infty)$. $\left[5(z+1)^{-1} + \sum_{n=-\infty}^{-2} (-1)^{n+1} 2^{-n} (z+1)^n\right]$
14. $f(z) = \frac{5z+11}{z^2+4z+3}$, $a = -3$, $P(-3,0,2)$. $\left[2(z+3)^{-1} - \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} (z+3)^n\right]$
15. $f(z) = \frac{5z+11}{z^2+4z+3}$, $a = -3$, $P(-3,2,\infty)$. $\left[2(z+3)^{-1} + 3 \sum_{n=-\infty}^{0} 2^{-n} (z+3)^n\right]$
16. $f(z) = \frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$, $a = 0$, $P(0,1,2)$. $\left[\left(-\frac{1}{12}\right) \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} z^{2n+1} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-2n-1}\right]$
17. $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $a = 2$, $P\left(2, 0, \sqrt{5}\right)$. $\left[(z-2)^{-1} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2+i)^{n+1} - (2-i)^{n+1}}{5^{n+1}} (z-2)^n\right]$
18. $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $a = 0$, $P(0,1,2)$. $\left[2 \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n z^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} z^n\right]$
19. $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{\pi z+1}{z}\right)$, $a = 0$, $P(0,0,\infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{1-n}}{(1-2n)!} z^{2n+1} - z\right]$
20. $f(z) = 2^z + 2^{\frac{1}{z}} - 1$, $a = 0$, $P(0,0,\infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(\ln 2)^n (-n)!} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} z^n\right]$

17.1 Izolované singulárne body.

V predchádzajúcej časti sme definovali regulárne a singulárne body funkcie.

Definition 189 *Body komplexnej roviny* $\boldsymbol{C}$ *v ktorých je funkcia* f *analytická nazývame regulárne body funkcie. Body v ktorých funkcia nie je analytická (teda aj tie, v ktorých funkcia nie je definovaná) nazývame singulárne body.*

Definition 190 *Nech* f *je analytická funkcia definovaná v prstencovom okolí bodu* $a \in \overline{\boldsymbol{C}}$, $a \notin D(f)$. *Bod* a *nazývame izolovaný singulárny bod (singularita) funkcie* f.

Funkciu $f(z)$ môžme rozvinúť do Laurentovho radu v bode $z = a$ na $O_r^\circ(a)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n .$$

Definition 191 *Nech* $z = a \in \boldsymbol{C}$ *je izolovaný singulárny bod funkcie* $f : O^\circ(a) \to \boldsymbol{C}$. *Potom ak*

a) existuje konečná limita $\lim_{z\to a} f(z)$, *tento bod nazývame odstrániteľný singulárny bod;*

b) ak $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, *potom bod* $z = a$ *nazývame pól;*

c) ak $\lim_{z\to a} f(z)$ *neexistuje, bod* $z = a$ *nazývame podstatne singulárny bod.*

Example 192 *a) Funkcia* $f : \boldsymbol{C}\setminus\{0\} \to \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ *má odstrániteľný singulárny bod* $z = 0$, *pretože*

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

b) Funkcia $f : \boldsymbol{C} \setminus \{5i\} \to \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{1}{z-5i}$ *má pól v bode* $z = 5i$, *pretože*

$$\lim_{z\to 5i} \frac{1}{z-5i} = \infty.$$

c) Funkcia $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \to \boldsymbol{C}$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ *má podstatný singulárny bod* $z = 0$, *pretože ak* $z \in \boldsymbol{R}$ *platí*

$$\lim_{z\to 0^+} e^{\frac{1}{z}} = \infty, \ \lim_{z\to 0^-} e^{\frac{1}{z}} = 0,$$

teda

$$\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$$

neexistuje. $\square$

Ukážeme, že existuje vzťah medzi izolovanými singulárnymi bodmi funkcie f a Laurentovým radom funkcie f v týchto bodoch.

Theorem 193 *Nech $f(z)$ je analytická v prstencovom okolí $O^{\circ}(a)$ bodu $z = a$. Bod $z = a$ je odstrániteľný singulárny bod funkcie f vtedy a len vtedy ak jej Laurentov rad má tvar*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

na $O^{\circ}(a)$.

Remark 194 *Ak funkciu f, ktorá má v bode $z = a$ odstrániteľný singulárny bod dodefinujeme podľa predchádzajúcej vety v tomto bode hodnotou $f(a) = c_0$, potom dostaneme funkciu analytickú na $O(a)$.*

Example 195 *Ak definujeme funkciu $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \to \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ z predchádzajúceho príkladu, potom ju možno dodefinovať v bode $z = 0$ (odstrániteľnom singulárnom bode), dostaneme analytickú funkciu:*

$$f : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C},\ f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & \text{pre} \quad z \neq 0 \\ 1 & \text{pre} \quad z = 0 \end{cases} . \square$$

Theorem 196 *Nech f je analytická funkcia definovaná na nejakom prstencovom okolí bodu $z = a$, $O^{\circ}(a)$. Bod $z = a$ je pól funkcie f vtedy a len vtedy ak pre Laurentov rad funkcie f v bode $z = a$ definovaný na $O^{\circ}(a)$ existuje koeficient $c_{-m} \neq 0$, $m > 0$ a pre každé $n > m$, $c_{-n} = 0$.*

Definition 197 *Nech f je analytická funkcia definovaná v prstencovom okolí bodu $a-$ $O^{\circ}(a)$ a má Laurentov rad tvaru*

$$f(z) = c_{-m}(z-a)^{-m} + c_{-m+1}(z-a)^{-m+1} + \cdots + c_{-1}(z-a)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

kde $c_{-m} \neq 0$. Bod $z = a$ nazývame pólom m-tého rádu funkcie f.

Example 198 *Nájdite póly funkcie $f : \boldsymbol{C} \setminus \{1\} \to \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{z}{(z-1)^3}$.*

Solution 199 *Pretože na $P(1, 0, \infty)$ Laurentov rad funkcie f bude:*

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^3} = \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^2},$$

tak vidíme, že bod $z = 1$ je pól tretieho rádu. $\square$

Theorem 200 *Nech je funkcia f analytická na prstencovom okolí bodu a, $O^{\circ}(a)$. Bod $z = a$ je pól m-tého rádu funkcie f vtedy a len vtedy ak*

$$\lim_{z \to a} (z-a)^m f(z) \neq 0.$$

Definition 201 *Nech $f(z)$ je analytická funkcia v oblasti D ($f(z) \not\equiv 0$). Nech pre bod $a \in D$ platí*

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0 \quad a \quad f^{(k)}(a) \neq 0.$$

Potom hovoríme, že bod $z = a$ je nulový bod k-teho rádu funkcie $f(z)$. Ak $k = 1$ hovoríme, že bod a je jednoduchý nulový bod funkcie f.

Nech bod $z = a$ je nulový bod k-teho rádu analytickej funkcie $f(z)$, potom platí

$$c_0 = f(a) = 0, c_1 = f'(a) = 0, \dots, c_{k-1} = \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} = 0, c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$$

a Taylorov rozvoj funkcie $f(z)$ v bode $z = a$ má tvar

$$f(z) = c_k (z-a)^k + c_{k+1} (z-a)^{k+1} + \dots = (z-a)^k [c_k + c_{k+1}(z-a) + \dots] = (z-a)^k \Phi(z)$$

kde $\Phi(a) \neq 0$.

Example 202 *Nájdite nulové body funkcie* $\cos z$ *a určte ich druh.*

Solution 203 *Ak použijeme znalosti elementárnej funkcie kosínus* - $\cos z$, *dostaneme, že jej nulové body sú*

$$z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Pretože

$$\cos' z|_{z_k} = -\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1} \neq 0,$$

teda každý nulový bod z_k je jednoduchý. □

Theorem 204 *Nech $z = a$ je nulový bod m-tého rádu funkcie $g(z)$, t.j. $g(z) = (z-a)^m \Phi(z)$, $\Phi(a) \neq 0$ a Φ je analytická funkcia definovaná na nejakom okolí bodu $a - O(a)$. Potom $z = a$ je pól m-tého rádu funkcie $f = \frac{h}{g}$, kde h je analytická funkcia definovaná na $O(a)$ a $h(a) \neq 0$.*

Example 205 *Nájdite singulárne body a určte ich typ ak je funkcia daná predpisom $f : \boldsymbol{C} \setminus \{-1, 2i\} \to \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{1}{(z-2i)^2 (z+1)}$.*

Solution 206 *Pretože funkcia* $g(z) = (z-2i)^2 (z+1)$ *má v bode* $z = 2i$ *dvojnásobný nulový bod a v bode* $z = -1$ *jednoduchý nulový bod, tak bod* $z = 2i$ *je pól druhého rádu a bod* $z = -1$ *je jednoduchý pól funkcie* f. $\square$

Veta 193 o odstrániteľnom singulárnom bode spolu s vetou 196 o póle m-tého rádu implikujú nasledujúcu vetu:

Theorem 207 *Bod* $z = a$ *je podstatným singulárnym bodom analytickej funkcie* $f : O^\circ(a) \to \boldsymbol{C}$ *vtedy a len vtedy, ak hlavná časť jej Laurentovho radu na* $O^\circ(a)$ *má nekonečne mnoho členov.*

Example 208 *Určte typ singulárneho bodu* $z = 0$ *pre funkciu* $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0\} \to \boldsymbol{C}$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

Solution 209 *Pretože platí:*

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}, \ \forall z \in P(0, 0, \infty), \ (|z| > 0),$$

teda hlavná časť Laurentovho radu má nekonečne mnoho členov, čo implikuje, že bod $z = 0$ *je podstatný singulárny bod.* $\square$

17.2 Rezíduá.

Pojem rezídua je jedným z najdôležitejších pojmov v teórii funkcií komplexnej premennej s mnohými praktickými aplikáciami. Vieme, že ak je funkcia $f(z)$ definovaná v jednoducho súvislej oblasti D analytická, potom podľa Cauchyho integrálnej vety

$$\int_C f(z)\, dz = 0,$$

pre každú jednoduchú, uzavretú, po častiach hladkú krivku ležiacu v oblasti D. Ak funkcia $f(z)$ má izolovaný singulárny bod $z = a \in IntC$, potom $\int_C f(z)\, dz$ vo všeobecnosti nemusí byť rovný nule. Lema 145 o nezávislosti krivkového integrálu z analytickej funkcie hovorí, že hodnota $\int_C f(z)\, dz$ nezávisí od C.

Definition 210 *Nech $f : D\,(\subset \boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{C}$ je analytická s výnimkou izolovaného singulárneho bodu $z = a$. Potom hodnotu*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f\,(z)\,dz,$$

kde C je jednoduchá, po častiach hladká uzavretá kladne orientovaná krivka, taká že $a \in IntC$, nazývame rezíduum funkcie $f\,(z)$ v bode $z = a$ a označujeme

$$\operatorname*{res}_{z=a} f\,(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f\,(z)\,dz. \tag{(1)}$$

Ak rozvinieme funkciu f na prstencovom okolí $O^{\circ}\,(a)$ do Laurentovho radu v bode $z = a$, potom ľahko vidieť, že

$$\operatorname{res}_{z=a} f\,(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f\,(z)\,dz = c_{-1} \tag{(2)}$$

kde c_{-1} je koeficient v Laurentovom rade funkcie $f\,(z)$ pri $(z-a)^{-1}$.

17.3 Výpočet rezíduí.

Aby sme mohli rezíduá používať v praktických aplikáciách, musíme vedieť ako rezíduá počítať.

Remark 211 *Nech $z = a$ je podstatný singulárny bod funkcie f, potom* $\operatorname{res}_{z=a} f\,(z) = c_{-1}$ *môžme určiť iba z rozvoja funkcie f do Laurentovho radu v bode $z = a$ na nejakom prstencovom okolí $P\,(a, 0, R)$.*

Example 212 *Nájdite rezíduum funkcie $f : \boldsymbol{C}\setminus\{0\} \to \boldsymbol{C}$, $f\,(z) = e^{-\frac{1}{z}}$.*

Solution 213 *Bod $z = 0$ je podstatný singulárny bod funkcie f. Laurentov rad funkcie f v bode $z = 0$ je*

$$f\,(z) = e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \ldots$$

odkiaľ

$$\operatorname*{res}_{z=0} f\,(z) = \operatorname*{res}_{z=0} e^{-\frac{1}{z}} = c_{-1} = -1.\square$$

Theorem 214 *Nech $z = a$ je pól m-tého rádu funkcie f. Potom*

$$\operatorname{res}_{z=a} f\,(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f\,(z)\right]. \tag{(3)}$$

Lemma 215 *Ak je bod $z = a$ jednoduchý pól funkcie f, potom*

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a} \left[(z-a) f(z)\right].$$

Theorem 216 *Nech sú funkcie g, h analytické v bode $z = a$. Nech $h(a) \neq 0$, $g(a) = 0$ a $g'(a) \neq 0$. Potom je bod $z = a$ jednoduchý pól funkcie $f = \frac{h}{g}$ a*

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{h(a)}{g'(a)}.$$

Example 217 *Nájdite rezíduá funkcie $f : \boldsymbol{C}\setminus\{0,1\} \to \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{z^3+z^2+2}{z(z-1)^2}$.*

Solution 218 *Body $z_1 = 0$ a $z_2 = 1$ sú izolované singulárne body funkcie $f(z)$. Bod $z_1 = 0$ je jednoduchý pól a bod $z_2 = 1$ je pól druhého rádu funkcie f, potom*

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}\left[z \cdot \frac{z^3+z^2+2}{z(z-1)^2}\right] = 2$$

a

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 \cdot \frac{z^3+z^2+2}{z(z-1)^2}\right] = 1.\square$$

Example 219 *Nájdite rezíduum funkcie $f : \boldsymbol{C}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\boldsymbol{Z}\right\} \to \boldsymbol{C}$, $f(z) = \operatorname{tg} z$ v bode $a = \frac{\pi}{2}$.*

Solution 220 *Riešenie Máme*

$$f(z) = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad a \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \cos'(z)\,|_{z=\frac{\pi}{2}} = -\sin\frac{\pi}{2} = -1,$$

potom aplikáciou vety 216 dostaneme

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = \operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} z = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{-\sin\frac{\pi}{2}} = -1.\square$$

17.4 Cauchyho veta o rezíduách.

Theorem 221 *Nech $D \subset \boldsymbol{C}$ je jednoducho súvislá oblasť a C uzavretá, jednoduchá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka taká, že $C \subset D$. Nech $f : D(\subset \boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{C}$ je analytická funkcia s výnimkou konečného počtu izolovaných singulárnych bodov. Označme $z_1, z_2, \ldots, z_n$ singulárne body ležiace vo vnútri krivky C. Potom*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Example 222 *Vypočítajte*

$$\int_C \frac{1}{(z-1)^2 (z^2+1)} dz,$$

kde $C : \varphi : \langle 0, 2\pi \rangle \to \boldsymbol{C}$, $\varphi(t) = 1 + 2\cos t + i(1 + 2\sin t)$ *je kladne orientovaná.*

Solution 223 C *je kružnica so stredom v bode* $1+i$ *a s polomerom* 2. *Singulárne body* $z_1 = 1$ *a* $z_2 = i$ *ležia v* $IntC$, *potom*

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 \frac{1}{(z-1)^2 (z^2+1)}\right] = \lim_{z\to 1}\left[-\frac{2z}{(z^2+1)^2}\right] = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{1}{(z-1)^2 (z+i)(z-i)}\right] = \lim_{z\to i}\left[\frac{1}{(z-1)^2 (z+i)}\right] = \frac{1}{4}$$

a

$$\int_C \frac{1}{(z-1)^2 (z^2+1)} dz = 2\pi i\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right] = -\frac{\pi i}{2}.\square$$

Example 224 *Vypočítajte*

$$\int_C z^2 e^{\frac{1}{z}} dz,$$

kde $C : |z| = 1$ *je kladne orientovaná.*

Solution 225 C *je kružnica so stredom v začiatku a s polomerom 1. Singulárny bod* $z = 0$ *je podstatný singulárny bod, pričom platí*

$$z^2 e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2-n}}{n!} \quad a \quad c_{-1} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

potom

$$\int_C z^2 e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \frac{1}{6} = \frac{\pi i}{3}.\square$$

17.5 Výpočet nevlastných integrálov použitím rezíduí.

Theorem 226 *Nech je* $f : A \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} (\subset \boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{C}$ *analytická funkcia a*

a) A *je taká oblasť v komplexnej rovine* C, *že* $\boldsymbol{C}^+ \subset A$, *kde* $\boldsymbol{C}^+ = \{z \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

b) $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *sú izolované singulárne body funkcie* f *také, že* $\operatorname{Im} z_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

c) Existujú kladné reálne čísla M, ϱ, δ tak, že $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$ pre každé $z \in A$, $|z| > \varrho$. Potom nevlastný integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Example 227 *Vypočítajte*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2+2t+2)^2} dt$$

Solution 228 *Pretože $f : \boldsymbol{C} \setminus \{z_1, z_2\} \to \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{t^2}{(t^2+2t+2)^2}$ je analytická funkcia s izolovanými singulárnymi bodmi - pólmi druhého rádu $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -1 - i$. Pretože*

$$\lim_{z\to\infty} z^{1+\delta} f(z) = 0, \ \forall \delta > 0,$$

potom existujú M, ϱ také, že

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \forall z \in \boldsymbol{C}, |z| > \varrho$$

potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2+2t+2)^2} dt = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \pi. \square$$

18 Cvičenia.

V príkladoch 1 - 19 zistite druh izolovaných singulárnych bodov funkcie f a určte rezíduum funkcie f v týchto bodoch:

1. $f(z) = \frac{z^2}{z+3}$. $[z = -3$, pól 1. stupňa $res_{z=-3}[f(z)] = 9]$

2. $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+4)}$. $\left[\begin{array}{c} z = 2i, \text{ pól 1. stupňa } res_{z=2i}[f(z)] = \frac{-\sin 2 + i\cos 2}{16} \\ z = -2i, \text{ pól 1. stupňa } res_{z=-2i}[f(z)] = \frac{-\sin 2 - i\cos 2}{16} \\ z = 0, \text{ pól 2. stupňa } res_{z=0}[f(z)] = \frac{1}{4} \end{array}\right]$

3. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$. $\left[\begin{array}{c} z = i, \text{ pól 3. stupňa } res_{z=i}[f(z)] = -\frac{3i}{16} \\ z = -i, \text{ pól 3. stupňa } res_{z=-i}[f(z)] = \frac{3i}{16} \end{array}\right]$

4. $f(z) = \frac{z^3+z^2+2}{z(z^2-1)^2}$. $\left[\begin{array}{c} z = 1, \text{ pól 2. stupňa } res_{z=1}[f(z)] = -\frac{3}{4} \\ z = -1, \text{ pól 2. stupňa } res_{z=-1}[f(z)] = -\frac{5}{4} \\ z = 0, \text{ pól 1. stupňa } res_{z=0}[f(z)] = 2 \end{array}\right]$

5. $f(z) = \frac{z+3}{(z-2)^2(z+2i)}$. $\left[\begin{array}{c} z = 2, \text{ pól 2. stupňa } res_{z=2}[f(z)] = \frac{2+3i}{8} \\ z = -2i, \text{ pól 1. stupňa } res_{z=-2i}[f(z)] = \frac{-2-3i}{8} \end{array}\right]$

6. $f(z) = \frac{4+z^2-2z\sin z}{z^3}$. $[z = 0$, pól 3. stupňa $res_{z=0}[f(z)] = -1]$

7. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. $[z = 0$, odstrániteľný singulárny bod $res_{z=0}[f(z)] = 0]$

8. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$. $[z = 0$, pól 1. stupňa $res_{z=0}[f(z)] = 1]$

9. $f(z) = z^3 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$. $[z = 0$, podstatne singulárny bod $res_{z=0}[f(z)] = a_{-1} = 0]$

10. $f(z) = z\sin\left(\frac{1}{z+1}\right)$. $[z = -1$, podstatne singulárny bod $res_{z=-1}[f(z)] = a_{-1} = -1]$

11. $f(z) = z^2\left(e^{\frac{1}{z}} - 2\right)$.

    $\left[z = 0\right.$, podstatne singulárny bod $\left. res_{z=0}[f(z)] = a_{-1} = \frac{1}{6}\right]$

12. $f(z) = z^2\cos\left(\frac{z+1}{z}\right)$.

    $\left[z = 0\right.$, podstatne singulárny bod $\left. res_{z=0}[f(z)] = a_{-1} = \frac{1}{6}\sin 1\right]$

13. $f(z) = \operatorname{tg} z$.

    $\left[z = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}\right.$, pól 1. stupňa $\left. res_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi}[f(z)] = -1\right]$

14. $f(z) = \frac{z^2+1}{z-2}$. $\left[z = 2, \text{jednoduchý pól, } \operatorname{res}_{z=2}\left[\frac{z^2+1}{z-2}\right] = 5.\right]$

15. $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

    $\left[z = -i,\ z = i,\ \text{póly druhého rádu, } \operatorname{res}_{z=-i}\frac{z^2}{(z^2+1)^2} = \frac{i}{4},\ \operatorname{res}_{z=i}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\right] = -\frac{i}{4}.\right]$

16. $f(z) = \frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$.

$\left[z = -1, \text{pól } n - \text{tého rádu}, \quad \operatorname{res}_{z=-1} \left[\frac{z^{2n}}{(z+1)^n} \right] = (-1)^{n+1} \binom{2n}{n-1}. \right]$

17. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$.

$$\left[\begin{array}{l} z = k\pi,\ 1 \neq 0,\ \sin(k\pi) = 0, \sin'(k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0 \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \text{jednoduchý pól},\ \operatorname{res}_{z=k\pi} \frac{1}{\sin z} = \left[\frac{1}{(\sin z)'} \right]_{z=k\pi} = (-1)^k. \end{array} \right]$$

18. $f(z) = \sin \frac{1}{z+1}$.

$$\left[\begin{array}{l} z = -1, \sin \frac{1}{z+1} = \left| \left| \frac{1}{z+1} \right| < \infty \Longrightarrow |z+1| > 0 \right| = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z+1} \right)^{2n+1} \Longrightarrow \\ \qquad \Longrightarrow \text{podstatný singulárny bod},\ \operatorname{res}_{z=-1} \left[\sin \frac{1}{z+1} \right] = c_{-1} = 1. \end{array} \right]$$

19. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. $\left[z = 0, \text{podstatný singulárny bod},\ \operatorname{res}_{z=0} \left[e^{\frac{1}{z}} \right] = 1. \right]$

V príkladoch 20 - 32 pomocou Cauchyho vety o rezíduách vypočítajte integrály po jednoduchých, po častiach hladkých, uzavretých orientovaných krivkách C, kde $\oplus$ je kladná orientácia, $\ominus$ je záporná orientácia krivky C.

20. $\int_C \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)} dz$, kde $C : |z - 1 - i| = 2,\ \oplus$. $\left[-\frac{\pi i}{2} \right]$

21. $\int_C \frac{z+3}{(z-2)^2(z+2i)} dz$, kde $C : |z| = 3,\ \ominus$. $[0]$

22. $\int_C \frac{z^3+1}{z(z-1)^3} dz$, kde $C : |z| = 2,\ \oplus$. $[2\pi i]$

23. $\int_C \frac{1}{(z^2-1)^2(z-3)^2} dz$, kde $C : \varphi : \langle 0, 2\pi \rangle \to \boldsymbol{C},\ \varphi(t) = 2\cos^3 t + 2i \sin^3 t$. $\left[\frac{3\pi i}{64}. \right]$

24. $\int_C \frac{1}{z^4+1} dz$, kde $C : \{ z(t) = (1 + \cos t) + i \sin t,\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle \}$, $\ominus$. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2} i\pi \right]$

25. $\int_C \frac{1-\cos z}{z^3} dz$, kde $C : |z| = 1,\ \oplus$. $[\pi i]$

26. $\int_C \frac{\cos z}{z^3} dz$, kde $C : |z| = 2,\ \oplus$. $[-\pi i.]$

27. $\int_C z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$, kde $C : |z| = \frac{1}{2},\ \oplus$. $\left[\frac{\pi i}{3}. \right]$

28. $\int_C z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$, kde $C : |z| = 2,\ \oplus$. $\left[\frac{\pi i}{3}. \right]$

29. $\int_C \frac{\cos z}{z} dz$, kde $C : |z| = 1,\ \ominus$. $[-2\pi i.]$

30. $\int_C z^3 \cos\left(\frac{1}{z-2} \right) dz$, kde $C : |z - 2| = 3,\ \oplus$. $\left[2\pi i \left(\frac{1}{4!} - 6 \right). \right]$

31. $\int_C \sin^2\left(\frac{1}{z} \right) dz$, kde $C : |z| = 1,\ \ominus$. $[2\pi i.]$

32. $\int_C \frac{e^{-z}}{z^2} dz$, kde $C : |z| = 1$, $\oplus$. $[-2\pi i.]$

33. $\int_C \sin^2 \frac{1}{z} dz$, kde $C : |z| = r$, $r > 0$, $\oplus$. $[0.]$

34. $\int_C (z-1)^2 \sin\left(\frac{1}{z-2}\right) dz$, kde $C : |z| = 3$, $\ominus$. $\left[-\frac{5\pi i}{3}.\right]$

35. $\int_C \cos\left(\frac{z}{z+i}\right) dz$, kde $C : |z+i| = \frac{1}{2}$, $\oplus$. $[-2\pi \sin 1]$

36. $\int_C \frac{z^3 \exp\left(\frac{1}{z}\right)}{z+1} dz$, kde $C : |z| = 2$, $\oplus$. $\left[-\frac{2\pi i}{3}.\right]$

37. $\int_C \operatorname{tg} z dz$, kde $C : \left|z - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $\ominus$. $[2\pi i]$

38. $\int_C \left(\frac{1}{z^2-9} - \cos\left(\frac{z}{z-3}\right)\right) dz$, kde $C : |z-3| = 1$, $\oplus$. $\left[2\pi i \left(\frac{1}{6} + 3 \sin 1\right)\right]$
V príkladoch 33 - 36 vypočítajte nevlastné integrály

39. Vypočítajte nevlastný integrál $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx$, $a > 0$. $\left[\frac{\pi}{2a}\right]$

40. Vypočítajte nevlastný integrál $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^3} dx$, $a > 0$. $\left[\frac{3\pi}{8a^5}\right]$

41. Vypočítajte nevlastný integrál $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+13} dx$. $\left[\frac{\pi}{8}\right]$

42. Vypočítajte nevlastný integrál $\int_0^{\infty} \frac{x^6}{(x^4+a^2)^2} dx$, $a > 0$. $\left[\frac{3\sqrt{2}\pi}{16a}\right]$