Matematika 2

Ľ. Marko

March 9, 2022

CONTENTS

Matematika je univerzálny jazyk pre fyzikálne a technické vedy. Preto je nutné aby študenti FEI STU Bratislava rozumeli základným matematickým pojmom z matematickej analýzy funkcií jednej a komplexnej premennej. Tento učebný text z matematickej analýzy som vytvoril po novej akreditácii pre študijné odbory RK, EL, TLK počas letného semestra školského roku 2017/2018. Nemožno ho považovať za konečnú verziu. Pretože predmet "Matematika 2" sa vyučuje prvý krát, budem text dopĺňať a adaptovať v priebehu letného semestra školského roku 2018/19. Ľ. Marko

Chapter 1 INTEGRÁLNY POČET FUNKCIí JEDNEJ REÁLNEJ PREMENNEJ.

Mnohé fyzikálne a technické aplikácie si vyžadujú, aby sme vedeli vypočítať napríklad prácu premennej sily po určitej dráhe, dĺžky kriviek v rovine, plošné obsahy rôznych rovinných útvarov, objemy priestorových telies. Vhodným aparátom vo všetkých predošlých prípadoch je znalosť integrálneho počtu. V tejto časti aj v ďalších častiach sa budeme venovať integrálnemu počtu.

Určitý integrál.

Predpokladajme, že chceme nájsť plošný obsah obrazca R ohraničeného osou o_x, priamkami $x = a$, $x = b$ a grafom spojitej funkcie $f : \langle a, b \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $(f(x) > 0)$. Naša snaha bude nájsť obsah pomocou obdĺžnikov opísaných a vpísaných grafu funkcie.

Delenie intervalu.

Definition 1 *Delením intervalu $\langle a, b \rangle$ budeme nazývať konečnú množinu bodov $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, takých, že $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$.*

Delenie P delí interval $\langle a, b \rangle$ na podintervaly $\langle x_0, x_1 \rangle$, $\langle x_1, x_2 \rangle$, $\langle x_2, x_3 \rangle$, ..., $\langle x_{n-1}, x_n \rangle$. Ak dĺžku podintervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ označíme $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, ..., n$, potom dĺžka intervalu $\langle a, b \rangle$ je rovná $b - a = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + ... + (x_n - x_{n-1}) = \Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n$.

Definition 2 *Nech P je delenie intervalu $\langle a, b \rangle$ a nech $f : \langle a, b \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je ohraničená funkcia. Sumu*

$$D(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k, \ H(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

nazývame dolným, respektíve horným integrálnym súčtom ohraničenej funkcie f pre delenie P, kde $m_k = \inf_{x \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle} f(x)$, $M_k = \sup_{x \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle} f(x)$.

Example 3 *Nájdime $D(f, P)$, $H(f, P)$, $D(f, T)$, $H(f, T)$ ak $f : \langle 0, 2 \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^2$ a $P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ a $T = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$.*

Solution 4 *Pre delenie P máme*

$$m_1 = 0, m_2 = \frac{1}{4}, m_3 = 1, m_4 = \frac{9}{4}, M_1 = \frac{1}{4}, M_2 = 1, M_3 = \frac{9}{4}, M_4 = 4,$$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_4 = \frac{1}{2}.$$

Potom $D(f, P) = \frac{7}{4}$ a $H(f, P) = \frac{15}{4}$. Podobne dostaneme $D(f, T) = \frac{113}{64}$ a $H(f, T) = \frac{237}{64}$. $\square$

Z definície delenia uzavretého intervalu je jasné, že $\forall P$ platí: $D(f,P) \leq H(f,P)$. Okrem toho, ak $f(x) \geq 0, \forall x \in \langle a,b\rangle$ pre plochu obrazca R medzi grafom funkcie f osou o_x a priamkami $x=a$, $x=b$ máme:

$$D(f,P) \leq R \leq H(f,P).$$

Definition 5 *Delenie $\tilde{P}$ intervalu $\langle a,b\rangle$, ktoré vznikne z delenia P pridaním konečného počtu bodov sa nazýva zjemnenie delenia P.*

Example 6 *Delenie T v predchádzajúcom príklade je zjemnením delenia P intervalu $\langle 0,2\rangle$.*

Theorem 7 *Ak T je zjemnením delenia P intervalu $\langle a,b\rangle$, potom $D(f,P) \leq D(f,T)$ a $H(f,T) \leq H(f,P)$.*

Theorem 8 *Nech P a Q sú dve ľubovoľné rôzne delenia intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom pre každú ohraničenú funkciu $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ platí $D(f,P) \leq H(f,Q)$.*

Definition 9 *Ohraničená funkcia $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sa nazýva (riemannovsky) integrovateľná ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje delenie P_ε také, že $H(f,P_\varepsilon) - D(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$. Definícia je ekvivalentná s podmienkou, že existuje číslo I, také že*

$$I = \sup\{D(f,P) : P \text{ je delenie } \langle a,b\rangle\} = \inf\{H(f,T) : T \text{ je delenie } \langle a,b\rangle\}.$$

Hodnota I, ktorá vyhovuje podmienke sa nazýva určitý integrál z funkcie f na $\langle a,b\rangle$ a označujeme ju

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

čítame integrál od a po b z funkcie f.

Tak $\int_a^b f(x)\,dx$ je jediné reálne číslo I také, že

$$D(f,P) \leq I \leq H(f,P), \forall P \text{ delenie } \langle a,b\rangle.$$

> Majme danú spojitú funkciu $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, pre ktorú poznáme hodnotu $\int_a^b f(x)\,dx$. Plošný obsah obrazca ohraničeného osou o_x, priamkami $x=a$, $x=b$ a grafom spojitej funkcie $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ vytvára geometrickú interpretáciu určitého integrálu. Určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ je číslo, ktoré závisí iba od f, a, b. Premenná x, ktorá sa objavuje v integrále je „nemá”, môžeme ju zameniť za inú. Tak napríklad $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$.

Remark 10 *Symbol $\int$ je označením integrálu, číslo a nazývame dolnou hranicou určitého integrálu, číslo b nazývame hornou hranicou určitého integrálu.*

Example 11 *Ukážeme, že funkcia $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = k$ je integrovateľná funkcia.*

Solution 12 *Platí $D(f,P) = k(b-a) = H(f,P)$, $\forall P$. Odkiaľ dostávame $\int_a^b f(x)\,dx = k(b-a)$.*$\square$

Example 13 *Ukážeme, že funkcia* $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = x$ *je riemannovsky integrovateľná funkcia a platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Solution 14 *Nech* $P = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$, *je delenie intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Potom* $m_k = x_{k-1}, M_k = x_k$ *a platí:* $x_{k-1} < \frac{x_{k-1}+x_k}{2} < x_k$. *Potom* $D(f, P) = \sum_{k=1}^n x_{k-1}(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^n \frac{x_{k-1}+x_k}{2}(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^n x_k(x_k - x_{k-1}) = H(f, P)$, $\sum_{k=1}^n \frac{x_{k-1}+x_k}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left(x_k^2 - x_{k-1}^2\right) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$, *t.j.*

$$D(f, P) < \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) < H(f, P), \forall P,$$

odkiaľ máme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.\square$$

Example 15 *Ukážeme, že funkcia* $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^2$, $a \geq 0$ *je riemannovsky integrovateľná funkcia a platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Solution 16 *Nech* P *je ako v predchádzajúcom príklade, potom* $m_k = x_{k-1}^2, M_k = x_k^2$ *a* $\forall x_{k-1}, x_k \in \boldsymbol{R}$ *platí:*

$$x_{k-1}^2 < \frac{x_{k-1}^2 + x_{k-1}x_k + x_k^2}{3} < x_k^2.$$

Potom použitím postupu z predchádzajúceho príkladu dostaneme výsledok. $\square$

Vlastnosti a existencia určitého integrálu.

Theorem 17 *(Veta o vlastnostiach určitého integrálu) Nech* f, g *sú integrovateľné funkcie na* $\langle a, b\rangle$ *a nech* $k \in \boldsymbol{R}$. *Potom platí*

1) $kf + g$ *je integrovateľná a platí*

$$\int_a^b (kf + g)(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{(lineárnosť).}$$

2) Ak $f(x) \geq 0$, *pre každé* $x \in \langle a, b\rangle$, *potom* $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$; *ak* $f(x) \geq g(x)$, *pre každé* $x \in \langle a, b\rangle$, *potom* $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

3) Ak $m \leq f(x) \leq M$, *pre každé* $x \in \langle a, b\rangle$, *potom*

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a).$$

4) Ak f *je integrovateľná, potom aj* $|f|$ *je integrovateľná a platí*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f|(x)\,dx.$$

Example 18 *Ukážme, že platí* $2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^4}dx \leq \frac{8}{3}$.

Solution 19 *Platí nerovnica*

$$1 \leq 1+x^4 \leq 1+2x^2+x^4 = (1+x^2)^2,$$

teda

$$1 \leq \sqrt{1+x^4} \leq 1+x^2,$$

s využitím predchádzajúcej vety a príkladov **??** *a* **??** *dostávame*

$$2 = \int_{-1}^{1} 1dx \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^4}dx \leq \int_{-1}^{1} \left(1+x^2\right) dx = 2 + \frac{1^3-(-1)^3}{3} = \frac{8}{3}.\square$$

Doteraz sme predpokladali, že funkcia f je ohraničená a integrovateľná. Teraz sa budeme zaujímať o podmienky za akých je funkcia integrovateľná. Nie každá ohraničená funkcia musí byť integrovateľná ako ukazuje nasledujúci príklad.

Example 20 *Daná je funkcia*

$$f : \langle 0,1\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{pre} \quad x \textit{ iracionálne} \\ 0 & \textit{pre} \quad x \textit{ racionálne} \end{cases}.$$

Ukážme, že f *nie je riemannovsky integrovateľná.*

Solution 21 *Každý horný súčet* $H(f,P) = 1$ *a každý dolný súčet* $D(f,P) = 0$*, pre ľubovoľné delenie* P *intervalu* $\langle 0,1\rangle$*, pretože každý jeho podinterval vždy obsahuje racionálne aj iracionálne číslo. Máme:*

$$\sup\{D(f,P) : P \textit{ je delenie } \langle 0,1\rangle\} = 0,\ \inf\{H(f,T) : T \textit{ je delenie } \langle 0,1\rangle\} = 1,$$

neexistuje teda číslo I*, také aby*

$$I = \sup\{D(f,P) : P \textit{ je delenie } \langle a,b\rangle\} = \inf\{H(f,T) : T \textit{ je delenie } \langle a,b\rangle\},$$

funkcia f *nie je riemannovsky integrovateľná. Okrem toho nie je spojitá v každom bode z* $\langle 0,1\rangle$.$\square$

Dá sa dokázať veta: každá spojitá funkcia definovaná na uzavretom intervale je rovnomerne spojitá. Teraz môžeme sformulovať postačujúcu podmienku integrovateľnosti.

Postačujúca podmienka integrovateľnosti funkcie.

Theorem 22 *(Postačujúca podmienka integrovateľnosti funkcie) Ak* $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je spojitá funkcia, potom je na* $\langle a,b\rangle$ *riemannovsky integrovateľná.*

Theorem 23 *(Veta o aditívnosti určitého integrálu) Nech* $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je spojitá funkcia a nech* $c \in (a,b)$*. Potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Example 24 *Vypočítajte* $\int_{-1}^{2} |x|\, dx$.

Solution 25 *Funkcia* $f(x) = |x|$ *je spojitá na intervale* $\langle -1, 2\rangle$, *keď využijeme vetu o aditívnosti určitého integrálu a výsledok príkladu dostaneme:*

$$\int_{-1}^{2} |x|\, dx = \int_{-1}^{0} |x|\, dx + \int_{0}^{2} |x|\, dx = \int_{-1}^{0} (-x)\, dx + \int_{0}^{2} x dx =$$

$$= -\int_{-1}^{0} x dx + \int_{0}^{2} x dx = -\frac{0^2 - (-1)^2}{2} + \frac{2^2 - 0^2}{2} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.\square$$

Veta o strednej hodnote pre integrály.

Theorem 26 *(Veta o strednej hodnote pre integrály). Nech* $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je spojitá funkcia. Potom existuje bod* $c \in \langle a, b\rangle$ *taký, že*

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = f(c)(b - a).$$

Hodnota $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} f(x)\, dx$ sa nazýva stredná hodnota funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$.

Example 27 *Nájdime strednú hodnotu funkcie* $f : \langle 1, 3\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}, f(x) = x$.

Solution 28 *Máme* $\int_{1}^{3} x dx = \frac{3^2 - 1^2}{2} = 4$. *Podľa vety o strednej hodnote existuje* $c \in \langle 1, 3\rangle$ *taký, že* $\int_{1}^{3} x dx = f(c)(3 - 1)$. *V našom prípade strednou hodnotou funkcie* $f(x) = x$ *na intervale* $\langle 1, 3\rangle$ *je hodnota*

$$f(2) = 2,$$

pretože

$$f(2) = 2 = \frac{1}{3-1} \int_{1}^{3} x dx. \square$$

Pomocné definície.

V definícii $\int_{a}^{b} f(x)\, dx$ sme explicitne predpokladali, že $a < b$. Ale pre teoretické dôvody v ďalších aplikáciách je vhodné definovať

Definition 29 *Nech* $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}, a < b$ *je spojitá funkcia. Potom definujeme*

$$\int_{a}^{a} f(x)\, dx = 0,\ \int_{b}^{a} f(x)\, dx = -\int_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

Hlavná veta integrálneho počtu.

V tejto časti rozvinieme metódy pre výpočet $\int_{b}^{a} f(x)\, dx$ bez počítania horných a dolných integrálnych súčtov.

Určitý integrál ako funkcia hornej hranice a primitívna funkcia.
Nech $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia a $c \in \langle a, b\rangle$ je ľubovoľné pevné číslo, potom pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je funkcia f spojitá na intervale $\langle c, x\rangle$, alebo $\langle x, c\rangle$. Teda $\forall x$ existuje integrál $\int_c^x f(t)\,dt$. Takto dostaneme funkciu $G : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $G(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, pre $a \leq x \leq b$. Ak napríklad $f : \langle 0, 10\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = x$, $c = 1$, potom

$$G(0) = \int_1^0 tdt = -\int_0^1 tdt = -\frac{1}{2}\left(1^2 - 0^2\right) = -\frac{1}{2},$$

$$G(1) = \int_1^1 tdt = 0$$

a pre každé $x \in \langle 0, 10\rangle$ máme

$$G(x) = \int_1^x tdt = \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right).$$

Všimnime si, že $G' = f$ na $\langle 0, 10\rangle$. Skutočne, pre každú spojitú funkciu na intervale $\langle a, b\rangle$, ak $G(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, potom $G'(x) = f(x)$.

Theorem 30 *(O diferencovateľnosti určitého integrálu ako funkcie hornej hranice) Nech $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia a nech $c \in \langle a, b\rangle$. Definujeme funkciu $G : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $G(x) = \int_c^x f(t)\,dt$. Potom G je diferencovateľná na $\langle a, b\rangle$ a platí $G'(x) = f(x)$ pre $x \in \langle a, b\rangle$.*

My sme predpokladali, že f je definovaná na $\langle a, b\rangle$. Ale jediný fakt o $\langle a, b\rangle$, ktorý sme použili v predchádzajúcej vete bol, že interval $\langle x, y\rangle$ (alebo $\langle y, x\rangle$) leží v $\langle a, b\rangle$. Tvrdenie vety však zostane v platnosti, ak interval $\langle a, b\rangle$ zameníme za nejaký iný ľubovoľný interval I (napríklad aj neohraničený). Tak sme vlastne dokázali vetu:

Theorem 31 *Nech $f : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia (I je interval) a nech $c \in I$ je ľubovoľný bod. Definujeme $G : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $G(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, $x \in I$. Potom G je diferencovateľná na I a platí $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.*

Definition 32 *Nech I je interval a $f : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $F : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sú také funkcie, že $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$. Potom hovoríme, že funkcia F je primitívna funkcia k funkcii f na I.*

Example 33 *Zistite, či funkcie x^2, $x^2 + 1$, $x^2 - \pi$, $x^2 + 1000$ sú primitívne funkcie k funkcii $2x$ na ľubovoľnom intervale I.*

Solution 34 *Ak C je ľubovoľná konštanta, potom $x^2 + C$ je primitívna funkcia k funkcii $2x$ na I, pretože $\left(x^2 + C\right)' = 2x$, $\forall x \in I$.*$\square$

Theorem 35 *(Veta o primitívnej funkcii) a) Nech $G : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je primitívna funkcia k funkcii $f : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$. Potom funkcia $F : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $F(x) = G(x) + C$, kde C je ľubovoľná konštanta, je tiež primitívna funkcia k funkcii f.*

b) Ak $F(x)$ a $G(x)$ sú dve rôzne primitívne funkcie k funkcii f, potom $F(x) = G(x) + C$.

Hlavná veta integrálneho počtu.

Theorem 36 *(Hlavná veta integrálneho počtu) Nech* $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je spojitá funkcia.*

a) Potom f má primitívnu funkciu na $\langle a,b\rangle$*.*

b) Ak F je nejaká primitívna funkcia k funkcii f na $\langle a,b\rangle$*, potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b .$$

Posledný vzťah sa nazýva Newtonov - Leibnizov vzorec.

Example 37 *Vypočítajte* $\int_0^2 x^2 dx$*.*

Solution 38 *V tomto prípade primitívnou funkciou ku* $f(x) = x^2$ *je napríklad funkcia* $F(x) = \frac{x^3}{3}$*. Potom*

$$\int_0^2 x^2 dx = F(2) - F(0) = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{3}(8-0) = \frac{8}{3}.\square$$

Example 39 *Vypočítajte* $\int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx$*.*

Solution 40 *Primitívnou funkciou ku* $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ *je napríklad funkcia* $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$*. Potom*

$$\int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{14}{3}.\square$$

Example 41 *Vypočítajte* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$*.*

Solution 42 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1.\square$

Theorem 43 *Nech* $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je spojitá funkcia. Potom pre každú primitívnu funkciu F k funkcii f platí*

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b) = [F(x)]_b^a .$$

Diferencovanie a integrovanie ako inverzné procesy.

Môžeme písať: ak $f : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá a $a \in I$, potom

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x).$$

Z druhej strany ak $F : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ má spojitú deriváciu, dostaneme

$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a),$$

t.j. derivovanie a integrovanie sú inverzné procesy.

Neurčitý integrál a integračné pravidlá.

Ak počítame určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ pomocou hlavnej vety integrálneho počtu, potom základným problémom je nájsť primitívnu funkciu k funkcii f. V tejto časti ukážeme niektoré elementárne pravidlá, ktoré nám pomôžu pri hľadaní primitívnych funkcií.

Definition 44 *Nech $f : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá (I je interval). Ľubovoľná primitívna funkcia ku f na I sa tiež nazýva neurčitým integrálom k f na I a označuje sa $\int f(x)\,dx$.*

Samozrejme, ak F je neurčitý integrál funkcie f, potom pre každú konštantu $C \in \boldsymbol{R}$, funkcia $F+C$ je tiež neurčitým integrálom, pretože $(F+C)' = F'+C' = f$. Preto napríklad pre neurčitý integrál z funkcie $f(x) = x^2$ píšeme

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Theorem 45 *(Veta o násobku neurčitého integrálu a súčte neurčitých integrálov) Nech $f, g : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sú spojité funkcie a $c \in \boldsymbol{R}$ je ľubovoľná konštanta. Potom*

$$\int (cf)(x)\,dx = c\int f(x)\,dx, \int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Example 46 *Vypočítajte integrál $\int (2x - 3\cos x)\,dx$.*

Solution 47 $\int (2x - 3\cos x)\,dx = 2\int x dx - 3\int \cos x dx = x^2 - 3\sin x + C.\square$

Example 48 *Vypočítajte integrál $\int_0^1 (4x^2 + 5x^3)\,dx$.*

Solution 49 $\int_0^1 (4x^2 + 5x^3)\,dx = 4\int_0^1 x^2 dx + 5\int_0^1 x^3 dx = 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 5\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{31}{12}.\square$

Pre polynóm dostaneme:

$$\int \left(c_0x^n + c_1x^{n-1} + ... + c_{n-1}x + c_n\right) dx = c_0\frac{x^{n+1}}{n+1} + c_1\frac{x^n}{n} + ... + c_{n-1}\frac{x^2}{2} + c_n x + C.$$

Pripomenieme niektoré neurčité integrály, ktoré už poznáme z diferenciálneho počtu:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arccotg} x + C \end{array} \right. ,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{c} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{array} \right. ,$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a^2} \right| + C,$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

Cvičenia.

Pomocou priameho integrovania, využívajúc len vzorce integrálov elementárnych funkcií, vypočítajme:

1. $\int (3x^3 + 2x - 4)\, dx.$ $\left[\frac{3}{4}x^4 + x^2 - 4x\right].$
2. $\int \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{5}\right)\, dx.$ $\left[\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{10}\right].$
3. $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\, dx.$ $\left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - 2x^{\frac{1}{2}}\right].$
4. $\int \frac{x^3+x^2-x}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx.$ $\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right].$
5. $\int \frac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3}\, dx.$ $\left[\ln|x| - \frac{1}{4x^4}\right].$
6. $\int \frac{x\left(\sqrt[3]{x} - x\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[4]{x}}\, dx.$ $\left[-\frac{12\sqrt[12]{x^{37}}}{37} + \frac{12\sqrt[12]{x^{25}}}{25}\right].$
7. $\int \frac{x^3-1}{x-1}\, dx.$ $\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right].$
8. $\int e^x a^x\, dx.$ $\left[\frac{e^x a^x}{1+\ln a}\right].$
9. $\int \left(5\cos x - 2x^5 + \frac{3}{1+x^2}\right)\, dx.$ $\left[5\sin x - \frac{x^6}{3} + 3\,\mathrm{arctg}\, x\right].$
10. $\int \left(10^{-x} + \frac{x^2+3}{x^2+1}\right)\, dx.$ $\left[-\frac{10^{-x}}{\ln 10} + x + 2\,\mathrm{arctg}\, x\right].$
11. $\int (2\sin x - 3\cos x)\, dx.$ $[-2\cos x - 3\sin x].$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{3-3x^2}}\, dx.$ $\left[\frac{\arcsin x}{\sqrt{3}}\right].$
13. $\int \frac{3.2^x - 2.3^x}{2^x}\, dx.$ $\left[3x - \frac{3^x}{2^{x-1}(\ln 3 - \ln 2)}\right].$
14. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos(2x)}\, dx.$ $\left[\frac{\mathrm{tg} x}{2} + \frac{x}{2}\right].$
15. $\int \frac{\cos(2x)}{(\cos^2 x)\sin^2 x}\, dx.$ $[-\mathrm{cotg} x - \mathrm{tg}\ x].$
16. $\int^2 \mathrm{tg}^2 x\, dx.$ $[\mathrm{tg}\ x - x].$
17. $\int \mathrm{cotg}^2 x\, dx.$ $[-\mathrm{cotg}\ x - x].$
18. $\int \frac{1}{\cos(2x)+\sin^2 x}\, dx.$ $[\mathrm{tg}\ x].$
19. $\int \frac{(1+2x^2)}{x^2(1+x^2)}\, dx.$ $\left[-\frac{1}{x} + \mathrm{arctg}\ x\right].$
20. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\, dx.$ $[\ln|x| + 2\,\mathrm{arctg}\ x].$

Metódy integrálneho počtu.

V tejto časti sa oboznámime s rôznymi metódami výpočtu určitých aj neurčitých integrálov.

Integračná metóda per partes.

Theorem 50 *Nech $f, g : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sú spojite diferencovateľné funkcie. Potom platí*

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx.$$

Theorem 51 *Nech $f, g : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ sú spojite diferencovateľné funkcie. Potom platí*

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx.$$

Výber funkcií $f(x)$ a $g'(x)$ sa na prvý pohľad môže zdať náročný. Väčšinou je výber prirodzený, čo znamená, že ani iný nie je možný. Po prepočítaní niekoľkých príkladov už obyčajne nerobí ťažkosti. Dobrou zásadou voľby je, aby sa integrál po aplikácii metódy per partes zjednodušil a nie skomplikoval.

Example 52 *Nájdime $\int x \cos x dx$.*

Solution 53 *Zvoľme f, f', g, g' nasledovne:* $\int x \cos x dx = \begin{vmatrix} f(x) = x & g'(x) = \cos x \\ f'(x) = 1 & g(x) = \sin x \end{vmatrix} = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$

Ak by sme zvolili $f(x) = \cos x$, $g'(x) = x$, potom $f'(x) = -\sin x$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$ a dostaneme vzťah $\int x \cos x dx = -\frac{x^2}{2} \cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x dx$,

ktorý nevedie bezprostredne k nájdeniu integrálu.$\square$

Example 54 *Nájdime $\int x \ln x dx$.*

Solution 55 *V tomto príklade volíme $f(x) = \ln x$, $g'(x) = x$.*

$\int x \ln x dx = \begin{vmatrix} f(x) = \ln x & g'(x) = x \\ f'(x) = \frac{1}{x} & g(x) = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} dx =$

$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.\square$

Example 56 *Vypočítajme $\int_1^2 x \ln^2 x dx$.*

Solution 57 *V tomto príklade volíme $f(x) = \ln^2 x$, $g'(x) = x$.* $\int_1^2 x \ln^2 x dx = \begin{vmatrix} f(x) = \ln^2 x & g'(x) = x \\ f'(x) = 2 \ln x \frac{1}{x} & g(x) = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \left[\frac{x^2}{2} \ln^2 x\right]_1^2 - \int_1^2 2 \ln x \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} dx =$

$= 2 \ln^2 2 - \int_1^2 x \ln x dx = 2 \ln^2 2 - 2 \ln 2 + \frac{3}{4}.\square$

Example 58 *Ukážeme, že pre $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ platia nasledujúce rekurentné vzťahy:*

$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx,$
$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx.$
Ak $n - 2 = 0$, potom $\sin^{n-2} x = \cos^{n-2} x = 1$.

Solution 59 *Výsledok ukážeme pre funkciu sínus. Odporúčame Vám prepočítať rekurentný vzťah pre funkciu kosínus. Zvolíme $f(x) = \sin^{n-1} x$, $g'(x) = \sin x$. Iná voľba ani nie je možná, pretože nepoznáme primitívnu funkciu k funkcii $\sin^{n-1} x$. Potom*

$$\int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \sin x dx = \left| \begin{array}{cc} f(x) = \sin^{n-1} x & g'(x) = \sin x \\ f'(x) = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x & g(x) = -\cos x \end{array} \right| =$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \left(1 - \sin^2 x\right) dx =$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx.$$

Tak sme dostali rovnicu: $\int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx,$
z ktorej dostaneme: $n \int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx,$
odkiaľ vyjadríme hľadanú neznámu $\int \sin^n x dx$: $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx. \square$

Substitučná metóda.

Začneme s príkladom. Derivovaním zloženej funkcie napríklad $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $F(x) = \sin^2 x$ dostaneme:

$$\left(\sin^2 x\right)' = 2 \sin x \cos x.$$

Teda funkcia $\sin^2 x$ je primitívna funkcia k funkcii $2 \sin x \cos x$, to znamená, že

$$\int 2 \sin x \cos x dx = \sin^2 x + C.$$

Theorem 60 *Nech I, J sú intervaly, $g : I \longrightarrow J$ je spojite diferencovateľná funkcia a $f : J \longrightarrow \mathbf{R}$ je spojitá funkcia.*
a) Ak $F : J \longrightarrow \mathbf{R}$ je primitívna funkcia ku f na intervale J, potom

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C,$$

b) ak $a, b \in I$, tak

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Example 61 *Vypočítajte $\int 3 \sin^2 x \cos x dx$.*

Solution 62 *Nech je $u = \sin x$, potom* $\int 3 \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{array} \right| = 3 \int u^2 du = u^3 + C = \sin^3 x + C. \square$

Example 63 *Vypočítajte* $\int \frac{x^4}{x^5+1}dx$.

Solution 64 *Nech* $u = (x^5+1)$, *potom* $\int \frac{x^4}{x^5+1}dx = \frac{1}{5}\int \frac{5x^4}{x^5+1}dx = \left| \begin{array}{c} u = x^5+1 \\ du = 5x^4dx \end{array} \right| =$
$\frac{1}{5}\int \frac{1}{u}du =$
$= \ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|x^5+1| + C.$

Tento výpočet podľa definície prirodzeného logaritmu platí, ak funkcia $x^5+1 > 0$, *alebo* $x^5+1 < 0.\Box$

Example 65 *Vypočítajte* $\int_{-3}^{-2} \frac{x^4}{x^5+1}dx$ *a* $\int_{-2}^{1} \frac{x^4}{x^5+1}dx$.

Solution 66 *V prvom integrále je funkcia* $x^5+1 < 0$, *teda integrál existuje a platí:*
$\int_{-3}^{-2} \frac{x^4}{x^5+1}dx = \left[\frac{1}{5}\ln|x^5+1|\right]_{-3}^{-2} = \frac{1}{5}\ln\frac{31}{242}.$

V druhom integrále však funkcia $x^5+1 = 0$ *pre* $x = -1$, *teda neplatí* $x^5+1 > 0$, *ani* $x^5+1 < 0$ *na* $\langle -2, 1\rangle$ *preto* $\int_{-2}^{1} \frac{x^4}{x^5+1}dx$ *nemá zmysel.* $\Box$

Example 67 *Vypočítajte* $\int x\sqrt{2x+1}dx$.

Solution 68 *Nech* $u = 2x+1$, *potom máme*
$\int x\sqrt{2x+1}dx = \left| \begin{array}{c} u = 2x+1 \\ du = 2dx \Longrightarrow dx = \frac{1}{2}du \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int (u-1)\sqrt{u}du =$
$= \frac{1}{4}\int u\sqrt{u}du - \frac{1}{4}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{10}u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}} + C =$
$= \frac{\sqrt{(2x+1)^5}}{10} - \frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{6} + C.\Box$

Lemma 69 *Nech* I, J *sú intervaly,* $g : I \longrightarrow J$ *je spojite diferencovateľná bijekcia a* $f : J \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je spojitá funkcia. Nech* $G : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je primitívna funkcia k funkcii* $(f \circ g)\, g' : I \longrightarrow \boldsymbol{R}$. *Potom* $G \circ g^{-1} : J \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je primitívna funkcia k funkcii* $f : J \longrightarrow \boldsymbol{R}$.

Theorem 70 *Nech* I, J *sú intervaly,* $g : I \longrightarrow J$ *je spojite diferencovateľná bijekcia a* $f : J \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *je spojitá funkcia. Potom pre každé* $a, b \in J$ *platí*
$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\, g'(t)\, dt.$

Example 71 *Vypočítajte integrál* $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}+2}{6}} \frac{1}{\sqrt{6x-9x^2}}dx$.

Solution 72 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}+2}{6}} \frac{1}{\sqrt{6x-9x^2}}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}+2}{6}} \frac{1}{\sqrt{1-(9x^2-6x+1)}}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}+2}{6}} \frac{1}{\sqrt{1-(3x-1)^2}}dx =$
$= \left| \begin{array}{cc} t = 3x-1 & dt = 3dx \Longrightarrow dx = \frac{1}{3}dt \\ x = \frac{1}{2} \rightarrow t = \frac{1}{2} & x = \frac{\sqrt{3}+2}{6} \rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt =$
$= \frac{1}{3}\left[\arcsin t\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}\left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right] = \frac{\pi}{18}.\Box$

Example 73 *Nech* $F(x)$ *je primitívna funkcia k funkcii* $f(x)$. *Nájdime* $\int f(ax+b)\, dx$, *kde* $a, b \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$.

Solution 74 *Použijeme substitúciu* $u = ax+b$, *potom* $du = adx \Longrightarrow dx = \frac{1}{a}du$.
$\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\int f(u)\, du = \frac{1}{a}(F(u)+C) = \frac{1}{a}F(ax+b) + K.\Box$

Cvičenia.

Počítajte integrály metódou per partes:

1. $\int x \sin x \, dx.$ $\quad [\sin x - x \cos x]$.
2. $\int xe^{2x} \, dx.$ $\quad \left[\frac{(2x-1)e^{2x}}{4}\right]$.
3. $\int (x^3 - x + 1)e^{2x} \, dx.$ $\quad \left[\frac{e^{2x}}{2}\left(x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)\right]$.
4. $\int\limits_0^\pi (2x^2 + 3) \cos 2x \, dx.$ $\quad [\pi]$.
5. $\int \ln x \, dx.$ $\quad [x \ln x - x]$.
6. $\int x \log_{10} 2x \, dx.$ $\quad \left[\frac{x^2}{2}\left(\log_{10} 2x - \frac{1}{2\ln 10}\right)\right]$.
7. $\int e^x \sin x \, dx.$ $\quad \left[\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)\right]$.
8. $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx.$ $\quad [x\mathrm{tg}\ x + \ln|\cos x|]$.
9. $\int \mathrm{arccotg}\, x \, dx.$ $\quad \left[x\mathrm{arccotg}\, x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)\right]$.
10. $\int x \ln(x^2+3x-10) \, dx.$ $\quad \left[\frac{x^2}{2}\ln(x^2 + 3x - 10) - \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} - 2\ln|x-2| - \frac{25}{2}\ln|x+5|\right]$.
11. $\int \ln(x^2 - 4x + 6) \, dx.$ $\quad \left[(x-2)\ln(x^2 - 4x + 6) - 2x + \frac{4}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{(x-2)}{\sqrt{2}}\right]$.
12. $\int x\mathrm{arctg}(x + 3) \, dx.$ $\quad \left[\frac{(x^2-8)}{2}\mathrm{arctg}(x+3) - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}\ln(x^2 + 6x + 10)\right]$.
13. $\int x \ln x \, dx.$ $\quad \left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\right]$.
14. $\int xe^{-x} \, dx.$ $\quad [-xe^{-x} - e^{-x}]$.
15. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x \, dx.$ $\quad \left[\frac{(1+2e^\pi)}{5}\right]$.
16. $\int \mathrm{arctg} x \, dx.$ $\quad \left[x\mathrm{arctg}\, x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)\right]$.
17. $\int x^2 3^x \, dx.$ $\quad \left[\frac{3^x}{\ln 3}\left(x^2 - \frac{2x}{\ln 3} + \frac{2}{(\ln 3)^2}\right)\right]$.
18. $\int x\mathrm{arccotg}\ x \, dx.$ $\quad \left[\frac{x^2+1}{2}\mathrm{arccotg}\ x + \frac{x}{2}\right]$.
19. $\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx.$ $\quad [\pi^2 - 4]$.
20. $\int\limits_0^1 x\mathrm{arccotg}\ x \, dx.$ $\quad \left[\frac{1}{2}\right]$.
21. $\int \mathrm{arccotg}\ x \, dx.$ $\quad \left[x\mathrm{arccos}\, x - \sqrt{1 - x^2}\right]$.

22. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} x \mathrm{arctg} x \, dx.$ $\quad \left[\frac{5\pi}{12} - \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}\right]$

Pomocou vety o substitúcii počítajme integrály:

23. $\int \frac{1}{3+4x^2} \, dx.$ $\quad \left[\frac{1}{2\sqrt{3}} \mathrm{arctg} \, \frac{2x}{\sqrt{3}}\right].$

24. $\int \frac{x}{3+4x^2} \, dx.$ $\quad \left[\frac{1}{8} \ln(3+4x^2)\right].$

25. $\int \frac{x}{(x^2+5)^4} \, dx.$ $\quad \left[-\frac{1}{6(x^2+5)^3}\right].$

26. $\int e^x \mathrm{tg} \, e^x \, dx.$ $\quad [-\ln|\cos e^x|].$

27. $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+5} \, dx.$ $\quad \left[\frac{3}{2} \ln(x^2+4x+5) - 4\mathrm{arctg}\,(x+2)\right].$

28. $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5} \, dx.$ $\quad \left[\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\mathrm{arctg} \, \frac{x+1}{2}\right].$

29. $\int \frac{5x-1}{x^2+2x+3} \, dx.$ $\quad \left[\frac{5}{2} \ln(x^2+2x+3) - \frac{6}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg} \, \frac{(x+1)}{\sqrt{2}}\right].$

30. $\int \frac{2^x}{(2^x+3)^7} \, dx.$ $\quad \left[-\frac{1}{6\ln 2(2^x+3)^6}\right].$

31. $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}} \, dx.$ $\quad \left[\frac{1}{2}\arcsin \frac{2x}{\sqrt{3}}\right].$

32. $\int \frac{x}{\sqrt{3-4x^2}} \, dx.$ $\quad \left[-\frac{1}{4}\sqrt{3-4x^2}\right].$

33. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{(e^x-2)e^x}{e^{2x}+2e^x+7} \, dx.$ $\quad \left[\frac{1}{2}(\ln 42 - \ln 15) - \frac{3}{\sqrt{6}}\left(\mathrm{arctg} \, \frac{6}{\sqrt{6}} - \mathrm{arctg} \, \frac{3}{\sqrt{6}}\right)\right].$

34. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 5\sin x - 6} \, dx.$ $\quad \left[\frac{1}{7} \ln\left|\frac{1-\sin x}{6+\sin x}\right|\right].$

35. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x + 1}{\cos^4 x + \cos^3 x} \sin x \, dx.$ $\quad \left[\frac{1}{2} + 2\ln\frac{3}{2}\right].$

36. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 5\cos x + 6} \, dx.$ $\quad \left[\ln \frac{4}{3}\right].$

37. $\int \frac{2}{x(\ln x - 2)\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right)} \, dx.$ $\quad \left[\ln \frac{|\ln x - 2|}{\sqrt{(\ln x - 1)^2 + 1}} - \mathrm{arctg}\,(\ln x - 1)\right]$

38. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}} \, dx.$ $\quad \left[\frac{12}{\sqrt[12]{x}} - \frac{6}{\sqrt[6]{x}} + 24\ln\left|\frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[12]{x}+1}\right|\right].$

39. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} \, dx.$ $\quad \left[\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right), \, t = \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}\right].$

40. $\int\limits_1^{64} \frac{2\sqrt{x}}{x\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)} \, dx.$ $\quad \left[12\ln\frac{3}{2}\right].$

41. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+3}} \, dx.$ $\quad \left[\frac{3t}{2} - \frac{\ln|1-2t|}{2} - \frac{33}{4(1-2t)}, \, t = -x + \sqrt{x^2+x+3}\right].$

42. $\int \sqrt{x^2+4x+3}\,dx.$ $\left[-\frac{t^2}{8}-\frac{t}{2}+\frac{\ln|t+2|}{2}+\frac{1}{8(t+2)^2},\, t=x-\sqrt{x^2+4x+3}\right].$

43. $\int \frac{1}{\sqrt{4-3x-x^2}}\,dx.$ $\left[-2\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{4-3x-x^2}-2}{x}\right)\right].$

44. $\int\limits_0^1 \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx.$ $[-8{,}345].$

45. $\int \frac{1}{\cos x}\,dx.$ $\left[\ln\left|\frac{\text{tg}\,\frac{x}{2}+1}{\text{tg}\,\frac{x}{2}-1}\right|\right].$

46. $\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,dx.$ $\left[\frac{\sqrt{5}}{5}\text{arctg}\frac{\sqrt{5}}{5}\left(3\,\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right].$

47. $\int \frac{1}{\sin x-\cos x}\,dx.$ $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\text{tg}\,\frac{x}{2}+1-\sqrt{2}}{\text{tg}\,\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}\right|\right].$

48. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{tg}\,x}{\text{tg}^2\,x+\text{tg}\,x+1}\,dx.$ $\left[\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\right].$

49. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx.$ $\left[\frac{\pi}{4}\right].$

50. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx.$ $[1{,}246].$

51. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x-2\sin x+3}\,dx.$ $\left[\frac{\pi}{4}\right].$

52. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{5+2\cos x}\,dx.$ $[0{,}152].$

53. $\int \cos(\ln x)\,dx.$ $\left[\frac{x}{2}\left(\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right)\right]$

Vypočítajme kombináciou doterajších metód

54. $\int x^2 e^{\sqrt{x}}\,dx.$

$\left[\left(2\left(\sqrt{x}\right)^5-10x^2+40\left(\sqrt{x}\right)^3-120x+240\sqrt{x}-240\right)e^{\sqrt{x}}\right]$

55. $\int (3x^3+2x-4)\,dx.$ $\left[\frac{3}{4}x^4+x^2-4x\right].$

56. $\int\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{5}\right)\,dx.$ $\left[\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{10}\right].$

57. $\int\left(\sqrt{x^3}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx.$ $\left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}-2x^{\frac{1}{2}}\right].$

58. $\int \frac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3}\,dx.$ $\left[\ln|x|-\frac{1}{4x^4}\right].$

59. $\int \frac{x\left(\sqrt[3]{x}-x\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[4]{x}}\,dx.$ $\left[-\frac{12\sqrt[12]{x^{37}}}{37}+\frac{12\sqrt[12]{x^{25}}}{25}\right].$

60. $\int \frac{x^3-1}{x-1}\,dx.$ $\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right].$

61. $\int e^x a^x \; dx.$ $\quad \left[\frac{e^x a^x}{1+\ln a}\right].$

62. $\int \left(5\cos x - 2x^5 + \frac{3}{1+x^2}\right) \; dx.$ $\quad \left[5\sin x - \frac{x^6}{3} + 3\,\mathrm{arctg}\, x\right].$

63. $\int \left(10^{-x} + \frac{x^2+3}{x^2+1}\right) \; dx.$ $\quad \left[-\frac{10^{-x}}{\ln 10} + x + 2\,\mathrm{arctg}\, x\right].$

64. $\int (2\sin x - 3\cos x) \; dx.$ $\quad [-2\cos x - 3\sin x].$

65. $\int \frac{1}{\sqrt{3-3x^2}} \; dx.$ $\quad \left[\frac{\mathrm{arcsin} x}{\sqrt{3}}\right].$

66. $\int \frac{3.2^x - 2.3^x}{2^x} \; dx.$ $\quad \left[3x - \frac{3^x}{2^{x-1}(\ln 3 - \ln 2)}\right].$

67. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos(2x)} \; dx.$ $\quad \left[\frac{\mathrm{tg} x}{2} + \frac{x}{2}\right].$

68. $\int \frac{\cos(2x)}{(\cos^2 x)\sin^2 x} \; dx.$ $\quad [-\mathrm{cotg} x - \mathrm{tg}\; x].$

69. $\int^2 \mathrm{tg}^2 x \; dx.$ $\quad [\mathrm{tg}\; x - x].$

70. $\int \mathrm{cotg}^2 x \; dx.$ $\quad [-\mathrm{cotg}\; x - x].$

71. $\int \frac{1}{\cos(2x)+\sin^2 x} \; dx.$ $\quad [\mathrm{tg}\; x].$

72. $\int \frac{\left(1+2x^2\right)}{x^2(1+x^2)} \; dx.$ $\quad \left[-\frac{1}{x} + \mathrm{arctg}\;\; x\right].$

73. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} \; dx.$ $\quad [\ln|x| + 2\,\mathrm{arctg}\;\; x].$

Špeciálne integračné metódy.
Integrovanie racionálnych funkcií.

Zo znalostí z lineárnej algebry vieme, že

a) každú nerýdzo racionálnu funkciu možno vyjadriť ako súčet polynómu a rýdzo racionálnej funkcie,

b) každú rýdzo racionálnu funkciu možno napísať ako konečný súčet nasledujúcich elementárnych zlomkov:

$$\frac{A}{(x-a)^n} \text{ a } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},$$

kde $A, M, N, p, q \in \boldsymbol{R}$, $m, n \in \boldsymbol{N}$ a $p^2-4q<0$. Integrovať racionálnu funkciu teda znamená integrovať výrazy predchádzajúceho typu.

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \begin{cases} \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} & \text{pre} \quad n \neq 1 \\ A \ln|x-a| & \text{pre} \quad n = 1 \end{cases}.$$

Druhý výraz nemožno vo všeobecnom prípade integrovať priamo, je potrebné ho najskôr upraviť:

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} = \frac{M}{2}\frac{2x+\frac{2N}{M}}{(x^2+px+q)^m} = \frac{M}{2}\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{(x^2+px+q)^m}.$$

Prvý výraz po substitúcii $u = x^2+px+q$, vieme integrovať a dostaneme

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m}dx = \begin{cases} \frac{-1}{(m-1)(x^2+px+q)^{m-1}} & \text{pre} \quad m \neq 1 \\ \ln(x^2+px+q) & \text{pre} \quad m = 1 \end{cases}.$$

Druhý výraz je integrál, ktorý upravíme na tvar

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^m}dx = \int \frac{1}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right)^m}dx,$$

a pomocou substitúcie $x = -\frac{p}{2} + t\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}$ transformujeme na integrál

$$\frac{\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}}{\left(\frac{4q-p^2}{4}\right)^m} \int \frac{1}{(t^2+1)^m}dt.$$

a integrál, ktorý označíme $I_m = \int \frac{1}{(t^2+1)^m}dt$ integrujeme nasledovne:

1. $I_1 = \int \frac{1}{t^2+1}dt = \operatorname{arctg} t.$
2. Pomocou rekurentného vzťahu $I_{m+1} = \frac{2m-1}{2m}I_m + \frac{t}{2m(t^2+1)^m}$, $m \in \boldsymbol{N}$.

Dôkaz rekurentného vzťahu: Aplikujeme metódu per partes na integrál I_m, kde zvolíme $f(t) = (t^2+1)^{-m}$, $g'(t) = 1$.

$$I_m = \int \frac{1}{(t^2+1)^m}dt = \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2m\int \frac{t^2}{(t^2+1)^{m+1}}dt = \frac{t}{(t^2+1)^m} + 2mI_m - 2mI_{m+1}. \blacksquare$$

Example 75 *Vypočítajme* $\int \frac{2x+3}{x(x+1)^2}dx.$

Solution 76 *Máme* $\int \frac{2x+3}{x(x+1)^2}dx = \int \frac{3}{x}dx - \int \frac{3}{(x+1)}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx = 3\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + C.\square$

Example 77 *Vypočítajme* $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx.$

Solution 78 *Dostávame:* $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{(x^2+1)}dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx =$
$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C.\square$

Example 79 *Vypočítajme* $\int \frac{2x-1}{x^2+2x+2}dx.$

Solution 80 *Dostávame:*

$$\int \frac{2x-1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - \int \frac{3}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= \ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = \ln\left|x^2+2x+2\right| - 3\,\mathrm{arctg}\,(x+1) + C.\square$$

Integrovanie iracionálnych funkcií.

Nech $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$ a nech $ad - bc \neq 0$. Nech k_1, k_2, ..., k_s sú prirodzené čísla. Nech $f : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je funkcia, ktorá vznikne z funkcií
$h : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $h(x) = c$,
$g : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $g(x) = x$,
$g_1 : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $g_1(x) = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_1}}$,
...,
$g_s : A \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $g_s(x) = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_s}}$, pomocou konečného počtu racionálnych operácií, t.j. sčitovania, odčitovania, násobenia a delenia funkcií. Nech k je spoločný násobok čísel k_1, k_2, ..., k_s. To znamená, že $\frac{k}{k_1}$, $\frac{k}{k_2}$, ..., $\frac{k}{k_s}$ sú prirodzené čísla. Potom neurčitý integrál

$$\int f(x)\, dx$$

počítame pomocou substitúcie

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}} \Longrightarrow x = \frac{b - dt^k}{ct^k - a},\ dx = \frac{ad - bc}{\left(ct^k - a\right)^2} k t^{k-1} dt,$$

podmienka $ad - bc \neq 0$ zaručuje, že ku x existuje inverzná funkcia, pričom

$$t^{\frac{k}{k_1}} = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_1}},\ ...,\ t^{\frac{k}{k_s}} = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_s}}.$$

Po tejto substitúcii dostaneme integrál z racionálnej funkcie.

Example 81 *Vypočítajte* $\int \frac{1}{(x+2)(3x+5)} \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}} dx$.

Solution 82 *Použijeme substitúciu*

$$t = \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}},$$

potom

$$x = \frac{2 - 3t^2}{2t^2 - 1}$$

a

$$dx = \frac{-2t\,dt}{\left(2t^2 - 1\right)^2}.$$

Integrovaním dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+2)(3x+5)} \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}} dx &= -2 \int \frac{1}{1+t^2} dt = -2 \operatorname{arctg} t + C = \\ &= -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}} + C. \square \end{aligned}$$

Integrovanie trigonometrických funkcií.

Pri integrovaní trigonometrických funkcií sa používajú spravidla substitúcie: $u = \sin x$, $u = \cos x$ a substitúcie, ktoré závisia od tvaru integrálu, alebo tzv. univerzálna trigonometrická substitúcia $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Ak použijeme univerzálnu trigonometrickú substitúciu, potom využívame vzťahy: $\sin x = \sin 2\frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \cos 2\frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Example 83 *Vypočítajte* $\int \frac{\sin x \cos x}{(\sin x - \cos x - 1)^2} dx$.

Solution 84 *Položme* $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. *Potom dostaneme:* $\int \frac{\sin x \cos x}{(\sin x - \cos x - 1)^2} dx = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ x = 2 \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} \frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1\right)^2} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} \frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1\right)^2} \frac{2}{1+t^2} dt =$$
$$= \int \frac{2t\left(1-t^2\right)}{(2t-2)^2} \frac{2}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t(1-t)(1+t)}{(t-1)^2} \frac{2}{1+t^2} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{t(1+t)}{(t-1)} \frac{2}{1+t^2} dt =$$
$$= -\int \frac{1}{t-1} dt - \int \frac{1}{1+t^2} dt = -\ln|t-1| - \operatorname{arctg} t + C =$$
$$= -\ln \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1\right| - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C. \square$$

Trigonometrické substitúcie pre výrazy $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{\pm a^2 \pm b^2x^2}$.

Výraz	Substitúcia	Zjednodušenie
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t,\ t\in\left\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$	$\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\operatorname{tg} t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$\sqrt{a^2+a^2\operatorname{tg}^2 t}=\frac{a}{\cos t}$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=\frac{a}{\cos t}, 0\le t\le\pi,\ t\neq\frac{\pi}{2}$	$\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=a\operatorname{tg} t,\ 0\le t<\frac{\pi}{2}$ $\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=-a\operatorname{tg} t,\ \frac{\pi}{2}<t\le\pi$
$\sqrt{\pm a^2\pm b^2x^2}$	$t=bx$	$\sqrt{\pm a^2\pm t^2}$

Example 85 *Vypočítajte* $\int_{-5}^{5}\sqrt{9-\frac{9}{25}x^2}dx$.

Solution 86 *Ak položíme* $v=\frac{3}{5}x$, *potom* $dx=\frac{5}{3}dv$, $x=-5\implies v=-3$, $x=5\implies v=3$ *a po ďalšej substitúcii* $v=3\sin u$, *t.j.* $dv=3\cos u du$, $v=-3\implies u=-\frac{\pi}{2}$, $v=3\implies u=\frac{\pi}{2}$ *dostaneme*

$$\int_{-5}^{5}\sqrt{9-\frac{9}{25}x^2}dx=\frac{5}{3}\int_{-3}^{3}\sqrt{9-v^2}dv=\frac{5}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-9\sin^2 u}.3\cos u du=$$

$$=15\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u du=\frac{15}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)\,du=\frac{15}{2}\left[u+\frac{\sin 2u}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{15}{2}\pi.\square$$

Integrály typu $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

$m, n \in \boldsymbol{N}$	Substitúcia	Vhodná identita
n - nepárne	$u = \sin x$	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
m - nepárne	$u = \cos x$	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
n a m - párne	redukovať na menšie mocniny n a m	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

Example 87 *Vypočítajte* $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

Solution 88 *V tomto prípade je* $n = 3$ *- nepárne, tak položíme* $u = \sin x$, *t.j.* $du = \cos x dx$. *Potom* $\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x dx =$
$= \int \left(u^2 - u^4\right) du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.\square$

Example 89 *Vypočítajte* $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Solution 90 *V tomto prípade je* m, n *párne. Podintegrálny výraz zredukujeme na tvar mocniny funkcie kosínus a potom použijeme rekurentné vzťahy:* $\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - \cos^2 2x\right) dx =$
$= \frac{1}{4} \int 1 dx - \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx =$
$= \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \frac{1}{4} \sin 4x + C = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.\square$

Integrály typu $\int \sin ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$.

V tomto prípade použijeme jednu z trigonometrických identít

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} \left[\sin (x-y) + \sin (x+y) \right],$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} \left[\cos (x-y) - \cos (x+y) \right],$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \left[\cos (x-y) + \cos (x+y) \right].$$

Example 91 *Vypočítajte* $\int \sin 5x \sin 3x dx$.

Solution 92 $\int \sin 5x \sin 3x dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int \cos 8x dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C$. *Použili sme výsledok predchádzajúceho príkladu.*

Eulerove substitúcie.

Nech $g : A \longrightarrow B$, $g(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$ a $f : C \longrightarrow \mathbf{R}$, $H(g) \subset C = D(f)$ je racionálna funkcia. Potom

$$\int (f \circ g)(x)\, dx = \int f\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

počítame pomocou Eulerových substitúcií.

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x \pm t$	ak	$a > 0$
$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$	ak	$c > 0$
$t = \sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$, α, β sú korene rovnice $ax^2+bx+c=0$	ak	$a < 0 \wedge c < 0$

Po aplikácii týchto substitúcií dostaneme integrály z racionálnych funkcií.

Example 93 *Vypočítajte* $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$.

Solution 94 *Pretože* $a > 0$ *uvažujme Eulerovu substitúciu:* $\sqrt{x^2+x+1} = x - t$, *potom* $x = \frac{t^2-1}{2t+1}$ *a* $dx = \frac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2}dt$, $\sqrt{x^2+x+1} = x - t = \frac{-(t^2+t+1)}{2t+1}$. *Potom* $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = -2\int \frac{1}{2t+1}dt = -\ln|2t+1| + C = -\ln\left|2x - 2\sqrt{x^2+x+1}+1\right| + C$.□

Example 95 *Vypočítajte* $\int \frac{1}{\sqrt{4-2x-5x^2}}dx$.

Solution 96 *V tomto prípade je* $c > 0$ *uvažujme Eulerovu substitúciu:* $\sqrt{4-2x-5x^2} = xt + \sqrt{4}$, *potom* $x = \frac{-4t-2}{t^2+5}$ *a*

$$dx = \frac{4(t^2+t-5)}{(t^2+5)^2}dt, \sqrt{4-2x-5x^2} = xt + \sqrt{4} = \frac{-2(t^2+t-5)}{(t^2+5)}.$$

Potom $\int \frac{1}{\sqrt{4-2x-5x^2}}dx = -2\int \frac{1}{t^2+5}dt = -\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) + C = -\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{4-2x-5x^2}-2}{\sqrt{5}x}\right) + C$.□

Example 97 *Vypočítajte* $\int \frac{\sqrt{-x^2+6x-8}}{(x-4)(2x-3)}dx$.

Solution 98 *V tomto prípade je* $a < 0 \wedge c < 0$, *korene rovnice* $-x^2+6x-8 = 0$ *sú* $x = 2, 4$. *Pre* $x \in \langle 2, 4)$ *môžeme upraviť výraz* $\sqrt{-x^2+6x-8} = \sqrt{-(x-2)(x-4)} = (x-4)\sqrt{(-1)\frac{x-2}{x-4}}$.

Uvažujme Eulerovu substitúciu: $t = \sqrt{(-1)\frac{x-2}{x-4}} = \sqrt{\frac{2-x}{x-4}}$, *potom* $x = \frac{4t^2+2}{t^2+1}$ *a* $dx = \frac{4t}{(t^2+1)^2}dt$, $\sqrt{-x^2+6x-8} = \sqrt{(2-x)(x-4)} = (x-4)\sqrt{\frac{2-x}{x-4}}$,

$2x - 3 = \frac{5t^2+1}{t^2+1}$.

Potom $\int \frac{\sqrt{-x^2+6x-8}}{(x-4)(2x-3)}dx = \int \frac{(x-4)\sqrt{\frac{2-x}{x-4}}}{(x-4)(2x-3)}dx = \int \frac{4t^2}{(5t^2+1)(t^2+1)}dt =$

$= -\int \frac{dt}{5t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{5}t\right) + \operatorname{arctg} t + C =$

$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{5\frac{2-x}{x-4}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2-x}{x-4}}\right) + C$.□

Cvičenia.

Počítajte integrály z racionálnych funkcií:

1. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}\,dx.$ $\quad [5x + 2\ln|x| + 3\ln|x-2| + 4\ln|x+2|]\,.$

2. $\int \frac{-2x+19}{x^2+x-6}\,dx.$ $\quad \left[\ln\frac{|x-2|^3}{|x+3|^5}\right].$

3. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^3}\,dx.$ $\quad \left[2\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - 2\ln|x+1|\right].$

4. $\int \frac{5x^2-7x+10}{x^3-x^2-4x-6}\,dx.$ $\quad \left[2\ln|x-3| + \frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right) - 5\mathrm{arctg}(x+1)\right].$

5. $\int \frac{4x^2+x-13}{2x^3+12x^2+11x+5}\,dx.$ $\quad [2\ln|x+5| - 3\mathrm{arctg}\,(2x+1)]\,.$

6. $\int \frac{1}{x^3+1}\,dx.$ $\quad \left[\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\,(2x-1)\right].$

7. $\int \frac{x^5+x^4-7x^3+8x-3}{x^3+x^2-6x}\,dx.$ $\quad \left[\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2}\ln|x(x-2)|\right].$

8. $\int \frac{6x-13}{(4x^2+4x+17)}\,dx.$ $\quad \left[-\frac{x+2}{2(4x^2+4x+17)} - \frac{1}{16}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{4}\right].$

9. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx.$ $\quad \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\frac{x^2|x-2|^5}{|x+2|^3}\right]$

10. $\int \frac{x^2-x+2}{(x-3)(x-1)^2}\,dx.$ $\quad \left[2\ln|x-3| - \ln|x-1| + \frac{1}{x-1}\right]$

11. $\int \frac{3x^2-11x+7}{(x-3)(x^2-4x+4)}\,dx.$ $\quad \left[2\ln|x-2| + \ln|x-3| - \frac{3}{x-2}\right]$

12. $\int \frac{x^3+3x^2+1}{x^2+x}\,dx.$ $\quad \left[\frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| - 3\ln|x+1|\right]$

13. $\int \frac{3x^2-x-14}{x^3+x^2-5x+3}\,dx.$ $\quad \left[\ln|x+3| + 2\ln|x-1| + \frac{3}{x-1}\right]$

14. $\int \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x^2+2x+3)}\,dx.$ $\quad \left[\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right| - \frac{3}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]$

15. $\int \frac{x^2}{(1-x^2)(1+x^2)}\,dx.$ $\quad \left[\frac{1}{4}\ln|1+x| - \frac{1}{4}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x\right]$

16. $\int\limits_0^1 \frac{x+2}{x^2+2x+5}\,dx.$ $\quad \left[\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{1}{2}\right]$

17. $\int\limits_3^4 \frac{2x^2-3x+10}{x^3-7x^2+10x}\,dx.$ $\quad \left[\ln\frac{1}{24}\right]$

18. $\int\limits_1^2 \frac{x^3-3x^2-10x+6}{x^2-4x-5}\,dx.$ $\quad \left[\frac{5}{2} - \ln 3\right]$

19. $\int\limits_2^3 \frac{x^2+2}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx.$ $\quad \left[\ln 2 + \frac{17}{8}\right]$

    Počítajme metódou per partes.

20. $\int \ln(x^2-2x-3)\,dx.$ $\quad [x\ln(x^2-2x-3) - 2x + \ln|x+1| - 3\ln|x-3|]\,.$

21. $\int \ln(x^2-6x+9)\,dx.$ $\quad [x\ln(x^2-6x+9)-2x-6\ln|x-3|]$.

22. $\int \ln(x^2+2x+3)\,dx.$ $\quad \left[(x+1)\ln(x^2+2x+3)-2x+\frac{4}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}\right]$.

23. $\int x^2\mathrm{arctg}\,(x-1)\,dx.$ $\quad \left[\frac{1}{3}\left((x^3+2)\mathrm{arctg}(x-1)-\frac{x^2}{2}-2x-\ln(x^2-2x+2)\right)\right]$.

Pomocou viet o substitúcii počítajme integrály:

24. $\int \frac{x}{\sqrt{2-5x^2}}\,dx.$ $\quad \left[-\frac{1}{5}\sqrt{2-5x^2}\right]$.

25. $\int \frac{e^x}{4e^{2x}-8e^x+13}\,dx.$ $\quad \left[\frac{1}{6}\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{3}(e^x-1)\right)\right]$.

26. $\int \frac{2e^{2x}-3e^x+10}{e^{2x}-7e^x+10}\,dx.$ $\quad [x-2\ln|e^x-2|+3\ln|e^x-5|]$.

27. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x+2\cos x+5}\,dx.$ $\quad \left[-\ln(\cos^2 x+2\cos x+5)+\mathrm{arctg}\left(\frac{\cos x+1}{2}\right)\right]$.

28. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\sin x-2}\,dx.$ $\quad \left[\frac{1}{3}\ln|\sin x-1|+\frac{2}{3}\ln(\sin x+2)\right]$.

29. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x+\sin x-6}\,dx.$ $\quad \left[\frac{1}{5}\ln\frac{3}{8}\right]$.

30. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+\cos x-6}\,dx.$ $\quad \left[\frac{1}{5}\ln\frac{16}{27}\right]$.

31. $\int \frac{e^x+10}{e^{2x}-2e^x+5}\,dx.$ $\quad \left[2x-\ln(e^{2x}-2e^x+5)+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\frac{e^x-1}{2}\right]$.

32. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,dx.$ $\quad \left[6\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}+\ln(\sqrt[6]{x}+1)\right)\right]$.

33. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx.$ $\quad \left[\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right|+2\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right]$.

34. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx.$ $\quad [2\sqrt{1+x}+\ln|\sqrt{1+x}-1|-\ln|1+\sqrt{1+x}|]$.

35. $\int \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}\,dx.$ $\quad .\left[-\frac{t^2}{2}-4t-9\ln|t-3|+\ln|t+1|,\ t=\sqrt{2x+3}\right]$.

36. $\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx.$ $\quad [\ln 9]$.

37. $\int \frac{1}{\sqrt{8-6x-9x^2}}\,dx.$ $\quad \left[\frac{1}{3}\left(\arcsin\left(x+\frac{1}{3}\right)\right)\right]$.

38. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}}\,dx.$ $\quad \left[\ln\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right]$.

39. $\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}\,dx.$ $\quad \left[2\ln|t|+\frac{1}{2}\ln|2t+1|+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1},\ t=\sqrt{x^2-x+1}-x\right]$.

40. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+\cos x}\,dx.$ $\quad \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right]$.

41. $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx.$ $\quad \left[\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-\ln\left(\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right]$.

42. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{4-5\sin x}\,dx.$ $\quad \left[\frac{1}{3}\ln 2\right]$.

43. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\, dx.$ $\left[\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2\right].$

44. $\int \frac{1}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x}\, dx.$ $\left[\frac{\sqrt{14}}{14}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\operatorname{tg} x\right)\right].$

45. Vypočítajme $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\, dx.$ $[4-\pi].$

46. Vypočítajme $\int\limits_0^{2\pi} \cos 3x \cos 4x\, dx.$ $[0].$

Počítajte integrály (použite vhodné metódy)

1. $\int \frac{1}{4+3x^2}\, dx.$ $\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{2}\right].$

2. $\int \frac{x}{4+3x^2}\, dx.$ $\left[\frac{1}{6}\ln(4+3x^2)\right].$

3. $\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\, dx.$ $\left[-\frac{1}{4(x^2+1)^2}\right].$

4. $\int \frac{3x-3}{x^2+2x+2}\, dx.$ $\left[\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+2) - 6\operatorname{arctg}(x+1)\right].$

5. $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+7}\, dx.$ $\left[\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+7) - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right].$

6. $\int e^x \operatorname{cotg} e^x\, dx.$ $[\ln|\sin e^x|].$

7. $\int \frac{2}{9x^2-1}\, dx.$ $\left[\frac{1}{3}\ln\frac{|3x-1|}{|3x+1|}\right].$

8. $\int \frac{1-x}{x^2+x}\, dx.$ $[\ln|x| - 2\ln|x+1|].$

9. $\int \frac{x^3-2x^2+9}{x^2-x-2}\, dx.$ $\left[\frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x-2| - 2\ln|x+1|\right].$

10. $\int \frac{x}{x^3-3x+2}\, dx.$ $\left[\frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{9}\ln|x+2|\right].$

11. $\int \frac{x^2+x+12}{x^3+7x^2+11x+5}\, dx.$ $\left[2\ln|x+5| - \ln|x+1| - \frac{3}{x+1}\right].$

12. $\int \frac{x+2}{x^3+x^2+5x-7}\, dx.$ $\left[\frac{3}{10}\ln|x-1| - \frac{3}{20}\ln(x^2+2x+7) + \frac{\sqrt{6}}{15}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{6}(x+1)}{6}\right)\right].$

13. $\int \frac{5x^3-5x^2-11x+5}{x^2-x-2}\, dx.$ $\left[\frac{5x^2}{2} + \ln|x-2| - 2\ln|x+1|\right].$

14. $\int \frac{7-x}{x^3-x^2+3x+5}\, dx.$ $\left[\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-2x+5}} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)\right].$

15. $\int \frac{2x^3-2x^2+4x-4}{x^4+4}\, dx.$ $\left[\frac{1}{2}\ln\left[(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)\right] - 2\operatorname{arctg}(x+1)\right].$

16. $\int x\operatorname{arctg} x\, dx.$ $\left[\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right].$

17. $\int x^2 e^{3x}\, dx.$ $\left[\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)\right].$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(2x)\sin x\,dx.$ $\quad \left[\frac{2}{5}e^{\pi}+\frac{1}{5}\right].$

19. $\int x\ln x^2\,dx.$ $\quad \left[\frac{x^2}{2}(\ln x^2-1)\right].$

20. $\int \ln(x^2+1)\,dx.$ $\quad [x\ln(x^2+1)-2x+2\mathrm{arctg}x].$

21. $\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx.$ $\quad [(e-2)]$

22. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos(3x)\,dx.$ $\quad \left[-\frac{3}{13}\left(e^{\pi}+\frac{2}{3}\right)\right].$

23. $\int x\ln(x^2-2x+5)\,dx.$

$\left[\frac{1}{2}(x^2+3)\ln(x^2-2x+5)-\frac{x^2}{2}-x+4\mathrm{arctg}\frac{(x-1)}{2}\right].$

24. $\int \ln(x^2+x-2)\,dx.$

$[x\ln(x^2+x-2)-2x-\ln|x-1|+2\ln|x+2|].$

25. $\int x^2\ln(x^2+4x+4)\,dx.$

$\left[\frac{x^3}{3}\ln(x^2+4x+4)-\frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}-x^2+4x-8\ln|x+2|\right)\right].$

26. $\int x^2\mathrm{arctg}\frac{1}{x}\,dx.$ $\quad \left[\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}\frac{1}{x}+\frac{x^2}{6}-\frac{1}{6}\ln(x^2+1)\right].$

27. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$ $\quad \left[2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)\right].$

28. $\int \mathrm{arctg}\frac{1}{x-1}\,dx.$ $\quad \left[x\mathrm{arctg}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2|+\mathrm{arctg}\,(x-1)\right].$

29. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx.$ $\quad \left[\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}+4\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}-4\right].$

30. $\int \frac{e^x+10}{(e^{2x}-2e^x+5)}\,dx.$ $\quad \left[2x-\ln|e^{2x}-2e^x+5|+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{e^x-1}{2}\right)\right].$

31. $\int \frac{e^x(e^x-1)}{e^{2x}+1}\,dx.$ $\quad \left[\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)-\mathrm{arctg}\,(e^x)\right].$

32. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^{2x}+2e^x-3}{e^{2x}+e^x-6}\,dx.$ $\quad \left[\ln\sqrt{5}\right].$

33. $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{2e^x+3}{e^{2x}+2e^x+2}e^x\,dx.$ $\quad [\ln 2+\mathrm{arctg}\,3-\mathrm{arctg}\,2].$

34. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\sin x+3}\,dx.$

$\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sin^2 x+\sin x+3\right)-\frac{\sqrt{11}}{11}\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{11}}{11}(2\sin x+1)\right)\right].$

35. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(5-\cos x)\sin x}{\cos^2 x-\cos x-2}\,dx.$ $\quad [-3\ln 2].$

36. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x+\sin^2 x+\sin x}\, dx.$

$\left[\ln|\sin x| - \frac{1}{2}\ln|\sin^2 x+\sin x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+\sin x\right)\right)\right].$

37. $\int x\sqrt[3]{x+2}\, dx.$ $\left[\frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+2)^7} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^4}\right].$

38. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})}\, dx.$ $[6\ln(1+\sqrt[6]{x})].$

39. $\int \frac{x}{(1+\sqrt{x-1})}\, dx.$

$\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - x + 1 + 4\sqrt{x-1} - 4\ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)\right].$

40. $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\, dx.$ $[7+\ln 4].$

41. $\int \frac{1-\sqrt[6]{x+1}}{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^4}}\, dx.$

$\left[\ln|x+1| - 3\ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right| - 6\mathrm{arctg}\left(\sqrt[6]{x+1}\right)\right].$

42. $\int \frac{1}{x+\sqrt{2x-1}}\, dx.$ $\left[2\ln\left(x+\sqrt{2x-1}\right) + \frac{2}{1+\sqrt{2x-1}}\right].$

43. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+2\sqrt{x-1}}\, dx.$ $\left[2\sqrt{x-1} - \ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)^4 - \frac{2}{1+\sqrt{x-1}}\right].$

44. $\int\limits_1^{27} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x^2}}\, dx.$ $\left[8 + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}\right].$

45. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x-2x^2}}\, dx.$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arcsin\left(\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\right)\right)\right].$

46. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\, dx.$ $\left[\ln\left|\frac{-x-1+\sqrt{x^2+x+1}}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}}\right|\right].$

47. $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx.$ $[2\pi].$

48. $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\, dx.$ $\left[-2\mathrm{arctg}\, t,\ t = \frac{\sqrt{3-2x-x^2}-\sqrt{3}}{x}\right].$

49. $\int\limits_0^4 \frac{1}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}\, dx.$ $\left[\frac{4}{45}\right].$

50. $\int \frac{1}{\sin x}\, dx.$ $\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|\right].$

51. $\int \frac{1}{3-\cos x}\, dx.$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right)\right].$

52. $\int \frac{1}{3+\cos x+\sin x}\, dx.$ $\left[\frac{2\sqrt{7}}{7}\left(\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{7}\left(2\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)}{7}\right)\right].$

53. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x-2\sin x+3}\, dx.$ $\left[-\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right)\right].$

54. $\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}\, dx.$ $\quad \left[2(\ln|t-1| - \ln|t| - \operatorname{arctg} t),\ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right].$

55. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}\, dx.$ $\quad \left[\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right].$

56. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\cos^2 x+2}.$ $\quad \left[\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg} x\right)\right].$

57. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 5x \cos x\, dx.$ $\quad [\frac{1}{6}].$

Integrovateľnosť po častiach spojitých funkcií.

V časti „Integrálny počet - Určitý integrál" sme zaviedli dolné a horné integrálne súčty, definovali sme určitý integrál ako hodnotu $\int_a^b f(x)\,dx$ takú, že $D(f,P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq H(f,P)$, $\forall P$ delenie intervalu $\langle a,b\rangle$. Aj keď pre výpočet integrálov existuje množstvo metód je často ťažké ba dokonca nemožné vyjadriť neurčitý integrál pomocou známych funkcií a tak vypočítať presnú numerickú hodnotu odpovedajúceho určitého integrálu. Napríklad integrál

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^4}\,dx.$$

Niektoré určité integrály vieme nájsť napríklad

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln 2,$$

ale pre praktické použitie je vhodné vedieť numerickú hodnotu $\ln 2$ s určitou presnosťou. Preto definujeme Riemannove integrálne súčty, ktoré nám ako jedna z aproximačných metód pomôžu nájsť hodnotu určitých integrálov.

Definition 99 *Nech P je delenie intervalu $\langle a,b\rangle$ a nech $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ je ohraničená funkcia. Pre každé $k \in \{1,2,...,n\}$ nech $t_k \in \langle x_{k-1},x_k\rangle$ je ľubovoľný bod. Sumu $R(f,P) = \sum_{k=1}^n f(t_k)\,\Delta x_k$ nazývame Riemannovým integrálnym súčtom ohraničenej funkcie f.*

Akokoľvek vyberieme body $t_k \in \langle x_{k-1},x_k\rangle$ vždy platí $D(f,P) \leq R(f,P) \leq H(f,P)$, $\forall P$ delenie intervalu $\langle a,b\rangle$. Pretože pre riemannovsky integrovateľnú funkciu f tak $D(f,P)$ ako aj $H(f,P)$ aproximujú $\int_a^b f(x)\,dx$, tak aj riemannove integrálne súčty aproximujú túto hodnotu. Teda môžme písať:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n f(t_k)\,\Delta x_k.$$

Tento vzorec slúži ako základ pre približný výpočet určitých integrálov. Nutná podmienka integrovateľnosti funkcie hovorí, že každá spojitá funkcia na uzavretom intervale je riemannovsky integrovateľná. Najdôležitejšou vlastnosťou Riemannových integrálnych súčtov je, že aproximujú numerickú hodnotu určitého integrálu. Nasledujúca veta, ktorú uvádzame bez dôkazu je presnou matematickou formuláciou tohto tvrdenia.

Theorem 100 *Nech $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ je spojitá na $\langle a,b\rangle$. K ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že platí: Ak $P = \{x_0,x_1,...,x_n\}$ je nejaké delenie intervalu $\langle a,b\rangle$, ktorého každý podinterval má dĺžku menšiu ako δ a ak $x_{k-1} \leq t_k \leq x_k$ pre každé $k = 1,2,...,n$, potom pre odpovedajúci Riemannov integrálny súčet $\sum_{k=1}^n f(t_k)\,\Delta x_k$ je splnený odhad $\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^n f(t_k)\,\Delta x_k\right| < \varepsilon$.*

Túto vlastnosť často zapisujeme v tvare:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\longrightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k)\,\Delta x_k,$$

kde $\|P\|$ označuje dĺžku najväčšieho podintervalu delenia P a nazýva sa norma delenia P. Riemannove integrálne súčty však majú zmysel aj pre funkcie, ktoré nie sú nutne spojité na intervale $\langle a, b \rangle$.

Definition 101 *Nech $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ s výnimkou konečného počtu bodov, v ktorých má vlastné limity sprava aj zľava (okrem bodu a, v ktorom má iba limitu sprava a bodu b, v ktorom má iba limitu zľava). Potom f nazývame po častiach spojitá funkcia na $\langle a, b\rangle$.*

Nech funkcia $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ je po častiach spojitá funkcia. Označme jej body nespojitosti $c_1, c_2, ..., c_n$, $a < c_1 < c_2 < ... < c_n < b$. Potom je funkcia f spojitá na každom z intervalov $(a, c_1), (c_1, c_2), ..., (c_{n-1}, c_n), (c_n, b)$. Pri výpočte integrálu $\int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\, dx$ nahradíme funkciu f funkciou spojitou na intervale $\langle c_{k-1}, c_k\rangle$, ktorá je totožná s funkciou f na intervale (c_{k-1}, c_k). Potom je f integrovateľná na každom z intervalov $\langle a, c_1\rangle, \langle c_1, c_2\rangle, ..., \langle c_{n-1}, c_n\rangle, \langle c_n, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{c_1} f(x)\, dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\, dx + ... + \int_{c_n}^{b} f(x)\, dx.$$

Example 102 *Vypočítajte $\int_0^3 f(x)\, dx$, pričom $f(x) = \begin{cases} 1 & pre \quad x \in \langle 0, 2\rangle \\ x & pre \quad x \in (2, 3\rangle \end{cases}$.*

Solution 103 *Platí $f(2-) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = 1$, a $f(2+) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = 2$, vidíme, že funkcia f je spojitá s výnimkou bodu $x = 2$ t.j. je po častiach spojitá a teda integrovateľná. Potom $\int_0^3 f(x)\, dx = \int_0^2 f(x)\, dx + \int_2^3 f(x)\, dx = \int_0^2 1dx + \int_2^3 xdx = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$.*$\square$

Aplikácie integrálneho počtu.

Plošný obsah rovinných útvarov.

Definition 104 *Nech* $f, g : \langle a, b \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *sú spojité funkcie. Nech* R *je rovinný útvar ohraničený zhora a zdola grafmi* f *a* g *a zľava a sprava priamkami* $x = a$ *a* $x = b$*. Potom* R *nazývame rovinným útvarom medzi grafmi* f *a* g *na intervale* $\langle a, b \rangle$ *a jeho plocha* A *je definovaná vzťahom* $A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$.

Example 105 *Nech* $f, g : \langle -1, 1 \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + 1$, $g(x) = x^3 + x + 1$.*Nájdite plochu útvaru medzi grafmi* f *a* g *na* $\langle -1, 1 \rangle$.

Solution 106 *Podľa definície máme*

$$A = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{-1}^{1} \left| x^3 + x^2 + 1 - x^3 - x - 1 \right| dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left| x^2 - x \right| dx = \int_{-1}^{0} \left(x^2 - x \right) dx + \int_{0}^{1} \left(x - x^2 \right) dx = 1.\square$$

Niekedy môžeme namiesto útvaru medzi grafmi funkcií f, g závislých od premennej x skúmať aj plochu útvaru medzi grafmi funkcií závislých od premennej y: $\int_c^d |f(y) - g(y)|\, dy$.

Objem priestorových útvarov.

Uvažujme trojrozmerné teleso D, ktoré môžme popísať nasledujúcim spôsobom: pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ priesečníkom roviny kolmej na os o_x v bode x s telesom D je rovinný útvar s plošným obsahom vyjadreným funkciou $A(x)$.

Definition 107 *Nech teleso* D *má plochu kolmého rezu definovanú funkciou* $A : \langle a, b \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ *a predpokladáme, že* $A(x)$ *je spojitá na* $\langle a, b \rangle$*. Potom objem* V *telesa* D *definujeme:* $V = \int_a^b A(x)\, dx$.

Example 108 *Ukážte, že objem rotačného kužeľa s výškou* h *a polomerom základne* r *je daný vzťahom* $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Solution 109 *Najskôr nájdeme plochu kolmého rezu rotačného kužeľa. Je zrejmé, že kolmým rezom bude kruh s polomerom* $r(x)$*, ak projekciu kužeľa umiestnime do kartézskeho súradnicového systému* $[0, x, y]$ *tak, že jeho vrchol je v začiatku a os rotačného kužeľa je totožná s kladným smerom osi* o_x*, potom z podobnosti trojuholníkov dostaneme:* $\frac{r(x)}{x} = \frac{r}{h} \Longrightarrow r(x) = \frac{r}{h}x$

a plocha kolmého rezu je

$A(x) = \pi r^2(x) = \pi \frac{r^2}{h^2} x^2$,

potom

$V = \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3}\pi r^2 h.\square$

Ak graf spojitej nezápornej funkcie $f : \langle a, b \rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}$ rotuje okolo osi o_x, vytvára teleso s plochou kolmého rezu

$$A(x) = \pi f^2(x).$$

Potom z predchádzajúcej definície plynie, že

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Definition 110 *Nech $f, g : \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ sú spojité funkcie a $0 \leq g(x) \leq f(x),\ x \in \langle a, b\rangle$. Nech R je obrazec medzi grafmi f a g na $\langle a, b\rangle$. Potom objem V telesa, ktoré vznikne rotáciou obrazca R okolo osi o_x definujeme $V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx$.*

Dĺžka krivky.

Definition 111 *Nech $f : \langle a, b\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ je spojite diferencovateľná funkcia. Potom dĺžku krivky l, ktorú vytvára graf funkcie f medzi bodmi $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ definujeme $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$.*

Example 112 *Vypočítajte dĺžku krivky danej grafom funkcie $f(x) = \ln x,\ x \in \left\langle \sqrt{3}, \sqrt{8}\right\rangle$.*

Solution 113 *Funkcia $f(x) = \ln x$ je na intervale $\left\langle \sqrt{3}, \sqrt{8}\right\rangle$ spojite diferencovateľná a platí $f'(x) = \frac{1}{x}$. Potom dĺžka krivky, ktorú vytvára graf funkcie f na intervale $\left\langle \sqrt{3}, \sqrt{8}\right\rangle$ je definovaná: $l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\left(1+x^2\right)}{x^2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx =$*

$$= \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{1+x^2} \Longrightarrow dt = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \Longrightarrow dt = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}dx \\ x = \sqrt{3} \Longrightarrow t = 2,\ x = \sqrt{8} \Longrightarrow t = 3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1}dt =$$

$$= \int_2^3 1dt + \int_2^3 \frac{1}{(t-1)(t+1)}dt = 1 + \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_2^3 = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.\square$$

Cvičenia.

1. Vypočítajte integrál $\int_0^4 f(x)dx$, ak $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pre} \quad x \in \langle 0,2) \\ 3 & \text{pre} \quad x \in \langle 2,3) \\ 4-x & \text{pre} \quad x \in \langle 3,4\rangle \end{cases}$. $\left[\frac{37}{6}\right]$

2. Vypočítajte integrál $\int_0^{1+\frac{\pi}{2}} f(x)dx$, ak $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pre} \quad x \in \langle 0,\frac{\pi}{4}) \\ x & \text{pre} \quad x \in \langle \frac{\pi}{4},1) \\ \cos(x-1) & \text{pre} \quad x \in \langle 1,1+\frac{\pi}{2}\rangle \end{cases}$. $\left[\frac{3-\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2}{32}\right]$

3. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

   (a) $y = x\ln x,\ x = \frac{1}{2},\ x = 2,\ y = 0.$ $\left[-\frac{9}{16} + \frac{15}{8}\ln 2\right]$.

   (b) parabolou $y = x^2 - 6x + 8$ a jej dotyčnicami v bodoch $A = [1,3]$, $B = [4,0]$. $\left[\frac{9}{4}\right]$.

   (c) parabolami $y = x^2, y = \sqrt{x}$. $\left[\frac{1}{3}\right]$.

4. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

   (a) $y = \frac{27}{x^2+9},\ y = \frac{x^2}{6}.$ $\left[\frac{3}{2}(3\pi - 2)\right]$.

   (b) $y = \ln x,\ y = \ln^2 x.$ $[3 - e]$.

5. Vypočítajme plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

   (a) $y = x - 1, y^2 = 2x + 1.$ $\left[\frac{16}{3}\right]$.

   (b) $y = x^2,\ y = \frac{1}{2}x^2,\ y = 2.$ $\left[\frac{8}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right)\right]$.

6. Kruh $x^2 + y^2 = 8$ je rozdelený parabolou $y = \frac{x^2}{2}$ na dve časti. Vypočítajme plošný obsah menšej z nich. $\left[2\pi + \frac{4}{3}\right]$.

7. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej čiarami $yx = 4,\ x+y = 5$. Načrtnite obrázok! $\left[\frac{15}{2} - 2\ln 8\right]$

8. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej čiarami $y = 0,\ y = xe^{-2x}$ na $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$. Načrtnite obrázok! $\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2e}\right]$

9. Vypočítajte objem zrezaného kužeľa, ktorý vznikne rotáciou elementárnej oblasti okolo osi o_x. Polomery jeho podstáv sú $r = 1,\ R = 2$ a výška $v = 3$. $[7\pi]$.

10. Vypočítajme objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x. Oblasť je určená čiarami $y = \frac{2x}{\pi},\ y = \sin x,\ x \geq 0.$ $\left[\frac{\pi^2}{12}\right]$.

11. Vypočítajme objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x. Oblasť je určená čiarami $y = \sin x,\ y = \frac{2x}{\pi}.$ $\left[\frac{\pi^2}{6}\right]$.

12. Zistite plochu kolmého rezu a vypočítajte objem gule s polomerom r. $\Big[A(x) = \pi r^2(x) = \pi(r^2 - x$

13. Zistite plochu kolmého rezu a vypočítajte objem pravidelného štvorbokého ihlana so základňou dĺžky a a výškou h. $\left[A(x) = a^2(x) = \frac{a^2x^2}{h^2},\ V = \int_0^h \frac{a^2x^2}{h^2}dx = \frac{1}{3}a^2h.\right]$

14. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnej oblasti ohraničenej čiarami $y = 1 - x^2,\ y = x^2$ okolo osi o_x. $\left[\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\right]$

15. Vypočítajte dĺžku krivky $y = 2\sqrt{x}$, $1 \le x \le 2$. $\left[\sqrt{6} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{2\sqrt{6}+5}{2\sqrt{2}+3}\right]$

16. Vypočítajte dĺžku krivky $y = \ln\frac{e^x+1}{e^x-1},\ x \in \langle \ln 2, \ln 5\rangle$. $\left[\ln\frac{16}{5}\right]$