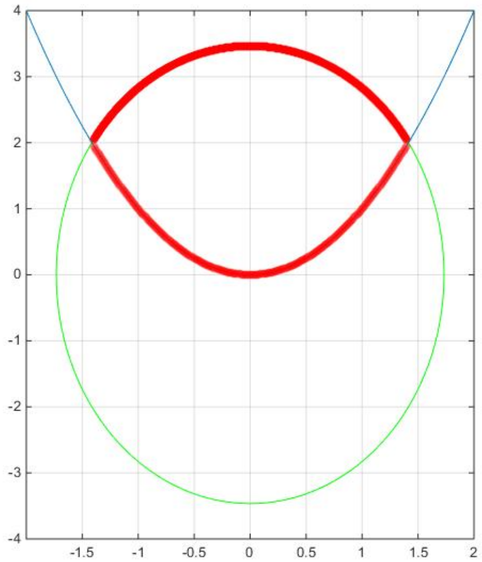
1. Vypočítajte integrál:

$$\iint_M |x|dxdy, \text{ ak } M \text{ je ohraničená krivkami: } y = x^2,\ 4x^2 + y^2 = 12 \text{ a } y \geq 0.$$

Riešenie:



Obr. 1: Červenou - zvýraznené hranice oblasti M, zelenou - elipsa, modrou - parabola.

Na obrázku 1 je znázornená oblasť M, na ktorej budeme integrovať. Z obrázka, ale aj analyticky, je ľahké zistiť, aké sú hranice pre y. Platí:

$$x^2 \leq y \leq \sqrt{12 - 4x^2}.$$

Za účelom zistenia hraníc pre premennú x, je potrebné nájsť priesečníky kriviek. Vyriešme teda sústavu dvoch rovníc:

$$\begin{aligned} y &= x^2, & (1) \\ 12 &= 4x^2 + y^2. & (2) \end{aligned}$$

Dosadením (1) do (2) dostaneme kvadratickú rovnicu:

$$y^2 + 4y - 12 = 0,$$

ktorá má dva reálne korene $y_1 = 2$ a $y_2 = -6$. Nás zaujíma iba kladný koreň y_1. Dosadením y_1 za y v (1) dostaneme hľadané hranice pre x. Popíšme teda oblasť M pomocou získaných údajov:

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} \leq & \quad x \quad \leq \sqrt{2}, & (3) \\ x^2 \leq & \quad y \quad \leq 2\sqrt{3 - x^2}. & (4) \end{aligned}$$

Môžeme ísť integrovať:

$$\iint_M |x|dxdy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{2\sqrt{3-x^2}} |x|dydx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} |x| \left[\ y\ \right]_{x^2}^{2\sqrt{3-x^2}} dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} |x| \left(2\sqrt{3 - x^2} - x^2\right) dx = \left[\ |x|\left(2\sqrt{3 - x^2} - x^2\right) \text{ je párna funkcia (overte) } \right] =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} x(2\sqrt{3 - x^2} - x^2)dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} 2x\sqrt{3 - x^2} - x^3 dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} 2x\sqrt{3 - x^2}dx -$$

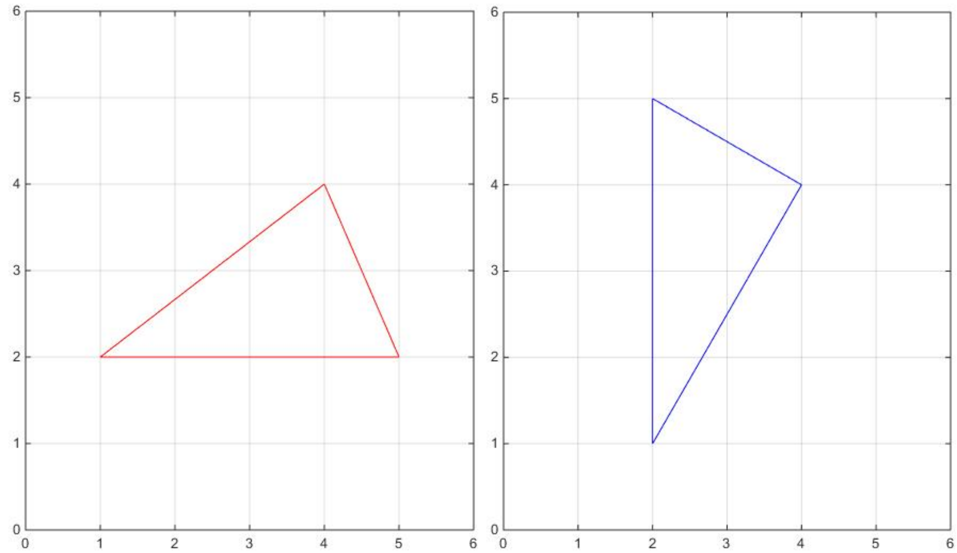
$$2\int_0^{\sqrt{2}} x^3 dx = \left| \begin{array}{l} \text{na prvý z integrálov použime substitúciu:} \\ t = 3 - x^2 \\ dt = -2xdx \end{array} \right| = -2\int_3^1 \sqrt{t}dt - 2\left[\ \tfrac{x^4}{4}\ \right]_0^{\sqrt{2}} =$$

$$2\int_1^3 t^{\frac{1}{2}} dt - 2 = \frac{4}{3}\left[\ t^{\frac{3}{2}}\ \right]_1^3 - 2 = \frac{4}{3}\left(3\sqrt{3} - 1\right) - 2 = 4\sqrt{3} - \frac{10}{3}$$

2. Vypočítajte integrál:

$\displaystyle\iint_M (x^2+y)dxdy$, ak M je trojuholník ΔABC s vrcholmi $A=(1,2)$, $B=(5,2)$, $C=(4,4)$.

Riešenie:



Obr. 2: vľavo - trojuholník ABC v rovine [x,y], vpravo - trojuholník ABC v rovine [y,x].

Na obrázku 2 vľavo je znázornený trojuholník ΔABC v rovine s vodorovnou osou $\mathcal{O}_x$ a zvislou $\mathcal{O}_y$, teda oblasť M je typu $[x,y]$. Na obrázku 2 vpravo je ten istý trojuholník, ale znázornený v rovine s vodorovnou osou $\mathcal{O}_y$ a zvislou $\mathcal{O}_x$, čiže oblasť M je typu $[y,x]$. Výhodnejšie je v tomto prípade integrovať na oblasti M typu $[y,x]$ než $[x,y]$, pretože odpadá nutnosť rozkladu oblasti na dve podoblasti a integrácie na každej z týchto podoblastí zvlášť. Popíšme oblasť M ako oblasť typu $[y,x]$:

$$2 \leq \quad y \quad \leq 4, \tag{5}$$
$$\frac{3}{2}y-2 \leq \quad x \quad \leq 6-\frac{1}{2}y. \tag{6}$$

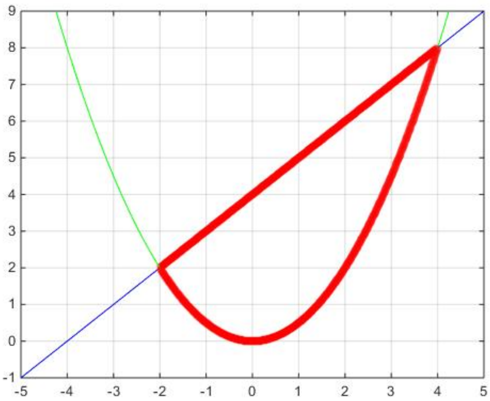
Môžeme integrovať:

$$\iint_M (x^2+y)dxdy = \int_2^4 \int_{\frac{3}{2}y-2}^{6-\frac{1}{2}y} (x^2+y)dxdy = \int_2^4 \left[\ \tfrac{x^3}{3}+xy\ \right]_{\frac{3}{2}y-2}^{6-\frac{1}{2}y} dy =$$
$$= \int_2^4 \frac{(12-y)^3}{24} + 6y - \frac{y^2}{2} - \frac{(3y-4)^3}{24} - \frac{3}{2}y^2 + 2y\ dy = \int_2^4 \frac{(12-y)^3}{24} - \frac{(3y-4)^3}{24}\ dy +$$
$$+ \int_2^4 8y-2y^2\ dy = \frac{1}{24}\left[\ -\tfrac{(12-y)^4}{4} - \tfrac{(3y-4)^4}{12}\ \right]_2^4 + \left[\ 4y^2 - \tfrac{2y^3}{3}\ \right]_2^4 =$$
$$= \frac{1}{24}\left(\frac{-8^4-3.8^4}{12} + \frac{3.10^4+2^4}{12}\right) + \frac{1}{3}(4^3-2^5) = \frac{142}{3} + \frac{32}{3} = 58$$

3. Vypočítajte integrál:

$$\iint_M (x^2y)dxdy, \text{ ak } M \text{ je ohraničená krivkami: } y = x - 4 \text{ a } y^2 = 2x.$$

Riešenie:



Obr. 3: Červenou - zvýraznené hranice oblasti M, zelenou - parabola, modrou - priamka.

Na obrázku 3 je znázornená oblasť M ako oblasť typu $[y, x]$, tj. na vodorovnej osi je vynesená premenná y a na zvislej osi premenná x. Ako obrázok naznačuje, tak je jednoduchšie určiť oblasť M ako oblasť ohraničenú krivkami: $x = y + 4$ a $x = \frac{y^2}{2}$. Z obrázka, ale aj analyticky, je ľahké zistiť, aké sú hranice pre x. Platí:

$$\frac{y^2}{2} \leq x \leq y + 4.$$

Za účelom zistenia hraníc pre premennú y, je potrebné nájsť priesečníky kriviek. Vyriešme teda sústavu dvoch rovníc:

$$x = \frac{y^2}{2}, \tag{7}$$

$$x = y + 4. \tag{8}$$

Ich porovnaním dostaneme kvadratickú rovnicu:

$$y^2 - 2y - 8 = 0,$$

ktorá má dva reálne korene $y_1 = -2$ a $y_2 = 4$, čo sú zároveň hranice pre y. Popíšme teda oblasť M pomocou získaných údajov:

$$-2 \leq \; y \; \leq 4, \tag{9}$$

$$\frac{y^2}{2} \leq \; x \; \leq y + 4. \tag{10}$$

Integrujme:

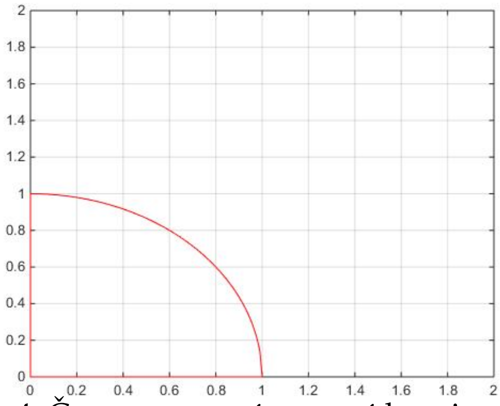
$$\iint_M (x^2y)dxdy = \int_{-2}^{4}\int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} (x^2y)dxdy = \int_{-2}^{4} y\left[\ \tfrac{x^3}{3}\ \right]_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} dy = \int_{-2}^{4} \frac{y}{3}\left((y+4)^3 - \frac{y^6}{8}\right) dy =$$

$$= \int_{-2}^{4} \frac{y^4}{3} + 4y^3 + 16y^2 + \frac{64}{3}y - \frac{y^7}{24}\, dy = \left[\ \tfrac{y^5}{15} + y^4 + \tfrac{16}{3}y^3 + \tfrac{32}{3}y^2 - \tfrac{y^8}{192}\ \right]_{-2}^{4} = \frac{2412}{5}$$

4. Vypočítajte integrál pomocou transformácie do polárnych súradníc:

$$\iint_M \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy, \text{ ak } M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Riešenie:



Obr. 4: Červenou - zvýraznené hranice oblasti M.

Ľahko možno určiť, že oblasť M (na obrázku 4) je štvrťkruh so stredom v bode $(0,0)$ a polomerom 1, ležiaci v prvom kvadrante. Vzhľadom na oblasť integrovania ako aj predpis funkcie v integrande je žiadúce použiť na integrovanie transformáciu do polárnych súradníc:

$$x = \rho\cos\varphi, \tag{11}$$
$$y = \rho\sin\varphi, \tag{12}$$
$$\text{Jakobián} = \rho. \tag{13}$$

Z obrázka 4 (alebo analyticky) môžeme určiť hranice pre nové premenné:

$$0 \leq \rho \leq 1, \tag{14}$$
$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \tag{15}$$

čím sme popísali oblasť M pomocou nových premenných ρ a φ.

Pri integrovaní nezabudneme na jakobián:

$$\iint_M \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy = \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}d\varphi d\rho = \int_0^1 \rho\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\left[\ \varphi\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}}d\rho =$$

$$= \tfrac{\pi}{2}\int_0^1 \rho\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}d\rho = \frac{\pi}{4}\int_0^1 2\rho\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}d\rho = \left| \begin{array}{l} \text{substitúcia:} \\ t = \rho^2 \\ dt = 2\rho d\rho \end{array} \right| = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{substitúcia:} \\ u = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \\ t = \frac{2}{u^2+1} - 1 \\ dt = \frac{-4u}{(u^2+1)^2}du \end{array} \right| = -\pi\int_1^0 \frac{u^2}{(u^2+1)^2}du = \frac{\pi}{2}\int_0^1 u\frac{2u}{(u^2+1)^2}du =$$

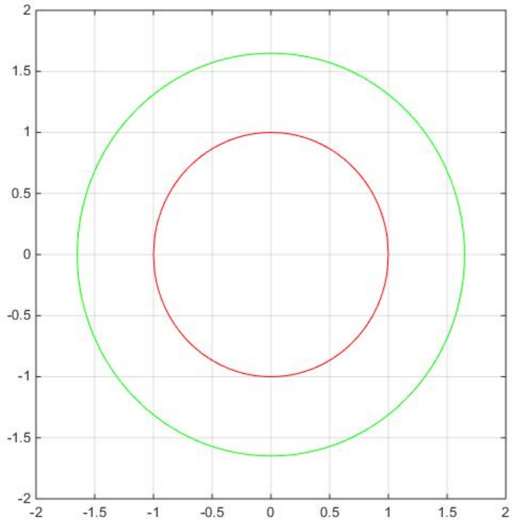
$$= \left| \begin{array}{ll} \text{per partes:} & \\ f(u) = u & g'(u) = \frac{2u}{(u^2+1)^2} \\ f'(u) = 1 & g(u) = \frac{-1}{u^2+1} \end{array} \right| = \tfrac{\pi}{2}\left[\ \tfrac{-u}{u^2+1}\ \right]_0^1 + \tfrac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}du = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\left[\ \operatorname{arctg}(u)\ \right]_0^1 =$$

$$= -\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{2}\left(\operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0)\right) = -\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{2}\left(\tfrac{\pi}{4} - 0\right) = -\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi^2}{8} = \tfrac{\pi}{4}\left(\tfrac{\pi}{2} - 1\right)$$

5. Vypočítajte integrál pomocou transformácie do polárnych súradníc:

$$\iint_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy, \text{ ak } M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2+y^2 \leq \mathrm{e}\}.$$

Riešenie:



Obr. 5: Červenou - hranica vnútorného kruhu, zelenou - hranica vonkajšieho kruhu, oblasť M - medzikružie.

Popis oblasti M (na obrázku 5) v polárnych súradniciach:

$$1 \leq \quad \rho \quad \leq \sqrt{\mathrm{e}}, \tag{16}$$

$$0 \leq \quad \varphi \quad \leq 2\pi. \tag{17}$$

Integrovanie po transformácii do polárnych súradníc:

$$\iint_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy = \int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}}\int_0^{2\pi} \rho\frac{\ln\rho^2}{\rho^2}d\varphi d\rho = 2\pi\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}}\frac{2\ln\rho}{\rho}d\rho = 2\pi\Big[\ \ln^2\rho\ \Big]_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} = 2\pi\left(\ln^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - \ln^2 1\right) = 2\pi\left(\frac{1}{4}-0\right) = \frac{\pi}{2}$$

6. Vypočítajte plošný obsah množiny $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 2x \le x^2 + y^2 \le 4x, -\sqrt{3}x \le y \le \frac{x}{\sqrt{3}}\}$.

Riešenie:
Vypočítať obsah plochy množiny znamená integrovať konštatnú funkciu $f(x,y) = 1$ na tejto množine. Množina M je určená štyrmi nerovnosťami. Z nerovnosti $x^2 + y^2 \le 4x$ po úprave dostaneme:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 &\le 0 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 &\le 4 \\ (x-2)^2 + (y-0)^2 &\le 2^2 \end{aligned}$$

Čiže ide o kruh so stredom v bode $(2,0)$ a polomerom 2.
Z nerovnosti $2x \le x^2 + y^2$ po podobných úpravách ako v predošlom dostaneme:

$$1 \le (x-1)^2 + y^2.$$

Teda ide o body, ktoré neležia vnútri kruhu so stredom v bode $(1,0)$ a polomerom 1. Nerovnosti $2x \le x^2 + y^2 \le 4x$ teda určujú medzikružie dvoch nesústredných kruhov:

$$(x-2)^2 + y^2 \le 4, \tag{18}$$
$$(x-1)^2 + y^2 < 1. \tag{19}$$

Zvyšné dve nerovnosti z tohto medzikružia vysekávajú časť, ktorá tvorí množinu M.
Vzhľadom na charakter množiny M je vhodné použiť transformáciu do polárnych súradníc (11), (12).
Z nerovností $2x \le x^2 + y^2 \le 4x$ po transformácií dostaneme:

$$\begin{aligned} 2\rho\cos\varphi \le \quad \rho^2 \quad &\le 4\rho\cos\varphi, \\ 2\cos\varphi \le \quad \rho \quad &\le 4\cos\varphi. \end{aligned} \tag{20}$$

Súčasne z nerovnosti $x^2 + y^2 \le 4x$ máme $x \ge 0$. Pretože $x = \rho\cos\varphi$ a $\rho \ge 0$, tak $\cos\varphi \ge 0$ a teda $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.
Z druhej dvojice nerovností $-\sqrt{3}x \le y \le \frac{x}{\sqrt{3}}$ po transformácii dostaneme:

$$-\sqrt{3}\rho\cos\varphi \le \quad \rho\sin\varphi \quad \le \frac{1}{\sqrt{3}}\rho\cos\varphi, \tag{21}$$
$$-\sqrt{3} \le \quad \tfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \quad \le \frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$-\sqrt{3} \le \quad \operatorname{tg}\varphi \quad \le \frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$-\frac{\pi}{3} \le \quad \varphi \quad \le \frac{\pi}{6}. \tag{22}$$

Nerovnosti (21) je možné splniť pre $\rho = 0$ a teda bod $(0,0)$. Ten však neovplyvní veľkosť obsahu plochy množiny M (hoci do nej patrí), pretože je izolovaný. Z rovnakého dôvodu možno integrovať funkciu f na M bez toho, aby sme brali na zreteľ bod $(0,0)$. Nerovnosti (20) a (22) určujú hranice polárnych premenných a je nimi vymedzená integračná oblasť M, ktorej obsah plochy P chceme vypočítať.
Vypočítajme ho:

$$P = \iint_M 1 dxdy = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho\, d\rho d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left[\ \frac{\rho^2}{2}\ \right]_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}\left(12\cos^2\varphi\right)\ d\varphi =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} 6\cos^2\varphi \, d\varphi = 6\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{(1+\cos 2\varphi)}{2} \, d\varphi = 3\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} 1+\cos 2\varphi \, d\varphi = 3\Big[\ \varphi + \tfrac{\sin 2\varphi}{2} \ \Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$3\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2}\right) = \frac{3}{2}\pi + \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(\pi + \sqrt{3}\right)$$