1. Vyšetrite stacionárne body a lokálne extrémy funkcie
$f(x,y) = x^4 + y^4 + 4(x^3 - y^3) + 5(x^2 + y^2) + 4(x - y) - 2xy + 2$.

Riešenie:

Upravme predpis funkcie:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 + y^4 + 4(x^3 - y^3) + 5(x^2 + y^2) + 4(x - y) - 2xy + 2 \\ &= x^4 + y^4 + 4(x^3 - y^3) + 6(x^2 + y^2) + 4(x - y) - x^2 - 2xy - y^2 + 1 + 1 \\ &= (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) + (y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1) - (x^2 + 2xy + y^2) \\ &= (x+1)^4 + (y-1)^4 - (x+y)^2 \end{aligned}$$

Vypočítajme parciálne derivácie takto upravenej funkcie:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 4(x+1)^3 - 2(x+y)$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4(y-1)^3 - 2(x+y)$$

a postavme ich rovné nule:

$$4(x+1)^3 - 2(x+y) = 0 \quad (1)$$
$$4(y-1)^3 - 2(x+y) = 0 \quad (2)$$

Ich odčítaním dostaneme:

$$\begin{aligned} 4(x+1)^3 - 4(y-1)^3 &= 0 \\ (x+1)^3 &= (y-1)^3 \\ x+1 &= y-1 \\ y &= x+2 \quad (3) \end{aligned}$$

Dosadením (3) do (1) získame:

$$4(x+1)^3 - 4(x+1) = 0 \quad (4)$$

Rovnica (4) má tri riešenia: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$. K nim zodpovedajúce hodnoty y dostaneme z (3): $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 0$. Takže sme získali tri stacionárne body: $A = (-1,1)$, $B = (0,2)$ a $C = (-2,0)$.

Vypočítajme teraz druhé parciálne derivácie:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 12(x+1)^2 - 2$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = -2$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 12(y-1)^2 - 2$$

Hessova matica druhých parciálnych derivácii vyzerá teda takto:

$$\begin{pmatrix} 12(x+1)^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12(y-1)^2 - 2 \end{pmatrix}$$

Špeciálne v bode $A = (-1,1)$ to bude:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

V bode $B = (0, 2)$ a v bode $C = (-2, 0)$ bude rovnaká:

$$\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Z Hessovej matici v bode A nevieme určiť, či má funkcia v bode A extrém alebo nie, ale z Hessovej matice v bodoch B a C vyplýva, že funkcia f má v bode B i v bode C ostré lokálne minimum (Hessova matica je kladne definitná: $\Delta_1 = 10 > 0$, $\Delta_2 = 10^2 - (-2)^2 = 96 > 0$). Hodnoty miním: $f(B) = -2 = f(C)$.

To, že bod A je sedlový bod vyplýva z toho, že funkčné hodnoty v bodoch z ľubovoľne malého okolia bodu A sú väčšie, ale i menšie než funkčná hodnota v bode A. Ukážeme.

Funkčná hodnota v bode A je rovná 0. Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľne malé, potom v bodoch $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$ je $f(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon) = \varepsilon^4 + (-\varepsilon)^4 - (-1+\varepsilon+1-\varepsilon)^2 = 2\varepsilon^4 > 0$, kým v bodoch $(-1, 1+\varepsilon)$ bude $f(-1, 1+\varepsilon) = 0^4 + \varepsilon^4 - \varepsilon^2 = \varepsilon^2(\varepsilon^2 - 1) < 0$.

2. Vyšetrite stacionárne body a lokálne extrémy funkcie
$f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$.

Riešenie:

Vypočítajme parciálne derivácie funkcie:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}$$

a postavme ich rovné nule:

$$y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} = 0 \tag{5}$$
$$x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} = 0 \tag{6}$$

Prvej rovnici (5) vyhovuje $y = 0$. Dosadením $y = 0$ do (6) dostaneme:

$$x \ln x^2 = 0, \tag{7}$$

čomu vyhovuje $x = 1$ alebo $x = -1$. (Uvedomme si, že vziať $x = 0$ nemôžeme, pretože 0 nepatrí definičnému oboru funkcie $\ln x^2$.) Stacionárne body označme $A = (1, 0)$, $B = (-1, 0)$.

Podobne druhej rovnici (6) vyhovuje $x = 0$. Dosadením $x = 0$ do (5) získame:

$$y \ln y^2 = 0, \tag{8}$$

čomu vyhovuje $y = 1$ alebo $y = -1$. Tieto dva stacionárne body označme $C = (0, 1)$, $D = (0, -1)$.

Body A, B, C, D však nie sú všetky stacionárne body. Ďalšie stacionárne body získame predelením (5) y a predelením (6) x, predpokladajúc $x \neq 0$, $y \neq 0$. Dostaneme:

$$\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} = 0 \tag{9}$$
$$\ln(x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} = 0 \tag{10}$$

Ich odčítaním získame:

$$\frac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=0, \tag{11}$$

čo je pravda v prípade, že $x^2=y^2$, tj. keď $y=x$ alebo $y=-x$.

Dosaďme $x^2=y^2$ do (9), potom:

$$0=\ln(2x^2)+\frac{2x^2}{2x^2}=\ln x^2+\ln 2+1 \tag{12}$$

a teda:

$$\begin{aligned}
\ln x^2 &= -1-\ln 2\\
\ln x^2 &= -\ln(2\mathrm{e})\\
\ln x^2 &= \ln(2\mathrm{e})^{-1}\\
x^2 &= \frac{1}{2\mathrm{e}}\\
x &= \pm\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}
\end{aligned}$$

To spolu s rovnosťami $y=x$, resp. $y=-x$, poskytuje ďalšie štyri stacionárne body: $E=\left(\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right)$, $F=\left(\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\frac{-1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right)$, $G=\left(\frac{-1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right)$, $H=\left(\frac{-1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\frac{-1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right)$.

Vypočítajme druhé parciálne derivácie funkcie f:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} &= \frac{2x^3y+6xy^3}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} &= \ln(x^2+y^2)+2\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2}\\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} &= \frac{6x^3y+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

Hessova matica v bodoch A, B, C, D je rovnaká, konkrétne:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

Keďže jej determinant (Hessián) je záporné číslo, tak body A, B, C, D sú sedlové body.

Hessova matica v bodoch E a H je tiež rovnaká:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

Je kladne definitná: $\Delta_1=2>0$, $\Delta_2=2^2=4>0$, a preto funkcia f dosahuje v bodoch E a H ostré lokálne minimum s hodnotou $f(E)=\frac{-1}{2\mathrm{e}}=f(H)$.

Hessova matica v bodoch F a G je taktiež rovnaká:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

Je záporne definitná: $\Delta_1=-2<0$, $\Delta_2=(-2)^2=4>0$, a preto funkcia f dosahuje v bodoch F a G ostré lokálne maximum s hodnotou $f(F)=\frac{1}{2\mathrm{e}}=f(G)$.

3. Vyšetrite absolútne (globálne) extrémy funkcie f na kompaktnej množine $M\subset\mathbb{R}^2$, ak $f(x,y)=9x^2+4y^2+4y-16$; $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\frac{x^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}\le 1\}$.

Riešenie:

Funkcia f je spojitá. Vyšetriť extrémy spojitej funkcie na kompaktnej množine znamená vyšetriť extrémy vnútri množiny a na hranici množiny. V tomto prípade je hranicou množiny elipsa so stredom v bode $(0,1)$, s dĺžkou hlavnej poloosi 2 a s dĺžkou vedľajšej poloosi rovnou 3. Jej stredová rovnica je:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1. \tag{13}$$

Pri vyšetrovaní extrémov vnútri množiny M postupujeme rovnako, ako pri hľadaní lokálnych extrémov funkcie, musíme sa však uistiť, že nájdené lokálne extrémy skutočne ležia v množine. Tie, ktoré neležia, neberieme v úvahu.

Vypočítajme parciálne derivácie tejto funkcie:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 18x$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 8y + 4$$

a postavme ich rovné nule. Jediné riešenie, ktoré vyhovuje tejto sústave je bod $A = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$. Bod A leží vnútri množiny M, pretože

$$\frac{0^2}{4} + \frac{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2}{9} = \frac{1}{4} \leq 1.$$

Dá sa ukázať, že bod A je skutočne bodom ostrého lokálneho minima funkcie f. Pretože však úlohou je nájsť absolútne (globálne) extrémy spojitej funkcie f na kompaktnej množine M, ktoré vďaka spojitosti funkcie f a kompaktnosti M určite existujú, tak nie je potrebné zisťovať, či sa v stacionárnom bode extrém skutočne nachádza alebo nie a jediné, čo treba vypočítať, je funkčná hodnota v tomto bode: $f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -17$.

Pri hľadaní extrémov funkcie f na hranici množiny M sa musíme obmedziť na väzbu (13). Každý bod (x,y) ležiaci na (13) bude spĺňať $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} - 1 = 0$.

Upravme predpis funkcie f:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 9x^2 + 4y^2 + 4y - 16 \\
&= 9x^2 + 4y^2 - 8y + 4 - 36 + 12y + 16 \\
&= 9x^2 + 4(y^2 - 2y + 1) - 36 + 12y + 16 \\
&= 9x^2 + 4(y-1)^2 - 36 + 12y + 16 \\
&= 36\left(\frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} - 1\right) + 12y + 16
\end{aligned}$$

Tzn. pre všetky body ležiace na (13) je funkcia $f(x,y) = 0 + 12y + 16 = 12y + 16$ a je vlastne linárnou funkciou jednej premennej y, kde $y \in \langle -2, 4 \rangle$. Vzhľadom k tomu dosahuje svoju najmenšiu hodnotu pre $y = -2$ ($x = 0$, pretože (x,y) musí ležať na (13)) a najväčšiu pre $y = 4$ ($x = 0$), konkrétne $f(0,-2) = -24 + 16 = -8$, resp. $f(0,4) = 48 + 16 = 64$.

Celkovo teda pre všetky $(x,y) \in M$ máme

$$-17 = f\left(0, -\frac{1}{2}\right) \leq f(x,y) \leq f(0,4) = 64.$$

Absolútne minimum funkcie f na množine M je -16 a dosahuje sa v bode $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, kým absolútne maximum funkcie f na množine M je 64 a dosahuje sa v bode $(0,4)$.