A... skupina

1(a) Kedy funkciu $f \subseteq R^n \times R$ nazývame diferencovateľnou vo vnútornom bode $\bar{a}$ oboru definície $D(f)$? (2,5 bodu)

Nech $\bar{a}$ je vnútorný bod $D(f)$ funkcie $f \subseteq R^n \times R$. f nazývame diferencovateľnou v bode $\bar{a}$ ak existujú $\left[\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_k}\right]_{\bar{x}=a}$ pre $k = 1, 2, \dots, n$ a existujú funkcie $\varepsilon_k \subseteq R^n \times R$ také že $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} \varepsilon_k(\bar{x}) = \varepsilon_k(\bar{a}) = 0$ (t.j. spojité v $\bar{a}$) ďalej, že platí pre každé $\bar{x} \in O_\delta(\bar{a})$:

$$f(\bar{x}) - f(\bar{a}) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_k}\right]_{\bar{x}=\bar{a}} (x_k - a_k) + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(\bar{x})(x_k - a_k)$$

(b) Aká je nutná a postačujúca podmienka k diferencovateľnosti funkcie $f \subseteq R^n \times R$ vo vnútornom bode $\bar{a} \in D(f)$?

f je diferencovateľná vo vnútornom bode $a \in D(f)$ vtedy a len vtedy ak

$$\lim_{x \to a} \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{a}) - Df_{\bar{a}}(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} = 0$$

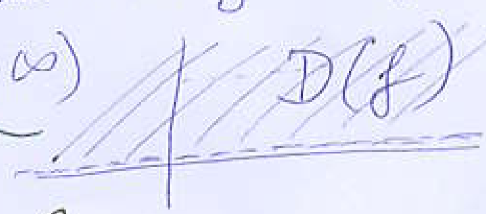
(2,5 bodu).

A (2) Pre funkciu $f(x,y)=(x-2)\ln y$ nájdite:

spolu 15 (a) obor definície $D(f)$ (nakreslite)

funkcia je definovaná pre všetky $x \in R$, $y>0$ 1b

t.j. $D(f)=(-\infty,\infty)\times(0,\infty)$ 1b



(b) stacionárne body f:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=\ln y = 0 \Leftrightarrow y=1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=(x-2)\cdot\dfrac{1}{y} = 0 \Leftrightarrow x=2 \text{ (a zároveň } y\neq 0) \end{cases}$$ 1b

jediný stac. bod je $(2,1)=\bar{a}$ 2b

(c) lokálne extrémy f:

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\dfrac{x-2}{y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\dfrac{1}{y}$ 2b

$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x^2}\right]_{\bar{a}}=0$, $\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=2\\y=1}}=0$, $\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right]_{\substack{x=2\\y=1}}=1$

$H_f(2,1)=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1<0 \Rightarrow f$ má v $(2,1)$

sedlový bod $\Rightarrow$ nemá lokálne extrémy. 2b

(d) dotyková rovina ku grafu f

v bode $\bar{b}=(1,1,?)$

$z=(x-2)\ln y \Rightarrow f(1,1)=-1\cdot\underbrace{\ln 1}_{0}=0 \Rightarrow \bar{b}=(1,1,0)$ 1b

$g(x,y,z)=(x-2)\ln y - z \Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial x}=\ln y$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}=\dfrac{x-2}{y}$,

$\dfrac{\partial g}{\partial z}=-1$, $\nabla g(\bar{b})=(0,-1,-1)$, $\nabla g(\bar{b})\cdot(\bar{x}-\bar{b})=0$

$\rho \equiv 0.(x-1)-1\cdot(y-1)-1.(z-0)=0 \Rightarrow -y+1-z=0$

$\rho \equiv y+z-1=0$ 3b