Príklady z M2

Ľubomír Marko

1 Prvý týždeň

Opakovanie

2 Druhý týždeň

V cvičeniach 1 - 19 vypočítajte integrály priamym integrovaním (pomocou integrálov elementárnych funkcií):

1. $\int \left(3x^3 + 2x - 4\right) dx$. $\left[\frac{3}{4}x^4 + x^2 - 4x + C\right]$
2. $\int \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{5}x\right) dx$. $\left[\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{10}x^2 + C\right]$
3. $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$. $\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C\right]$
4. $\int \frac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3} dx$. $\left[\ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C\right]$
5. $\int \frac{x(\sqrt[3]{x} - x\sqrt[3]{x})}{\sqrt[4]{x}} dx$. $\left[-\frac{12}{37}\sqrt[12]{x^{37}} + \frac{12}{25}\sqrt[12]{x^{25}} + C\right]$
6. $\int \frac{x^3-1}{x-1} dx$. $\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C\right]$
7. $\int e^x a^x dx$. $\left[\frac{e^x a^x}{1+\ln a} + C\right]$
8. $\int \left(5\cos x - 2x^5 + \frac{3}{1+x^2}\right) dx$. $\left[5\sin x - \frac{1}{3}x^6 + 3\operatorname{arctg} x + C\right]$
9. $\int \left(10^{-x} + \frac{x^2+2}{x^2+1}\right) dx$. $\left[-\frac{10^{-x}}{\ln 10} + x + \operatorname{arctg} x + C\right]$
10. $\int (2\sin x - 3\cos x)\, dx$. $[-2\cos x - 3\sin x + C]$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{3-3x^2}} dx$. $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x + C\right]$
12. $\int \frac{3.2^x - 2.3^x}{2^x} dx$. $\left[3x - \frac{3^x}{2^{x-1}(\ln 3 - \ln 2)} + C\right]$
13. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$. $\left[\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}x + C\right]$
14. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$. $[-\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x + C.]$
15. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$. $[\operatorname{tg} x - x + C]$
16. $\int \operatorname{cotg}^2 x dx$. $[-\operatorname{cotg} x - x + C]$
17. $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$. $[\operatorname{tg} x + C]$
18. $\int \frac{\left(1+2x^2\right)}{x^2(1+x^2)} dx$. $\left[-\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C\right]$
19. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$. $[\ln|x| + 2\operatorname{arctg} x + C]$
20. $\int 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$. $[x - \sin x + C]$
21. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$. $\left[\frac{\pi}{4}\right]$
22. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. $\left[\frac{\pi}{6}\right]$

3 Tretí týždeň

Vypočítajte integrály:

1. $\int x \operatorname{arctg} x dx.$ $\left[\begin{array}{c}\text{Metóda: per partes}\\ f(x)=\operatorname{arctg} x, f'(x)=\frac{1}{1+x^2}, g'(x)=x, g(x)=\frac{x^2}{2}\\ \text{Výsledok :}\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}x+C\end{array}\right]$

2. $\int xe^{2x}dx.$ $\left[\begin{array}{c}\text{Metóda: per partes 2x}\\ f(x)=x, f'(x)=1, g'(x)=e^{2x}, g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\\ \text{Výsledok : }\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C\end{array}\right]$

3. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x dx.$ $\left[\begin{array}{c}\text{Metóda: per partes 2x}\\ f(x)=e^{2x}, f'(x)=2e^{2x}, g'(x)=\sin x, g(x)=-\cos x\\ \text{Výsledok : }\frac{1}{5}\left(1+2e^{\pi}\right)\end{array}\right]$

4. $\int \ln x dx.$ $\left[\begin{array}{c}\text{Metóda: per partes}\\ f(x)=\ln x, f'(x)=\frac{1}{x}, g'(x)=1, g(x)=x\\ \text{Výsledok : }x\ln x-x+C\end{array}\right]$

5. $\int_1^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx.$ $\left[\begin{array}{c}\text{Metóda: per partes}\\ f(x)=\operatorname{arctg} x, f'(x)=\frac{1}{1+x^2}, g'(x)=x, g(x)=\frac{x^2}{2}\\ \text{Výsledok : }\frac{5\pi}{12}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\end{array}\right]$

6. $\int \operatorname{arccotg} x dx.$ $\left[\begin{array}{c}\text{Metóda: per partes}\\ f(x)=\operatorname{arccotg} x, f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}, g'(x)=1, g(x)=x\\ \text{Výsledok : }x\operatorname{arccotg} x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C\end{array}\right]$

7. $\int \ln^2 x dx.$ $\left[\begin{array}{c}\text{Metóda: per partes 2 krát}\\ f(x)=\ln^2 x, f'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}, g'(x)=1, g(x)=x\\ \text{Výsledok : }x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C\end{array}\right]$

8. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx.$ $\left[\begin{array}{c}\text{Metóda: per partes}\\ f(x)=x, f'(x)=1, g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}, g(x)=\operatorname{tg} x\\ \text{Výsledok : }x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C\end{array}\right]$

9. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx.$ $\left[\begin{array}{c}\text{Metóda: per partes}\\ f(x)=\arcsin x, f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, g'(x)=(1+x)^{-\frac{1}{2}}, g(x)=2\sqrt{1+x}\\ \text{Výsledok : }\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}+4\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}-4\end{array}\right]$

10. $\int x\operatorname{tg}^2 x dx$ $\left[\begin{array}{c}\int x\operatorname{tg}^2 x dx=\int x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx+\text{Metóda: per partes}\\ f(x)=x, f'(x)=1, g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1, g(x)=\operatorname{tg} x-x\\ \text{Výsledok : }-\frac{1}{2}x^2+x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C\end{array}\right]$

11. $\int \cos(\ln x)dx$ $\left[\begin{array}{c}\text{Metóda: per partes 2 krát}\\ f(x)=\cos(\ln x), f'(x)=-\sin(\ln x)\frac{1}{x}, g'(x)=1, g(x)=x\\ \text{Výsledok : }\frac{x}{2}\left(\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right)+C\end{array}\right]$

12. $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: per partes 2 krát} \\ f(x) = x^2, f\,'(x) = 2x, g'(x) = \sin x, g(x) = -\cos x \\ \text{Výsledok}: \pi^2 - 4 \end{array}\right]$

13. $\int \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} dx$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: per partes + integrovanie racionálnych funkcií} \\ f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}, f\,'(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}, g'(x) = 1, g(x) = x \\ \text{Výsledok}: x \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln \left|x^2 - 2x + 2\right| + \operatorname{arctg}(x-1) + C \end{array}\right]$

14. $\int x^2 \arcsin x dx$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: per partes} \\ f(x) = \arcsin x, f\,'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, g'(x) = x^2, g(x) = \frac{x^3}{3} \\ \text{Výsledok}: \frac{1}{3}x^3 \arcsin x + \frac{1}{9}x^2\sqrt{(1-x^2)} + \frac{2}{9}\sqrt{(1-x^2)} + C \end{array}\right]$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp(3x) \sin(4x)\, dx$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: per partes 2 krát} \\ f(x) = e^{3x}, f\,'(x) = 3e^{3x}, g'(x) = \sin(4x), g(x) = -\frac{1}{4}\cos(4x) \\ \text{Výsledok}: \frac{4}{25}\left(e^{\frac{3}{4}\pi} + 1\right) \end{array}\right]$

16. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: per partes} \\ f(x) = \arcsin x, f\,'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, g'(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}, g(x) = 2(1+x)^{\frac{1}{2}} \\ \text{Výsledok}: \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} + 4\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} - 4 \end{array}\right]$

17. $\int \left(x^2 + x\right) \ln(x+1)\, dx$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: substitučná + per partes+integrovanie racionálnych funkcií} \\ t = x + 1, dt = dx \\ \text{Výsledok}: \frac{2(x+1)^3 - 3(x+1)^2}{6} \ln(x+1) - \frac{4(x+1)^3 - 9(x+1)^2}{36} + C \end{array}\right]$

18. $\int \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) dx$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: per partes} \\ f(x) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right), f\,'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}, g'(x) = 1, g(x) = x \\ \text{Výsledok}: x \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C \end{array}\right]$

4 Štvrtý týždeň

Vypočítajte integrály

1. $\int \frac{-2x+19}{x^2+x-6}dx.$

   Metóda: integrovanie racionálnych funkcií.
   $$\frac{-2x+19}{x^2+x-6} = \frac{3}{x-2} - \frac{5}{x+3}$$
   Výsledok: $\ln \frac{|x-2|^3}{|x+3|^5} + C$

2. $\int \frac{2}{9x^2-1}dx.$

   Metóda: integrovanie racionálnych funkcií.
   $$\frac{2}{(3x+1)(3x-1)} = \frac{1}{3x-1} - \frac{1}{3x+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\frac{1}{x+\frac{1}{3}}$$
   Výsledok: $\frac{1}{3}\ln\left(x-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\ln\left(x+\frac{1}{3}\right) + C$

3. $\int \frac{5x^2-7x+10}{x^3-x^2-4x-6}dx.$

   Metóda: integrovanie racionálnych funkcií.
   $$\frac{5x^2-7x+10}{x^3-x^2-4x-6} = \frac{2}{x-3} + \frac{3x-2}{x^2+2x+2} =$$
   $$= \frac{2}{x-3} + \frac{3}{2}\frac{2x-\frac{4}{3}}{x^2+2x+2} = \frac{2}{x-3} + \frac{3}{2}\frac{2x+2-2-\frac{4}{3}}{x^2+2x+2} =$$
   $$= \frac{2}{x-3} + \frac{3}{2}\frac{2x+2-2-\frac{4}{3}}{x^2+2x+2} = \frac{2}{x-3} + \frac{3}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+2} - 5\frac{1}{(x+1)^2+1}$$
   Výsledok: $2\ln|x-3| + \frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right) - 5\,\mathrm{arctg}\,(x+1) + C$

4. $\int \frac{4x^2+x-13}{2x^3+12x^2+11x+5}dx.$

   Metóda: integrovanie racionálnych funkcií.
   $$\frac{4x^2+x-13}{2x^3+12x^2+11x+5} = \frac{4x^2+x-13}{(x+5)(2x^2+2x+1)} = \frac{2}{x+5} - \frac{3}{2x^2+2x+1} =$$
   $$= \frac{2}{x+5} - \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+x+\frac{1}{2}} = \frac{2}{x+5} - \frac{3}{2}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} = \frac{2}{x+5} - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}}\frac{1}{\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+1} =$$
   $$= \frac{2}{x+5} - 6\frac{1}{(2x+1)^2+1}$$
   Výsledok: $2\ln|x+5| - 3\,\mathrm{arctg}\,(2x+1) + C$

5. $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5}dx.$

   Metóda: integrovanie racionálnych funkcií.
   $$\frac{2x+1}{x^2+2x+5} = \frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{1}{(x+1)^2+4}$$
   Výsledok: $\ln|x^2+2x+5| - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{2} + C$

6. $\int \frac{1}{x^3+1}dx$

   Metóda: integrovanie racionálnych funkcií.
   $$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{x^2-x+1}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x\right)$$
   Výsledok: $\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1) + C.$

7. $\int \frac{x^5+x^4-7x^3+8x-3}{x^3+x^2-6x}dx.$

   Metóda: integrovanie racionálnych funkcií.
   $$\frac{x^5+x^4-7x^3+8x-3}{x^3+x^2-6x} = x^2 - 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x-2)}$$
   Výsledok: $\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2}\ln|x(x-2)| + C$

8. $\int \frac{6x-13}{(4x^2+4x+17)^2}dx.$

   Metóda: integrovanie racionálnych funkcií.
   Výsledok: $-\frac{x+2}{2(4x^2+4x+17)} - \frac{1}{16}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{4} + C$

9. $\int \frac{1}{x^3+1}dx$

   Metóda: integrovanie racionálnych funkcií.
   Výsledok: $\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1) + C.$

10. $\int \frac{x^5+x^4-7x^3+8x-3}{x^3+x^2-6x}dx.$ $\left[\begin{array}{c}\text{Metóda: integrovanie racionálnych funkcií.}\\ \text{Výsledok: } \frac{x^3}{3}-x+\frac{1}{2}\ln|x(x-2)|+C\end{array}\right]$

11. $\int \frac{2x^3-2x^2+4x-4}{x^4+4}dx.$ $\left[\begin{array}{c}\text{Návod: } x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2.\\ \text{Metóda:integrovanie racionálej funkcie.}\\ \text{Výsledok:}\frac{1}{2}\ln\left[\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)\right]-2\operatorname{arctg}(x+1)+C\end{array}\right]$

12. $\int \frac{7-x}{x^3-x^2+3x+5}dx$ $\left[\begin{array}{c}\text{Metóda: integrovanie racionálnych funkcií.}\\ \text{Výsledok:} \ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-2x+5}}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)+C.\end{array}\right]$

13. $\int \frac{\ln\left(1-x+x^2\right)}{x^2}dx$ $\left[\begin{array}{c}\text{Metóda: per partes+integrovanie racionálnych funkcií}\\ f(x)=\ln\left(1-x+x^2\right), f'(x)=\frac{2x-1}{1-x+x^2}, g'(x)=x^{-2}, g(x)=\frac{x^{-1}}{(-1)}\\ \text{Výsledok : } -\frac{1}{x}\ln\left(x^2-x+1\right)-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)+C\end{array}\right.$

14. $\int \sin x\ln(\operatorname{tg}x)\,dx$ $\left[\begin{array}{c}\text{Metóda: per partes+substitúcia}\\ f(x)=\ln(\operatorname{tg}x), f'(x)=\frac{1}{\sin x\cos x}, g'(x)=\sin x, g(x)=-\cos x\\ \text{Výsledok : } -\cos x\ln(\operatorname{tg}x)+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C\end{array}\right]$

15. $\int \arccos x dx.$ $\left[\begin{array}{c}\text{Metóda: per partes + substitúcia}\\ f(x)=\arccos x, f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, g'(x)=1, g(x)=x\\ \text{Výsledok : } x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C\end{array}\right]$

16. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x+5\sin x-6}dx.$ $\left[\begin{array}{c}\text{Metóda: substitučná + integrovanie racionálnych funkcií}\\ t=\sin x, dt=\cos xdx\\ \text{Výsledok : } \frac{1}{7}\ln\frac{1-\sin x}{\sin x+6}\end{array}\right]$

17. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x+\sin x-6}dx.$ $\left[\begin{array}{c}\text{Metóda: substitučná + integrovanie racionálnych funkcií}\\ t=\sin x, dt=\cos xdx, x=0\to\ t=0, x=\frac{\pi}{2}\to t=1\\ \text{Výsledok : } \frac{1}{5}\ln\frac{3}{8}\end{array}\right]$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{6-5\cos x+\cos^2 x}dx.$ $\left[\begin{array}{c}\text{Metóda: substitučná + integrovanie racionálnych funkcií}\\ t=\cos x, dt=-\sin xdx, x=0\to\ t=1, x=\frac{\pi}{2}\to t=0\\ \text{Výsledok : } \ln\frac{4}{3}\end{array}\right]$

19. $\int \frac{e^x(e^x-1)}{e^{2x}+1}dx.$ $\left[\begin{array}{c}\text{Metóda: substitučná + integrovanie racionálnych funkcií}\\ t=e^x, dt=e^xdx\\ \text{Výsledok : } \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)-\operatorname{arctg}(e^x)+C\end{array}\right]$

20. $\int \frac{-2\sin x}{\cos^2 x+2\cos x+5}dx.$ $\left[\begin{array}{c}\text{Metóda: substitučná + integrovanie racionálnych funkcií}\\ t=\cos x, dt=-\sin xdx\\ \text{Výsledok :} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x+1}{2}\right)+C\end{array}\right]$

21. $\int \frac{1}{\sin x}dx.$ $\left[\begin{array}{c}\int\frac{1}{\sin x}dx=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx\\ \text{Metóda: substitučná + integrovanie racionálnych funkcií}\\ t=\cos x, dt=-\sin xdx\\ \text{Výsledok : } \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C\end{array}\right]$

22. $\int \frac{2}{x(\ln x-2)(\ln^2 x-2\ln x+2)}dx.$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: substitučná+integrovanie racionálnych funkcií} \\ t=\ln x, dt=\frac{1}{x}dx, \\ \text{Výsledok}: \ \ln \frac{|\ln x-2|}{\left((\ln x-1)^2+1\right)^{\frac{1}{2}}} - \operatorname{arctg}(\ln x-1)+C \end{array}\right]$

23. $\int \frac{1}{\cos x}dx.$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: substitučná + integrovanie racionálnych funkcií} \\ t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, x=2\operatorname{arctg} t, dx=\frac{2}{1+t^2}dt, \cos t=\frac{1-t^2}{1+t^2}. \\ \text{Výsledok}: \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|+C \end{array}\right]$

24. $\int_1^{64} \frac{2\sqrt{x}}{x\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)}dx.$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: substitučná} \\ t=\sqrt[6]{x}, x=t^6, dx=6t^5dt, x^{\frac{1}{3}}=t^2, x^{\frac{1}{2}}=t^3. \\ \text{Výsledok:} \ \ 12\ln\frac{3}{2} \end{array}\right]$

25. $\int \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}dx.$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: substitučná+ integrovanie racionálnych funkcií} \\ t=\sqrt{x-1}, x=t^2+1, dx=2tdt. \\ \text{Výsledok:} \ \ \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}-x+1+4\sqrt{x-1}-4\ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)+C \end{array}\right]$

26. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}.$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: substitučná+ integrovanie racionálnych funkcií} \\ t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt. \\ \text{Výsledok:} \ \ \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C \end{array}\right]$

27. $\int \sqrt{x^2+4x+3}\,dx.$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: Eulerova substitúcia} \\ \sqrt{x^2+4x+3}=x-t, x=\frac{t^2-3}{2(t+2)}, dx=\frac{2t^2+8t+6}{4(t+2)^2}dt. \\ \text{Výsledok:} \ -\frac{1}{8}\left(x-\sqrt{x^2+4x+3}\right)^2-\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2+4x+3}\right)+ \\ +\frac{1}{2}\ln\left|x-\sqrt{x^2+4x+3}+2\right|+\frac{1}{8\left(x-\sqrt{x^2+4x+3}+2\right)^2}+C \end{array}\right]$

28. $\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}\,dx.$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: Eulerova substitúcia} \\ \sqrt{x^2-x+1}=x+t, x=\frac{1-t^2}{2t+1}, dx=\frac{-2t^2-2t-2}{(2t+1)^2}dt. \\ \text{Výsledok: } 2\ln\left|x-\sqrt{x^2-x+1}\right|-2\ln\left|2\sqrt{x^2-x+1}-2x+1\right|+ \\ +\frac{1}{2\left(\sqrt{x^2-x+1}-2x+1\right)}+C \end{array}\right]$

29. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+\cos x}dx.$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: univerzálna trigonometrická substitúcia+} \\ \text{+integrovanie racionálnej funkcie.} \\ t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, x=2\operatorname{arctg} t, dx=\frac{2}{1+t^2}dt, \cos t=\frac{1-t^2}{1+t^2}. \\ x=\frac{\pi}{3}\rightarrow \ t=\frac{1}{\sqrt{3}}, x=\frac{\pi}{2}\rightarrow \ t=1, \\ \text{Výsledok:}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{6}}\right] \end{array}\right]$

30. $\int \frac{1}{\sin x-\cos x}dx.$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: univerzálna trigonometrická substitúcia+} \\ \text{+integrovanie racionálnej funkcie.} \\ t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, x=2\operatorname{arctg} t, dx=\frac{2}{1+t^2}dt, \\ \cos t=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin t=\frac{2t}{1+t^2}. \\ \text{Výsledok}:\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}\right|+C \end{array}\right]$

31. $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}dx.$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: univerzálna trigonometrická substitúcia+} \\ \text{+integrovanie racionálnej funkcie.} \\ t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, x=2\operatorname{arctg} t, dx=\frac{2}{1+t^2}dt, \\ \cos t=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin t=\frac{2t}{1+t^2}. \\ \text{Výsledok}: \ \operatorname{tg}\frac{x}{2}-\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right)+C \end{array}\right]$

32. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3-2\sin x+\cos x}dx.$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: univerzálna trigonometrická substitúcia+} \\ \text{+integrovanie racionálnej funkcie.} \\ t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, x=2\operatorname{arctg} t, dx=\frac{2}{1+t^2}dt, \\ \cos t=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin t=\frac{2t}{1+t^2}. \\ x=0\rightarrow\ t=0, x=\frac{\pi}{2}\rightarrow\ t=1, \\ \text{Výsledok}: \frac{\pi}{4} \end{array}\right]$

33. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}dx.$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda:trigonometrická substitúcia+integrovanie racionálnej funkcie.} \\ t=\operatorname{tg} x, x=\operatorname{arctg} t, dx=\frac{1}{1+t^2}dt, \\ x=\frac{\pi}{4}\rightarrow\ t=1, x=\frac{\pi}{3}\rightarrow\ t=\sqrt{3}. \\ \text{Výsledok}: \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right]$

34. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx.$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: substitučná + integrovanie racionálnych funkcií} \\ t=e^x-1, dt=e^x dx, x=0\rightarrow\ t=0, x=\ln 5\rightarrow t=4 \\ s=\sqrt{t}, t=s^2, dt=2sds, t=0\rightarrow s=0, t=4\rightarrow s=2 \\ \text{Výsledok}: \ 4-\pi \end{array}\right]$

35. $\int \frac{e^x+10}{e^{2x}-2e^x+5}dx.$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: substitučná+integrovanie racionálnych funkcií} \\ \text{Výsledok}: \ 2x-\ln\left(e^{2x}-2e^x+5\right)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}\right)+C \end{array}\right]$

36. $\int x^2 e^{\sqrt{x}}dx.$ $\left[\begin{array}{c} \text{Metóda: substitúcia + per partes} \\ \text{Výsledok}: \ \left[2\left(\sqrt{x}\right)^5-10x^2+40\left(\sqrt{x}\right)^3-120x+240\sqrt{x}-240\right]e^{\sqrt{x}}+C \end{array}\right]$

5 Piaty týždeň

1. Nájdite modul, hlavnú hodnotu argumentu a zobrazte v komplexnej rovine nasledujúce komplexne čísla:

   (a) $1-\sqrt{3}i$, $\left[2,\ -\frac{\pi}{3}.\right]$

   (b) $-2+2i$, $\left[2\sqrt{2},\ \frac{3\pi}{4}.\right]$

   (c) $-4, [4,\ \pi.]$

   (d) i^5. $\left[1,\ \frac{\pi}{2}\ .\right]$

2. Zapíšte nasledujúce čísla v trigonometrickom a exponenciálnom tvare:

   (a) $1+\sqrt{3}i$, $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right), 2e^{i\frac{\pi}{3}}.\right]$

   (b) $2+2i$, $\left[2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right), 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.\right]$

   (c) -2, $\left[2\left(\cos\pi+i\sin\pi\right), 2e^{i\pi}.\right]$

   (d) $-i^3$. $\left[\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right), e^{i\frac{\pi}{2}}.\right]$

3. Vypočítajte a napíšte v algebrickom tvare:

   (a) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^3$, $[-8.]$

   (b) $\frac{(1-i)^2}{1+i}$. $[-1-i.]$

4. Nájdite všetky korene rovníc a zobrazte ich v komplexnej rovine

   (a) $z^3=i$, $\left[w_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, w_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, w_3=-i.\right]$

   (b) $z^4=-1$, $\left[w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, w_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, w_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i, w_4=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i.\right]$

   (c) $z^4=1-\sqrt{3}i$, $\left[\begin{array}{c} w_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right), w_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right), \\ w_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right), w_4=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right) \\ \text{alebo}\quad w_4=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right). \end{array}\right]$

   (d) $z^4=1, [w_1=1, w_2=i, w_3=-1, w_4=-i.]$

   (e) $z^3=-1$. $\left[w_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, w_2=-1, w_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.\right]$

6 Šiesty týždeň

V úlohách 1 - 5 zistite, aká množina je určená daným vzťahom. Jej obraz načrtnite v komplexnej rovine.

1. $|z - z_0| = r,\ r > 0,\ z_0$ je pevný bod. [Kružnica so stredom z_0 a polomerom r]
2. $|z + i| + |z - i| < 4.$ $\left[\text{Vnútro elipsy } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1\right]$
3. $|z + 2| > 1.$ [Vonkajšok kružnice so stredom $S = (-2; 0)$ a polomerom $r = 1$]
4. $|z - 2| < |z|$. [Polrovina $\operatorname{Re} z > 1$.]
5. $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = 2.$ $\left[z \neq 0,\right.$ kružnica so stredom $S = \left(0, -\frac{1}{4}\right)$ a polomerom $\left. r = \frac{1}{4}\right]$
6. Zistite, či sú nasledujúce množiny oblasti. (Načrtnite ich v komplexnej rovine):
   (a) $|z| < 4$, [áno]
   (b) $1 \leq |z - 1| \leq 3$, [nie]
   (c) $\frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$, [nie]
   (d) $0 < |z - 2| < 3$, [áno]
   (e) $\operatorname{Re} z < 2$. [áno]
7. Nájdite limity postupnosti komplexných čísel $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak
   (a) $z_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n + \frac{n+1}{3n-1} i$, $\left[\sqrt[3]{e} + \frac{1}{3} i\right]$
   (b) $z_n = 2n \sin \frac{1}{n} + \frac{4n+1}{5n-1} i$, $\left[2 + \frac{4}{5} i\right]$
   (c) $z_n = n \operatorname{tg} \frac{1}{2n} + \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n i$, $\left[\frac{1}{2} + i e^4\right]$
8. Zistite, či rady komplexných čísel $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergujú, alebo divergujú
   (a) $z_n = \frac{\sin n + i \cos n}{n^3}$, [absolútne konverguje]
   (b) $z_n = \frac{1}{n(n+1)} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}} i$, [absolútne konverguje]
   (c) $z_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \frac{n}{3^n} i$, $\left[\text{diverguje, návod: rad } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \text{ nespĺňa nutnú podmienku konvergencie}\right]$
9. Vyjadrite reálnu a imaginárnu časť funkcie:
   (a) $f(z) = z^2 - z + 1$,
   $\left[\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 - x + 1, \operatorname{Im} f(z) = 2xy - y\right]$
   (b) $f(z) = \frac{1}{z}$,
   $\left[\operatorname{Re} f(z) = \frac{x}{x^2+y^2}, \operatorname{Im} f(z) = -\frac{y}{x^2+y^2}\right]$

(c) $f(z) = |z| + \operatorname{Re} z$.
$\left[\operatorname{Re} f(z) = \sqrt{x^2+y^2} + x, \operatorname{Im} f(z) = 0\right]$.

V úlohách 10 a 11 nájdite definičný obor funkcie f :

10. $f(z) = \frac{3iz-12z+i}{iz^2+1-i}$. $\left[D(f) = \boldsymbol{C} \setminus \left\{ \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}},\ \sqrt[4]{2}e^{i\frac{9\pi}{8}} \right\}\right]$

11. $f(z) = \frac{\overline{z}}{(z^3-2i)(|z|-3)}$.
$\left[D(f) = \boldsymbol{C} \setminus \left(\{z \in \boldsymbol{C};\ |z| = 3\} \cup \left\{ \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{2}}{2},\ -\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{2}}{2},\ -i\sqrt[3]{2} \right\}\right)\right]$

V úlohách 12 - 14 vypočítajte funkčnú hodnotu funkcie f v čísle z_0 :

12. $f(z) = \frac{\overline{z}}{(z^3-2i)(|z|-3)}$, $z_0 = i$. $\left[-\frac{1}{6}\right]$

13. $f(z) = z + \overline{z}^2 - \operatorname{Re}(z\overline{z}) - \operatorname{Im}(z\overline{z})$, $z_0 = 8 - 6i$. $[-64 + 90i]$

14. $f(z) = \arg z$

   (a) $z_0 = 8 - 6i$. $\left[-\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)\right]$
   (b) $z_0 = -1 + 2i$. $[\pi - \operatorname{arctg} 2]$
   (c) $z_0 = -1 - i$. $\left[-\frac{3\pi}{4}\right]$

V úlohách 15 - 20 vypočítajte limity:

15. $\lim_{z \longrightarrow 2i} \frac{z+3}{z^2+2iz}$. $\left[-\frac{3+2i}{8}\right]$

16. $\lim_{z \longrightarrow i} \frac{z^2-iz+z-i}{3iz^2+3z}$. $\left[-\frac{1+i}{3}\right]$

17. $\lim_{z \longrightarrow 2+i} \frac{3iz-6i+3}{2iz^2-4iz+2z}$. $\left[\frac{6-3i}{10}\right]$

18. $\lim_{z \longrightarrow i} \frac{z^2+(2-i)z-2i}{z^2+1}$. $\left[\frac{1}{2} - i\right]$

19. $\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{z^3}{|z|^2}$. $[0]$

20. $\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{z^2}{|z|^2}$. [Návod:vyjadrite reálnu a imaginárnu časť funkcie, potom ukážte, že limita neexistuje.]

V úlohách 21 - 23 vyšetrite spojitosť funkcie f :

21. $f(z) = \frac{1}{1-z}$. [Spojitá v $\boldsymbol{C} \setminus \{1\}$]

22. $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. [Spojitá v $\boldsymbol{C} \setminus \{-i, i\}$]

23. $f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$. [Spojitá v $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$]

V úlohách 24 - 25 zistite, či je možné dodefinovať funkciu f v bode z_0 tak, aby bola spojitá v tomto bode:

24. $f : \boldsymbol{C} \setminus \{0, 1+i\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{z^3-z^2-iz^2+iz-i+1}{z^2-z-iz}$, $z_0 = 1+i$. $\left[\text{Je možné, ak } f(1+i) = \frac{3}{2}(1+i)\right]$

25. $f : \boldsymbol{C} \setminus \{4+i\} \longrightarrow \boldsymbol{C}$, $f(z) = \frac{z^2-(3+2i)z-6+7i}{z-4-i}$, $z_0 = 4+i$. [Nie je možné, lebo $f \lim_{z \longrightarrow 4+i} f(z) = \infty$]

7 Siedmy týždeň

1. Nájdite obor konvergencie mocninového radu:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$. $[K(0,1) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < 1\}]$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$. [konverguje len v strede $a = 0$]
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$. $[K(0,e) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < e\}]$
   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n-1}}{1+in} z^n$. $[K(0,1) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < 1\}]$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$. $[K(0,2) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < 2\}]$
   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{2n}$. $\left[K\left(0,\sqrt{2}\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < \sqrt{2}\right\}\right]$
   (g) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in)\, z^n$. $\left[K\left(0,\frac{1}{e}\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ |z| < \frac{1}{e}\right\}\right]$
   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{2n}} (z-1+i)^n$.
   $\left[K\left(1-i,\frac{1}{3}\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ |z-1+i| < \frac{1}{3}\right\}\right]$
   (i) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2} (z-2i)^n$.
   $\left[K\left(2i,e^2\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C};\ |z-2i| < e^2\right\}\right]$
   (j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+in}{2^n} (z+i)^n$. $[K(-i,2) = \{\ z \in \boldsymbol{C};\ |z+i| < 2\}]$
   (k) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{5}\right)^n$ $[K(1,5) = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-1| < 5\}]$
   (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2i)^n}{(n+1)(n+3)} (z+3i)^n$,
   $\left[K\left(-3i,\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C} : |z+3i| < \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}\right]$
   (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} \left(\frac{z-1+i}{1-3i}\right)^n$,
   $\left[K\left(1-i,\sqrt{10}\right) = \left\{z \in \boldsymbol{C} : |z-1+i| < \sqrt{10}\right\}\right]$
   (n) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{5}\right)^n$ $[K(1,5) = \{z \in \boldsymbol{C} : |z-1| < 5\}]$

2. Vypočítajte funkčné hodnoty:

   (a) $\ln(-1)$, $[i\pi]$
   (b) $\ln(-i)$, $\left[-\frac{1}{2}i\pi\right]$
   (c) $\ln\left(1-\sqrt{3}i\right)$. $\left[\frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{3}i\pi\right]$
   (d) $\ln(-3)$ $[\ln 3 + i\pi]$
   (e) $\ln(5i)$ $\left[\ln 5 + i\frac{\pi}{2}\right]$
   (f) $\ln(2)$ $[\ln 2]$
   (g) $\ln(e)$ $[1]$
   (h) $\ln(2+2i)$ $\left[\ln\left(\sqrt{8}\right) + i\frac{\pi}{4}\right]$
   (i) $\ln(-2+2i)$ $\left[\ln\left(\sqrt{8}\right) + i\frac{3\pi}{4}\right]$
   (j) $\ln(-2-2i)$ $\left[\ln\left(\sqrt{8}\right) + i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

(k) $\ln(2-2i)$ $\left[\ln\left(\sqrt{8}\right) - i\frac{\pi}{4}\right]$

(l) $\ln(3+4i)$ $\left[\ln 5 + i\,\mathrm{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right]$

(m) $\ln(-3-4i)$ $\left[\ln 5 + i\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) - \pi\right)\right]$

(n) $\ln(3-4i)$ $\left[\ln 5 - i\,\mathrm{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right]$

(o) $\ln(1-i)$ $\left[\frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4}\right]$

(p) $\ln(-\sqrt{3}-i)$ $\left[\ln 2 - i\frac{5\pi}{6}\right]$

(q) $\ln(1-i\sqrt{3})$ $\left[\ln 2 - i\frac{\pi}{3}\right]$

(r) $\ln(-8+15i)$ $\left[\ln 17 + i\left(\pi - \mathrm{arctg}\,\frac{15}{8}\right)\right]$

(s) $\ln\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$ $\left[i\frac{\pi}{4}\right]$

(t) $\ln\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$ $\left[\ln\sqrt{3} + i\frac{\pi}{6}\right]$

3. Nájdite všetky riešenia z rovníc:

(a) $e^z = -1,$ $[\{i\pi\,(1+2k)\,,\, k \in \mathbf{Z}\}]$

(b) $e^z = -i,$ $\left[\left\{i\pi\left(-\frac{1}{2}+2k\right),\, k \in \mathbf{Z}\right\}\right]$

(c) $e^z = 1-\sqrt{3}i.$ $\left[\left\{\frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{3}i\pi + 2k\pi i,\, k \in \mathbf{Z}\right\}\right]$

4. Vypočítajte hodnoty:

(a) $e^{2+i\frac{\pi}{2}},$ $\left[ie^2\right]$

(b) $e^{2+i},$ $\left[e^2\cos 1 + ie^2\sin 1\right]$

(c) $i^i.$ $\left[e^{-\frac{1}{2}\pi}\right]$

(d) $(-3i)^{2i}$ $[e^{\pi}\,[\cos(\ln 9) + i\sin(\ln 9)]]$

(e) i^{1+i} $\left[ie^{-\frac{\pi}{2}}\right]$

(f) $i^{\frac{3}{4}}$ $\left[\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right]$

(g) $(1-i)^{2+i}$ $\left[2e^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)\right) - i\cos\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)\right)\right]$

(h) $(1+i)^{\frac{1}{2}}$ $\left[\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\right]$

(i) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{2-i}$ $\left[4e^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \ln 2\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \ln 2\right)\right)\right]$

5. Vypočítajte hodnoty elementárnych funkcií komplexnej premennej:

(a) $\sin i,$ $[i\sinh 1]$

(b) $\cos(1-i)\,.$ $[\cos 1\cosh 1 + i\sin 1\sinh 1]$

(c) $\sin(2-3i)$
$$\left[\frac{\sin 2\left(e^3+e^{-3}\right)}{2} - i\frac{\cos 2\left(e^3-e^{-3}\right)}{2} = \sin 2\cosh 3 - i\cos 2\sinh 3\right]$$

(d) $\cos i$ $\left[\frac{e^{-1}+e}{2} = \cosh 1\right]$

(e) $\cos(4+i)$ $[\cos 4 \cosh 1 - i \sin 4 \sinh 1]$

(f) $\operatorname{tg}(2-i)$ $\left[\frac{e^2 \sin 4 + i\left(1 - e^2 \cos 4\right)}{e^2 \cos 4 + 1 + i e^2 \sin 4}\right]$

(g) $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - i \ln 2\right)$ $\left[\frac{8+15i}{17}\right]$

8 Ôsmy týždeň

1. Daná je funkcia $f(z) = \frac{iz-1}{iz^2+1+i}$. Nájdite:

   (a) definičný obor; $\left[\boldsymbol{C} \backslash \left\{ \sqrt[4]{2} e^{\frac{3\pi}{8} i}, \ \sqrt[4]{2} e^{\frac{11\pi}{8} i} \right\} \right]$

   (b) vypočítajte f', $f'(i)$ $\left[f'(z) = \frac{z^2+2iz-1+i}{(iz^2+1+i)^2}, \ f'(i) = -4+i \right]$

2. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(z) = \frac{3i}{2i-z}$. $\left[D(f) = \boldsymbol{C} \backslash \{2i\} = D(f'), \ f'(z) = \frac{3i}{(2i-z)^2} \right]$

V úlohách 3. - 8. pre funkciu f
a. zistite, kde existuje derivácia,
b. nájdite f' v bodoch, kde existuje,
c. vyšetrite, kde je f analytická (holomorfná)

3. $f(z) = x^2 + iy^2$. $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f' \text{existuje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : \operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z\}, \\ \text{b. } f'(z) = f'(x+iy) = 2x, \\ \text{c. nie je analytická v žiadnom bode} \end{array} \right]$

4. $f(z) = |z|$. $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f' \text{ neexistuje v žiadnom bode,} \\ \text{b. } f'(z) \nexists, \\ \text{c. nie je analytická v žiadnom bode.} \end{array} \right]$

5. $f(z) = z^3 + z$. $\left[\begin{array}{l} \text{a. } f' \text{ existuje na } \boldsymbol{C}, \\ \text{b. } f'(z) = 3z^2 + 1, \\ \text{c. je analytická na } \boldsymbol{C}. \end{array} \right]$

6. $f(z) = z \operatorname{Re} z$. $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f' \text{ existuje len v bode } z = 0, \\ \text{b. } f'(0) = 0, \\ \text{c. nie je analytická v žiadnom bode} \end{array} \right]$

7. $f(z) = f(x+iy) = (2xy + 2x - 1) + i\left(y^2 - x^2 + 2y\right)$. $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f' \text{ existuje na } \boldsymbol{C}, \\ \text{b. } f'(z) = f'(x+iy) = (2y+2) - i(2x), \\ \text{c. je analytická na } \boldsymbol{C}. \end{array} \right]$

8. $f(z) = (e^x \cos y) - i(e^x \sin y)$. $\left[\begin{array}{c} \text{a. } f' \text{ neexistuje v žiadnom bode,} \\ \text{b. } f'(z) \nexists, \\ \text{c. nie je analytická v žiadnom bode.} \end{array} \right]$

V úlohách 9 - 20 nájdite na $A \subset \boldsymbol{C}$ analytickú (holomorfnú) funkciu $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, ak je daná jej jedna zložka a prípadne funkčná hodnota v jednom bode:

9. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $f(i) = 0$.
   $\left[f(z) = f(x+iy) = \left(x^3 - 3xy^2\right) + i\left(3x^2y - y^3 + 1\right) \right]$

10. $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy,\ f(0) = 0.$

$\left[f(z) = f(x+iy) = \left(x^2 - y^2 + xy\right) + i\left(2xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right)\right]$

11. $v(x,y) = x^2 - y^2 - 3x + 2xy,\ u(2,1) = 0.$

$\left[u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy + 3y - 2\right]$

12. $v(x,y) = 2e^x \sin y,\ f(0) = 1.$

$[f(z) = f(x+iy) = (2e^x \cos y - 1) + i(2e^x \sin y)]$

13. $v(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2\right) + x - 2y.$

$\left[\begin{array}{c} u(x,y) = -2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - y - 2x + k, \text{ alebo} \\ u(x,y) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) - y - 2x + K \end{array}\right]$

14. $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$, pričom $f(0) = 0$. $[f : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C},\ f(z) = ze^z]$

15. $u(x,y) = xy.$

$\left[v : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = -\frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right) + C\right]$

16. $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy.$ $\left[v : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = 2xy - \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right) + C\right]$

17. $u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3.$ $\left[v : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = -2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - y^3 + C.\right]$

18. $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - x.$ $\left[v : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 - y + C\right]$

19. $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$ $\left[v : \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + C\right]$

20. $u(x,y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y.$ $\left[v : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R},\ v(x,y) = ye^x \cos y + xe^x \sin y + C\right]$

9 Deviaty týždeň

Vypočítajte integrály: ($\oplus$ je kladná orientácia, $\ominus$ je záporná orientácia krivky C.)

1. $\int_C z \sin z dz$, C je úsečka od bodu 0 po bod i. $\left[-ie^{-1}\right]$
2. $\int_C \operatorname{Re} z dz$, C je úsečka
   (a) od bodu 0 po bod $1+i$. $\left[\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right]$
   (b) od bodu -1 po bod $1+i$. $[0]$
3. $\int_C (\overline{z})^2 dz$, $C : z(t) = t + i\frac{t}{3}$, $t \in \langle 0, 3\rangle$ orientovaná súhlasne s parametrickým vyjadrením. $\left[\frac{10(3-i)}{3}\right]$
4. $\int_C \frac{1}{z} dz$, C je úsečka od bodu 1 po bod $1+i$. $\left[\ln\left(\sqrt{2}\right) + i\frac{\pi}{4}\right]$
5. $\int_C e^{\overline{z}} dz$, C je lomená krivka, ktorá sa skladá z dvoch úsečiek: prvá so začiatočným bodom 0 a koncovým bodom i, druhá so začiatočným bodom i a koncovým bodom $1+i$. $[1 + (e-2)(\cos 1 - i \sin 1)]$
6. $\int_C \frac{1}{z} dz$, $C : |z| = 2$, $\operatorname{Im} z \leq 0$ od bodu -2 po bod 2. $[i\pi]$
7. $\int_C |z|\, dz$, kde
   (a) $C : |z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu -1 po bod 1. $[2]$
   (b) $C : |z| = 2$, $\operatorname{Re} z \leq 0$ od bodu $-2i$ po bod $2i$. $[8i]$
8. $\int_C \overline{z}\, |z|\, dz$, kde $C : |z| = 1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$ od bodu i po bod $-i$ a úsečka od bodu $-i$ po bod i. $[-i\pi]$
9. $\int_C \operatorname{Re} z dz$, kde $C : |z| = 1$, $\ominus$. $[-i\pi]$
10. $\int_C z \operatorname{Im} z dz$, kde $C : |z| = 2$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu -2 po bod 2. $\left[\frac{16i}{3}\right]$
11. $\int_C \frac{z}{\overline{z}} dz$, kde $C : |z| = 2$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu 2 po bod -2 a úsečka od bodu -2 po bod -1 a $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu -1 po bod 1 a úsečka od bodu 1 po bod 2. $\left[\frac{4}{3}\right]$

   V príkladoch 12 - 16 pomocou Cauchyho integrálnej vety vypočítajte integrály po jednoduchých, po častiach hladkých, uzavretých, kladne orientovaných krivkách:

12. $\int_C \frac{1}{z^2+1} dz$, $C = \left\{ z \in \boldsymbol{C} : (\operatorname{Re} z)^2 + 4 (\operatorname{Im} z)^2 = 1 \right\}$. $[0]$
13. $\int_C \frac{z+4}{z^2+2z+5} dz$, $C : |z| = 1$. $[0]$
14. $\int_C \frac{z^2+5}{z^2+1} dz$, $C = \left\{ z \in \boldsymbol{C} : 4 (\operatorname{Re} z)^2 + 16 (\operatorname{Im} z)^2 = 1 \right\}$. $[0]$

15. $\int_C \frac{e^z+1}{z+i}dz$, $C: |z| = \frac{1}{2}$. [0]

16. $\int_C \frac{z+2}{z^2-2z+2}dz$, $C: |z+1| = 1$. [0]

V príkladoch 17 - 30 pomocou Cauchyho integrálnej vety, alebo Cauchyho integrálnej formuly vypočítajte integrály po jednoduchých, po častiach hladkých, uzavretých, kladne orientovaných krivkách:

13. $\int_C \frac{e^z \cos z}{(1+z^2)\sin z}dz$, $C: |z-2-i| = \sqrt{2}$. [0]

14. $\int_C \frac{\sin z}{z+i}dz$, $C: |z-i| = 1$. [0]

15. $\int_C \frac{1}{(z-2)(z+2i)}dz$, $C: |z| = 1$. [0]

16. $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1}dz$, $C: |z| = \frac{1}{2}$. [0]

17. $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1}dz$, $C: |z| = \frac{3}{2}$. $[18\pi i]$

18. $\int_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$, $C: |z-2i| = \frac{3}{2}$. $\left[\frac{\pi}{e}\right]$

19. $\int_C \frac{z}{z^4-1}dz$, $C: |z-a| = a$, $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 1$. $\left[i\frac{\pi}{2}\right]$

20. $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1}dz$, $C: |z+1| = 1$. $[18\pi i]$

21. $\int_C \frac{e^z+1}{z+i}dz$, $C: |z+i| = 2$. $[2\pi \sin 1 + 2i\pi (1+\cos 1)]$

22. $\int_C \frac{z^2}{(z-4)(z^2+4)}dz$, $C: |z-1+i| = 2$. $\left[-\frac{2\pi}{5} + i\frac{\pi}{5}\right]$

23. $\int_C \frac{\sin z}{z^2+1}dz$, $C: |z+i| = 1$. $[i\pi \sinh 1]$

24. $\int_C \frac{z+2}{z^2-2z+2}dz$,

    (a) $C: |z-1-2i| = 2$. $[\pi(3+i)]$

    (b) $C: |z-1+2i| = 2$. $[\pi(-3+i)]$

25. $\int_C \frac{1}{z^4-1}dz$, $C: |z-1-i| = \sqrt{2}$. $\left[\frac{\pi(-1+i)}{2}\right]$

26. Vypočítajte $\int_C \frac{1}{z^2-i}dz$, ak C je jednoduchá, po častiach hladká, uzavretá, kladne orientovaná krivka, na ktorej neležia korene menovateľa. Vypočítajte všetky možnosti.

$$\left[\begin{array}{c} \text{korene menovateľa: } z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i). \\ \text{a. } z_0 \in IntC,\ z_1 \notin IntC\ \left[\frac{\pi\sqrt{2}}{2}(1+i)\right] \\ \text{b. } z_0 \notin IntC,\ z_1 \in IntC\ \left[-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}(1+i)\right] \\ \text{c. } z_0,\ z_1 \in IntC\ [0] \\ \text{d. } z_0,\ z_1 \notin IntC\ [0] \end{array}\right]$$

10 Desiaty týždeň

V úlohách 1 - 2 pomocou definície nájdite Taylorov rad funkcie f so stredom v bode a a vyšetrite jeho konvergenciu:

1. $f(z) = \sin^2 z$, $a = 0$.

   $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}, \text{ konverguje na } M = \boldsymbol{C}\right]$

2. $f(z) = \ln(iz + 2)$, $a = 1 + 2i$.

   $\left[i\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (z - 1 - 2i)^n, \text{ konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z - 1 - 2i| < 1\}\right]$

   V úlohách 3 - 9 vypočítajte Taylorov rad funkcie f so stredom v bode a a vyšetrite jeho konvergenciu:

3. $f(z) = \frac{z}{z+2}$, $a = 1$.

   $\left[\frac{1}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} (z - 1)^n, \text{ konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z - 1| < 3\}\right]$

4. $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$, $a = 0$.

   $\left[-1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n, \text{ konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z| < 1\}\right]$

5. $f(z) = \frac{z+2}{z^2+5z+4}$, $a = 1$.

   $\left[\begin{array}{c} \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(2 \cdot 5^{-n-1} + 2^{-n-1}\right) (z - 1)^n, \\ \text{konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z - 1| < 2\} \end{array}\right]$

6. $f(z) = \frac{z}{z^2+4z+3}$, $a = 2$.

   $\left[\begin{array}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \left(3 \cdot 5^{-n-1} - 3^{-n-1}\right) (z - 2)^n, \\ \text{konverguje na } M = \{z \in \boldsymbol{C} : |z - 2| < 3\} \end{array}\right]$

7. $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z+5}$, $a = i$.

   $\left[\begin{array}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2-3i}{4} (1 + i)^{-n-1} - \frac{2+3i}{4} (1 - 3i)^{-n-1}\right) (z - i)^n, \\ \text{konverguje na } M = \left\{z \in \boldsymbol{C} : |z - i| < \sqrt{2}\right\} \end{array}\right]$

8. $f(z) = \frac{z^2+i}{z^2+iz+2}$, $a = 1$.

   $\left[\begin{array}{c} \frac{2+i}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3} \left[\frac{(1+i)}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1+4i}{(1+2i)^{n+1}}\right] (z - 1)^n, \\ \text{konverguje na } M = \left\{z \in \boldsymbol{C} : |z - 1| < \sqrt{2}\right\} \end{array}\right]$

9. $f(z) = e^{3z-2}$, $a = 1$. $\left[e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} (z - 1)^n, \text{ konverguje na } M = \boldsymbol{C}\right]$

V úlohách 10 - 29 nájdite Laurentov rad funkcie f so stredom v bode a pre medzikružie $P(a, r, R) = \{z \in \boldsymbol{C} : r < |z - a| < R\}$.

10. $f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}}$, $a = 0$, $P(0, 0, \infty)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{5-n}\right]$

11. $f(z)=\frac{1}{(z-2)^2}$, $a=i$, $P\left(i,\sqrt{5},\infty\right)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(2-i)^n}{(z-i)^{n+2}}\right]$

12. $f(z)=\frac{1}{z(z^2+1)}$, $a=0$, $P(0,0,1)$. $\left[\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n+1}\right]$

13. $f(z)=\frac{1}{z(z^2+1)}$, $a=i$, $P(i,0,1)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1-2^{n+1}}{2(2i)^n}(z-i)^{n-1}\right]$

14. $f(z)=\frac{1}{z(z^2+1)}$, $a=0$, $P(0,1,\infty)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-2n-3}\right]$

15. $f(z)=\frac{1}{z(1-z)}$, $a=0$, $P(0,0,1)$. $\left[\sum_{n=-1}^{\infty}z^n\right]$

16. $f(z)=\frac{z+1}{z(z-1)}$, $a=1$, $P(1,0,1)$. $\left[2(z-1)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n\right]$

17. $f(z)=\frac{1}{z^2+iz+2}$, $a=-2i$, $P(-2i,3,\infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-1}(3i)^{-n-1}(z+2i)^{n-1}\right]$

18. $f(z)=\frac{1}{z^2-3iz-2}$, $a=2i$, $P(2i,1,\infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{-n-1}i^{-n-1}(z-2i)^{n-1}\right]$

19. $f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$, $a=1$, $P(1,0,1)$. $\left[(-1)\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n\right]$

20. $f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$, $a=1$, $P(1,1,\infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-2}(z-1)^n\right]$

21. $f(z)=\frac{5z+11}{z^2+4z+3}$, $a=-1$, $P(-1,0,2)$. $\left[3(z+1)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n}(z+1)^n\right]$

22. $f(z)=\frac{5z+11}{z^2+4z+3}$, $a=-1$, $P(-1,2,\infty)$. $\left[5(z+1)^{-1}+\sum_{n=-\infty}^{-2}(-1)^{n+1}2^{-n}(z+1)^n\right]$

23. $f(z)=\frac{5z+11}{z^2+4z+3}$, $a=-3$, $P(-3,0,2)$. $\left[2(z+3)^{-1}-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}(z+3)^n\right]$

24. $f(z)=\frac{5z+11}{z^2+4z+3}$, $a=-3$, $P(-3,2,\infty)$. $\left[2(z+3)^{-1}+3\sum_{n=-\infty}^{0}2^{-n}(z+3)^n\right]$

25. $f(z)=\frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$, $a=0$, $P(0,1,2)$. $\left[\left(-\frac{1}{12}\right)\sum_{n=0}^{\infty}4^{-n}z^{2n+1}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}z^{-2n-1}\right]$

26. $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $a=2$, $P\left(2,0,\sqrt{5}\right)$. $\left[(z-2)^{-1}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2+i)^{n+1}-(2-i)^{n+1}}{5^{n+1}}(z-2)^n\right]$

27. $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $a=0$, $P(0,1,2)$. $\left[2\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n z^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}z^n\right]$

28. $f(z)=z^2\sin\left(\frac{\pi z+1}{z}\right)$, $a=0$, $P(0,0,\infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{1-n}}{(1-2n)!}z^{2n+1}-z\right]$

29. $f(z)=2^z+2^{\frac{1}{z}}-1$, $a=0$, $P(0,0,\infty)$. $\left[\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{(\ln 2)^n(-n)!}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n}{n!}z^n\right]$

11 Jedenásty týždeň

V príkladoch 1 - 13 zistite druh izolovaných singulárnych bodov funkcie f a určte rezíduum funkcie f v týchto bodoch:

1. $f(z) = \frac{z^2}{z+3}$. $[z = -3$, pól 1. stupňa $res_{z=-3}[f(z)] = 9]$
2. $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+4)}$. $\left[\begin{array}{c} z = 2i, \text{ pól 1. stupňa } res_{z=2i}[f(z)] = \frac{-\sin 2 + i\cos 2}{16} \\ z = -2i, \text{ pól 1. stupňa } res_{z=-2i}[f(z)] = \frac{-\sin 2 - i\cos 2}{16} \\ z = 0, \text{ pól 2. stupňa } res_{z=0}[f(z)] = \frac{1}{4} \end{array}\right]$
3. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$. $\left[\begin{array}{c} z = i, \text{ pól 3. stupňa } res_{z=i}[f(z)] = -\frac{3i}{16} \\ z = -i, \text{ pól 3. stupňa } res_{z=-i}[f(z)] = \frac{3i}{16} \end{array}\right]$
4. $f(z) = \frac{z^3+z^2+2}{z(z^2-1)^2}$. $\left[\begin{array}{c} z = 1, \text{ pól 2. stupňa } res_{z=1}[f(z)] = -\frac{3}{4} \\ z = -1, \text{ pól 2. stupňa } res_{z=-1}[f(z)] = -\frac{5}{4} \\ z = 0, \text{ pól 1. stupňa } res_{z=0}[f(z)] = 2 \end{array}\right]$
5. $f(z) = \frac{z+3}{(z-2)^2(z+2i)}$. $\left[\begin{array}{c} z = 2, \text{ pól 2. stupňa } res_{z=2}[f(z)] = \frac{2+3i}{8} \\ z = -2i, \text{ pól 1. stupňa } res_{z=-2i}[f(z)] = \frac{-2-3i}{8} \end{array}\right]$
6. $f(z) = \frac{4+z^2-2z\sin z}{z^3}$. $[z = 0$, pól 3. stupňa $res_{z=0}[f(z)] = -1]$
7. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$. $[z = 0$, pól 1. stupňa $res_{z=0}[f(z)] = 1]$
8. $f(z) = z^3 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$. $[z = 0$, podstatne singulárny bod $res_{z=0}[f(z)] = a_{-1} = 0]$
9. $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z+1}\right)$. $[z = -1$, podstatne singulárny bod $res_{z=-1}[f(z)] = a_{-1} = -1]$
10. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. $[z = 0$, odstrániteľný singulárny bod $res_{z=0}[f(z)] = 0]$
11. $f(z) = z^2\left(e^{\frac{1}{z}} - 2\right)$. $\left[z = 0\right.$, podstatne singulárny bod $\left.res_{z=0}[f(z)] = a_{-1} = \frac{1}{6}\right]$
12. $f(z) = z^2 \cos\left(\frac{z+1}{z}\right)$. $\left[z = 0\right.$, podstatne singulárny bod $\left.res_{z=0}[f(z)] = a_{-1} = \frac{1}{6}\sin 1\right]$
13. $f(z) = \operatorname{tg} z$. $\left[z = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}\right.$, pól 1. stupňa $\left.res_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi}[f(z)] = -1\right]$

12 Dvanásty týždeň

V príkladoch 1 - 13 pomocou Cauchyho vety o rezíduách vypočítajte integrály po jednoduchých, po častiach hladkých, uzavretých orientovaných krivkách C, kde $\oplus$ je kladná orientácia, $\ominus$ je záporná orientácia krivky C.

1. $\int_C \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}dz$, kde $C : |z-1-i| = 2$, $\oplus$. $\left[-\frac{\pi i}{2}\right]$
2. $\int_C \frac{z+3}{(z-2)^2(z+2i)}dz$, kde $C : |z| = 3$, $\ominus$. $[0]$
3. $\int_C \frac{z^3+1}{z(z-1)^3}dz$, kde $C : |z| = 2$, $\oplus$. $[2\pi i]$
4. $\int_C \frac{1}{z^4+1}dz$, kde $C : \{z(t) = (1+\cos t) + i \sin t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$, $\ominus$. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2} i\pi\right]$
5. $\int_C \frac{1-\cos z}{z^3}dz$, kde $C : |z| = 1$, $\oplus$. $[\pi i]$
6. $\int_C z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$, kde $C : |z| = \frac{1}{2}$, $\oplus$. $\left[\frac{\pi i}{3}\right]$
7. $\int_C \frac{\cos z}{z}dz$, kde $C : |z| = 1$, $\ominus$. $[-2\pi i]$
8. $\int_C z^3 \cos\left(\frac{1}{z-2}\right) dz$, kde $C : |z-2| = 3$, $\oplus$. $\left[2\pi i\left(\frac{1}{4!} - 6\right)\right]$
9. $\int_C \sin^2\left(\frac{1}{z}\right) dz$, kde $C : |z| = 1$, $\ominus$. $[2\pi i]$
10. $\int_C (z-1)^2 \sin\left(\frac{1}{z-2}\right) dz$, kde $C : |z| = 3$, $\ominus$. $\left[-\frac{5\pi i}{3}\right]$
11. $\int_C \cos\left(\frac{z}{z+i}\right) dz$, kde $C : |z+i| = \frac{1}{2}$, $\oplus$. $[-2\pi \sin 1]$
12. $\int_C \operatorname{tg} z dz$, kde $C : \left|z - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $\ominus$. $[2\pi i]$
13. $\int_C \left(\frac{1}{z^2-9} - \cos\left(\frac{z}{z-3}\right)\right) dz$, kde $C : |z-3| = 1$, $\oplus$. $\left[2\pi i\left(\frac{1}{6} + 3\sin 1\right)\right]$