Nájdite limity postupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ komplexných čísel, ak:

1. $z_n = \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n + i\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)$ $\left[\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}} + i\dfrac{1}{3}\right]$

2. $z_n = 2n\sin\left(\frac{1}{n}\right) + i\left(\frac{4n+1}{5n-1}\right)$ $\left[\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 2 + i\dfrac{4}{5}\right]$

3. $z_n = \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + i\left(\frac{n^2-3}{5n^3+1}\right)$ $\left[\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0\right]$

4. $z_n = n\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2n}\right) + i\left(1+\frac{4}{n}\right)^n$ $\left[\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \dfrac{1}{2} + i\mathrm{e}^4\right]$

5. $z_n = \frac{1}{n} + i\cos(n\pi)$ $\left[\nexists \lim\limits_{n\to\infty} z_n\right]$

6. $z_n = \sqrt{n} + i\mathrm{arctg}(n)$ $\left[\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty\right]$

Zistite, či rady komplexných čísel $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergujú alebo divergujú, ak:

1. $z_n = \frac{\sin n}{n^3} + i\frac{\cos n}{n^3}$ [rad (abs.) konverguje]

2. $z_n = \frac{1}{n(n+1)} + i\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ [rad (abs.) konverguje]

3. $z_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}} + i\left(\frac{n}{3^n}\right)$ [rad diverguje, nespĺňa nutnú podmienku konvergencie]

4. $z_n = \sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right) + i\left(\frac{n^2+1}{3^n}\right)$ [rad (abs.) konverguje]

Vyjadrite reálnu a imaginárnu časť komplexnej funkcie komplexnej premennej $f(z)$, ak $z = x+iy$, kde $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, a:

1. $f(z) = z^2 - z + 1$ $\left[\mathrm{Re}f(z) = u(x,y) = x^2 - y^2 - x + 1,\ \mathrm{Im}f(z) = v(x,y) = 2xy - y\right]$

2. $f(z) = \frac{1}{z};\ z \neq 0$ $\left[\mathrm{Re}f(z) = u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},\ \mathrm{Im}f(z) = v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\right]$

3. $f(z) = |z| + \mathrm{Re}z$ $\left[\mathrm{Re}f(z) = u(x,y) = x + \sqrt{x^2+y^2},\ \mathrm{Im}f(z) = v(x,y) = 0\right]$

Nájdite definičný obor funkcie f, ak:

1. $f(z) = \frac{3iz-12z+i}{iz^2+1-i}$ $\left[\mathrm{D}(f) = \mathbb{C} \setminus \{\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-i\frac{7\pi}{8}}\}\right]$

2. $f(z) = \frac{\overline{z}}{(z^3-8i)(|z|-3)}$ $\left[\mathrm{D}(f) = \mathbb{C} \setminus (\{z\in\mathbb{C} : |z| = 3\} \cup \{\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}+i, -2i\})\right]$

Vypočítajte funkčnú hodnotu funkcie f v čísle z_0, ak:

1. $f(z) = \frac{\overline{z}}{(z^3-8i)(|z|-3)}$; $z_0 = i$ $\left[f(z_0) = -\frac{1}{18}\right]$

2. $f(z) = z + \overline{z}^2 - \mathrm{Re}(z\overline{z}) - \mathrm{Im}(z\overline{z})$; $z_0 = 8 - 6i$ $\left[f(z_0) = -64 + 90i\right]$

3. $f(z) = \arg z$; $z_0 = -1 + 2i$ $\left[f(z_0) = \pi - \mathrm{arctg}(2)\right]$

4. $f(z) = \arg z$; $z_0 = -1 - i$ $\left[f(z_0) = -\frac{3}{4}\pi\right]$

Vypočítajte limitu:

1. $\lim\limits_{z\to 2i} \dfrac{z+3}{z^2+2iz}$ $\left[-\frac{3}{8} - \frac{i}{4}\right]$

2. $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^2 - iz + z - i}{3iz^2 + 3z}$ $\left[-\frac{1}{3} - \frac{i}{3}\right]$

3. $\lim\limits_{z\to(2+i)} \dfrac{3iz - 6i + 3}{2iz^2 - 4iz + 2z}$ $\left[\frac{6-3i}{10}\right]$

4. $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^2 + (2-i)z - 2i}{z^2+1}$ $\left[\frac{1}{2} - i\right]$

5. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z^2}{|z|^2}$ $[\nexists]$

6. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z^3}{|z|^2}$ $[0]$

Vyšetrite spojitosť funkcie f, ak:

1. $f(z) = \frac{1}{1-z}$ [funkcia je spojitá na svojom $\mathrm{D}(f) = \mathbb{C} \setminus \{1\}$]

2. $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ [funkcia je spojitá na svojom $\mathrm{D}(f) = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$]

3. $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Re}}{z}, & \text{pre } z \neq 0; \\ 0, & \text{pre } z = 0. \end{cases}$
[funkcia je spojitá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, v bode $z = 0$ spojitá nie je]

Zistite, či je možné dodefinovať funkciu f v bode z_0 tak, aby bola spojitá v tomto bode, ak:

1. $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1+i\} \to \mathbb{C}$; $f(z) = \frac{z^3 - z^2 - iz^2 + iz - i + 1}{z^2 - z - iz}$; $z_0 = 1 + i$
[Áno, je to možné. $\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & \text{pre } z \neq 1+i,\ z \neq 0; \\ \frac{3}{2}(1+i), & \text{pre } z = 1+i. \end{cases}$]

2. $f : \mathbb{C} \setminus \{4+i\} \to \mathbb{C}$; $f(z) = \frac{z^2 - (3+2i)z - 6 + 7i}{z - 4 - i}$; $z_0 = 4 + i$
[Nie je to možné, pretože $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.]