Vypočítajte integrály racionálnych funkcií:

1. $\int \frac{2}{x^2-1} dx$ $\left[\ln|x-1| - \ln|x+1| + c\right]$

2. $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx$ $\left[-\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + c\right]$

3. $\int \frac{x^5+x^4-7x^3+8x-3}{x^3+x^2-6x} dx$ $\left[\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2}\ln|x(x-2)| + c\right]$

4. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx$ $\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + c\right]$

5. $\int \frac{x^3+x+3}{x^4+3x^3} dx$ $\left[-\frac{1}{2x^2} + \ln|x+3| + c\right]$

6. $\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$ $\left[\ln\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c\right]$

7. $\int \frac{x-2}{x^2+2x+7} dx$ $\left[\ln\sqrt{x^2+2x+7} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right) + c\right]$

8. $\int \frac{1}{x^3+2x} dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln\left(x^2+2\right) + c\right]$

9. $\int \frac{-2x^2+4x+13}{(x-2)(x^2+3x+3)} dx$ $\left[\ln|x-2| - \frac{3}{2}\ln\left(x^2+3x+3\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right) + c\right]$

10. $\int \frac{x^2+9x+30}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$ $\left[5\ln|x-1| - 2\ln\left(x^2+2x+5\right) - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c\right]$

11. $\int \frac{1}{x^4+4} dx$ $\left[\frac{1}{8}\Big(\mathrm{arctg}(x-1) + \mathrm{arctg}(x+1)\Big) + \frac{1}{16}\ln\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right) + c\right]$

12. $\int \frac{x}{x^8-1} dx$ $\left[\frac{1}{8}\Big(\ln|x^2-1| - \ln|x^2+1|\Big) - \frac{1}{4}\mathrm{arctg}x^2 + c\right]$

Vypočítajte neurčité integrály (*návod:* zvoľte vhodnú substitúciu a následne integrujte ako racionálnu funkciu):

1. $\int \frac{2}{x(\ln x-2)(\ln^2 x-2\ln x+2)} dx$ $\left[\ln\frac{|\ln x-2|}{\sqrt{(\ln x-1)^2+1}} - \mathrm{arctg}(\ln x-1) + c\right]$

2. $\int \frac{\mathrm{e}^x+10}{\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x+5} dx$ $\left[2x - \ln(\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 5) + \frac{3}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{2}\right) + c\right]$

3. $\int \frac{1-\sqrt[6]{x+1}}{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^4}} dx$ $\left[\ln|x+1| - 3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}| - 6\mathrm{arctg}(\sqrt[6]{x+1}) + c\right]$

4. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ $\left[\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right| + 2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + c\right]$

5. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}-1}{\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}+1}\right| - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}+1} + c\right]$

6. $\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5} dx$ $\left[\textit{substitúcia: } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}; F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}(\frac{x}{2})+1}{\sqrt{5}}\right) + c\right]$

pozn.: primitívnu funkciu je možné spojito dodefinovať na celom $\mathbb{R}$ nasledujúcim spôsobom:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}(\frac{x}{2})+1}{\sqrt{5}}\right) + k\frac{\pi}{\sqrt{5}}, & \text{pre } x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi); \\ \frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{5}}, & \text{pre } x = (2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

7. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx$ $\left[\textit{substitúcia: } t = \operatorname{tg} x; F(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x) + c\right]$

pozn.: primitívnu funkciu je možné spojito dodefinovať na celom $\mathbb{R}$ nasledujúcim spôsobom:

$$F(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x) + k\pi\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right), & \text{pre } x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi); \\ \frac{(2k+1)\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right), & \text{pre } x = (2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$