1. Vypočítajte limitu alebo ukážte, že neexistuje:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^3+y}$$

Riešenie: Ukážeme, že limita neexistuje.

Urobme zúženie na priamku $x = 0$, tj. parametricky: $x = x(t) = 0$, $y = y(t) = t$. Aby $(x, y) \to (0, 0)$ pozdĺž priamky, tak $t \to 0$ a vypočítajme limitu:

$$\lim_{t\to 0} \frac{0}{0+t} = 0$$

Urobme ďalej zúženie na krivku $x = x(y) = \sqrt[3]{y^3 - y}$, parametricky: $x = x(t) = \sqrt[3]{t^3 - t}$, $y = y(t) = t$. Aby $(x, y) \to (0, 0)$ pozdĺž krivky, tak $t \to 0$ a vypočítajme limitu:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2\sqrt[3]{t^3-t}}{t^3-t+t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{t^3-t}}{t} = \lim_{t\to 0} \sqrt[3]{\frac{t^3-t}{t^3}} = \lim_{t\to 0} \sqrt[3]{1-\frac{1}{t^2}} = -\infty$$

Aby limita mohla v danom bode existovať, tak pre všetky zúženia musíme dostať rovnaké číslo, čo pre nami zvolené zúženia nie je pravda a preto táto limita neexistuje.

2. Vypočítajte limitu alebo ukážte, že neexistuje:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$$

Riešenie: Ukážeme, že limita neexistuje.

Urobme zúženie na priamku $y = 0$, tj. parametricky: $x = x(t) = t$, $y = y(t) = 0$. Aby $(x, y) \to (0, 0)$ pozdĺž priamky, tak $t \to 0$ a vypočítajme limitu:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^3}{t^2} = \lim_{t\to 0} t = 0$$

Urobme ďalej zúženie na krivku $y = y(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$, kde $x \le 0$, tj. parametricky: $x = x(t) = t$, $y = y(t) = \sqrt{t^2 - t^3}$, $t \le 0$. Aby $(x, y) \to (0, 0)$ pozdĺž krivky, tak $t \to 0-$ a vypočítajme limitu:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0-} \frac{t^3-\left(\sqrt{t^2-t^3}\right)^3}{t^2-(t^2-t^3)} &= \lim_{t\to 0-} \frac{t^3-\left(\sqrt{t^2(1-t)}\right)^3}{t^2-t^2+t^3} = \lim_{t\to 0-} \frac{t^3-\left(|t|\sqrt{1-t}\right)^3}{t^3} = \\ &= \lim_{t\to 0-} \frac{t^3-|t|^3(1-t)^{\frac{3}{2}}}{t^3} = \lim_{t\to 0-} \frac{t^3+t^3(1-t)^{\frac{3}{2}}}{t^3} = \\ &= \lim_{t\to 0-} 1+(1-t)^{\frac{3}{2}} = 2\end{aligned}$$

Aby limita mohla v danom bode existovať, tak pre všetky zúženia musíme dostať rovnaké číslo, čo pre nami zvolené zúženia nie je pravda a preto táto limita neexistuje.

3. Vypočítajte limitu alebo ukážte, že neexistuje:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$$

Riešenie: Ukážeme, že limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4} = 0. \tag{1}$$

Pre každé $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ platí:

$$\frac{2e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} \geq \frac{e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4} \geq 0,$$

pričom prvá nerovnosť vyplýva z toho, že $x^4+y^4 \geq \frac{(x^2+y^2)^2}{2}$ pre každé $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Využijúc potom:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} &= |u = x^2+y^2| = \lim_{u\to 0+} \frac{2e^{-u^{-1}}}{u^2} = \lim_{u\to 0+} \frac{2u^{-2}}{e^{u^{-1}}} = \\
&= L'H = \lim_{u\to 0+} \frac{-4u^{-3}}{-u^{-2}e^{-u^{-1}}} = \lim_{u\to 0+} \frac{4u^{-1}}{e^{u^{-1}}} = L'H = \\
&= \lim_{u\to 0+} \frac{-4u^{-2}}{-u^{-2}e^{u^{-1}}} = \lim_{u\to 0+} \frac{4}{e^{u^{-1}}} = 0
\end{aligned}$$

dostávame z "vety o dvoch policajtoch" tvrdenie (1).

4. Vypočítajte limitu alebo ukážte, že neexistuje:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Riešenie: Ukážeme, že limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0. \tag{2}$$

Upravme najprv limitu nasledujúcim spôsobom:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{xy}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{3}$$

Limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{xy}$ vyriešme s využitím substitúcie:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = |u = xy| = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1. \tag{4}$$

Venujme sa teraz limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Pre každé $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ platí:

$$x^2+y^2 \geq 2|xy|.$$

Z toho vyplýva, že:

$$-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \leq \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

pre každé $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \neq (0,0)$.

Pretože

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = 0,$$

tak z "vety o dvoch policajtoch" dostávame

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0. \tag{5}$$

Dosadením (4) a (5) do (3), dostávame tvrdenie (2).

5. Vyšetrite existenciu parciálnych derivácií a diferencovatenosť funkcie f v bode $(0,0)$, ak $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Riešenie:

Ukážeme, že parciálne derivácie podľa x, ani podľa y v bode $(0,0)$ neexistujú:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{pre } x\to 0+; \\ -1, & \text{pre } x\to 0-; \end{cases}$$

podobne

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{y^2}}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{|y|}{y} = \begin{cases} 1, & \text{pre } y\to 0+; \\ -1, & \text{pre } y\to 0-. \end{cases}$$

Keďže nie je splnená nutná podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode (existencia parciálnych derivácií podľa všetkých premenných), tak funkcia nie je v bode $(0,0)$ diferencovateľná.

6. Napíšte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $x=y=z$ a určte množinu $M\subset\mathbb{R}^3$ bodov $A=(a,f(a))$, kde $a=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$, v ktorých sa dotýka grafu funkcie.

Riešenie:

Priamku $x=y=z$ je možné parametricky vyjadriť ako:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ kde } t\in\mathbb{R}.$$

V ľubovoľnom bode (a_1,a_2) z $D(f)$ možno počítať smerovú deriváciu v smere $\vec{u}=(1,1)$ (prvé dve súradnice smerového vektora priamky) určenom priamkou $x=y=z$. Keďže smer $\vec{u}=(1,1)$ nie je jednotkový, treba ho normalizovať na smer $\vec{e}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Hodnota smerovej derivácie tejto funkcie v bode (a_1,a_2) v smere $\vec{e}$ bude určená ako skalárny súčin gradientu funkcie f v bode (a_1,a_2) a smerového vektora $\vec{e}$. Ľahko možno vypočítať, že

$$\nabla f(a_1,a_2) = \left(\frac{-a_1}{(a_1^2+a_2^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-a_2}{(a_1^2+a_2^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

a preto

$$\frac{df(a_1,a_2)}{d\vec{e}} = \left(\nabla f(a_1,a_2)\right)^T\vec{e} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{a_1+a_2}{(a_1^2+a_2^2)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Smerová derivácia funkcie f v bode (a_1,a_2) určuje smernicu dotyčnice ku grafu funkcie v danom smere. Pretože však má byť táto dotyčnica rovnobežná s priamkou $x=y=z$, ktorej smerový vektor je $(1,1,1)$, tak musí platiť

$$\frac{a_1+a_2}{(a_1^2+a_2^2)^{\frac{3}{2}}} = -1 \tag{6}$$

a parametrické vyjadrenie dotyčnice bude:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ f(a_1,a_2) \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \text{ kde } s\in\mathbb{R},$$

resp.:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ f(a_1, a_2) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ kde } t = \frac{s}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}.$$

Vzhľadom k (6) potom hľadaná množina $M \subset \mathbb{R}^3$ bude taká, že $M = \{A \in \mathbb{R}^3; A = (a, f(a))\}$, kde body $a = (a_1, a_2)$ ležia na krivke $\frac{-a_1 - a_2}{\sqrt{({a_1}^2 + {a_2}^2)^3}} = 1$.