Nájdite definičný obor funkcie f, deriváciu funkcie f a jej definičný obor a vypočítajte $f'(i)$, ak:

1. $f(z) = \dfrac{iz-1}{iz^2+1+i}$
   $\left[D(f) = D(f') = \mathbb{C} \setminus \{\sqrt[4]{2}e^{i\frac{3}{8}\pi}, \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{5}{8}\pi}\},\ f'(z) = \dfrac{z^2+2iz+i-1}{(iz^2+1+i)^2},\ f'(i) = -4+i\right]$

2. $f(z) = \dfrac{3i}{2i-z}$
   $\left[D(f) = D(f') = \mathbb{C} \setminus \{2i\},\ f'(z) = \dfrac{3i}{(2i-z)^2},\ f'(i) = -3i\right]$

Zistite, či sú nasledujúce funkcie diferencovateľné a ak áno, vypočítajte ich derivácie.

1. $f(z) = \dfrac{1}{z}$
   $\left[D(f) = D(f') = \mathbb{C} \setminus \{0\},\ f'(z) = \dfrac{-1}{z^2},\ f \text{ je diferencovateľná}\right]$

2. $f(z) = z^2 - 2iz$
   $[D(f) = D(f') = \mathbb{C},\ f'(z) = 2z - 2i,\ f \text{ je diferencovateľná}]$

3. $f(z) = e^{iz}$
   $[D(f) = D(f') = \mathbb{C},\ f'(z) = ie^{iz},\ f \text{ je diferencovateľná}]$

4. $f(z) = |z|$
   $[D(f) = \mathbb{C},\ f \text{ nie je diferencovateľná v žiadnom bode z } \mathbb{C}]$

5. $f(z) = \overline{z}$
   $[D(f) = \mathbb{C},\ f \text{ nie je diferencovateľná v žiadnom bode z } \mathbb{C}]$

V nasledujúcich úlohách pre funkciu f:
a) zistite, kde existuje derivácia funkcie f,
b) nájdite f' v bodoch, v ktorých existuje,
c) vyšetrite, kde je f analytická.

1. $f(z) = f(x+iy) = x^2 + iy^2$
   $\big[D(f) = \mathbb{C}$, f' existuje na $M = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z = \text{Re } z\}$ a $f'(z) = f'(x+iy) = 2x$, f nie je analytická v žiadnom bode z $\mathbb{C}\big]$

2. $f(z) = z^3 + z$
   $\big[D(f) = \mathbb{C}$, f' existuje v každom bode z $\mathbb{C}$ a $f'(z) = 3z^2 + 1$, f je analytická v $\mathbb{C}\big]$

3. $f(z) = z\text{Re}z$
   $\big[D(f) = \mathbb{C}$, f' existuje len v bode $z = 0$ a $f'(0) = 0$, f nie je analytická v žiadnom bode z $\mathbb{C}\big]$

4. $f(z) = f(x+iy) = (2xy + 2x - 1) + i(y^2 - x^2 + 2y)$
$\left[D(f) = \mathbb{C},\ f'(z) = f'(x+iy) = (2y+2)+i(-2x),\ f \text{ je diferencovateľná a analytická v } \mathbb{C}\right]$

5. $f(z) = f(x+iy) = \mathrm{e}^x \cos y - i(\mathrm{e}^x \sin y)$
$\left[D(f) = \mathbb{C},\ f' \text{ neexistuje v žiadnom bode z } \mathbb{C} \text{ a teda } f \text{ nie je analytická}\right]$

V nasledujúcich úlohách nájdite na $A \subset \mathbb{C}$ analytickú funkciu $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, ak je daná jedna jej zložka a prípadne funkčná hodnota v jednom bode:

1. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2;\ f(i) = 0$
$\left[v(x,y) = 3x^2y - y^3 + 1;\ f(z) = f(x+iy) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3 + 1)\right]$

2. $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy;\ f(0) = 0$
$\left[v(x,y) = 2xy - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2;\ f(z) = f(x+iy) = (x^2 - y^2 + xy) + i(2xy - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2)\right]$

3. $v(x,y) = x^2 - y^2 - 3x + 2xy;\ u(2,1) = 0$
$\left[u(x,y) = x^2 - 2xy + 3y - y^2 - 2;\ f(z) = f(x+iy) = (x^2 - 2xy + 3y - y^2 - 2) + i(x^2 - y^2 - 3x + 2xy)\right]$

4. $u(x,y) = 2x^2 - 2y^2 - 6xy + x - y + 3;\ f(i) = i$
$\left[v(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 4xy + x + y + 3;\ f(z) = f(x+iy) = (2x^2 - 2y^2 - 6xy + x - y + 3) + i(3x^2 - 3y^2 + 4xy + x + y + 3)\right]$

5. $v(x,y) = 2xy + 3x$
$\left[u(x,y) = x^2 - y^2 - 3y + k;\ f(z) = f(x+iy) = (x^2 - y^2 - 3y + k) + i(2xy + 3x)\right]$

6. $u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3;\ f(0) = 0$
$\left[v(x,y) = -2x^3 - y^3 + 3x^2y + 6xy^2;\ f(z) = f(x+iy) = (x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3) + i(-2x^3 - y^3 + 3x^2y + 6xy^2)\right]$

7. $v(x,y) = 2\mathrm{e}^x \sin y;\ f(0) = 1$
$\left[u(x,y) = 2\mathrm{e}^x \cos y - 1;\ f(z) = f(x+iy) = (2\mathrm{e}^x \cos y - 1) + i(2\mathrm{e}^x \sin y)\right]$

8. $v(x,y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$
$\left[u(x,y) = 2\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - y - 2x + k \text{ alebo } u(x,y) = -2\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - y - 2x + K\right]$

9. $u(x,y) = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y);\ f(0) = 0$
$\left[v(x,y) = \mathrm{e}^x(x\sin y + y\cos y);\ f(z) = f(x+iy) = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y) + i\mathrm{e}^x(x\sin y + y\cos y)\right]$

10. $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - 2y$
$\left[v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} + 2x + k;\ f(z) = f(x+iy) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} - 2y\right) + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2} + 2x + k\right)\right]$

11. $v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$; $f(2) = 0$

$$\left[u(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2} + \frac{1}{2};\ f(z) = f(x+iy) = \left(\frac{-x}{x^2+y^2} + \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \right]$$

V nasledujúcich úlohách ukážte, že $u(x,y)$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu, ak:

1. $u(x,y) = xy$

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 + 0 = 0 & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ v(x,y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + k & \text{harmonicky združená funkcia} \end{array} \right]$$

2. $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 2 - 2 = 0 & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ v(x,y) = -\frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} + k & \text{harmonicky združená funkcia} \end{array} \right]$$

3. $u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 6x + 12y - (6x + 12y) = 0 & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ v(x,y) = -2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - y^3 + k & \text{harmonicky združená funkcia} \end{array} \right]$$

4. $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - x$

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 12x^2 - 12y^2 + (12y^2 - 12x^2) = 0 & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 - y + k & \text{harmonicky združená funkcia} \end{array} \right]$$

5. $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

$$\left[\begin{array}{ll} \Delta u = \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2+y^2)^3} + \frac{6xy^2 - 2x^3}{(x^2+y^2)^3} = 0 & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y) \neq (0,0) \\ v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} + k & \text{harmonicky združená funkcia na } \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \end{array} \right]$$

6. $u(x,y) = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y)$

$$\left[\begin{array}{ll} \Delta u = \mathrm{e}^x(2\cos y + x\cos y - y\sin y) + \mathrm{e}^x(y\sin y - 2\cos y - x\cos y) = 0 & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ v(x,y) = \mathrm{e}^x(x\sin y + y\cos y) + k & \text{harm. z. funkcia} \end{array} \right]$$

Ukážte, že $v(x,y) = y\cos y \sinh x + x\sin y \cosh x$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu.

$$\left[\begin{array}{ll} \Delta v = \sinh x(2\sin y + y\cos y - 2\sin y - y\cos y) + \cosh x(x\sin y - x\sin y) = 0 & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,y) = x\cos y \sinh x - y\sin y \cosh x + k & \text{harm. z. funkcia} \end{array} \right]$$