

Obsah

1	Integrálny počet	3
1.1	Určitý integrál	3
1.1.1	Definícia určitého integrálu	3
1.1.2	Vlastnosti určitého integrálu	4
1.1.3	Veta o strednej hodnote	5
1.1.4	Hlavná veta integrálneho počtu	6
1.2	Neurčitý integrál	7
1.2.1	Definícia	7
1.2.2	Metóda per partes	9
1.2.3	Substitučná metóda	9
1.2.4	Niektoré význačné substitúcie	10
1.2.5	Príklady	14
2	Fourierove rady	25
2.0.6	Príklady	26
3	Diferenciálny počet FVP	41
3.1	Množiny	41
3.2	Limita a spojitost funkcie	42
3.2.1	Príklady	45
3.3	Diferencovateľnosť funkcie	49
3.3.1	Lineárne zobrazenia	49
3.3.2	Definícia diferencovateľnosti	49
3.3.3	Parciálne derivácie	50
3.3.4	Príklady	51
3.3.5	Príklady	53
3.3.6	Geometrický význam parciálnych derivácií	55
3.3.7	Príklady	56
3.3.8	Diferencovateľnosť zloženej funkcie	56
3.3.9	Príklady	57
3.3.10	Zmiešané parciálne derivácie	58
3.3.11	Príklady	58
3.3.12	Derivácia vo smere, gradient	60

3.3.13	Príklady	61
3.3.14	Lokálne extrémny	62
3.3.15	Príklady	65
4	Integrálny počet FVP	69
4.1	Úvodné pojmy	69
4.2	Definícia integrálu na intervale	70
4.3	Definícia integrálu na množine	71
4.4	Vlastnosti integrálu	72
4.5	Fubiniho vety	73
4.5.1	Príklady	74
4.6	Transformácie integrálu	76
4.6.1	Príklady	77

Kapitola 1

Integrálny počet

1.1 Určitý integrál

1.1.1 Definícia určitého integrálu

Definícia 1.1 1. Nech $\langle a, b \rangle$ je uzavretý interval. Nech $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ sú také, že $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$. Potom $k + 1$ -ticu $D = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ nazývame delenie intervalu $\langle a, b \rangle$. Intervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ nazývame deliace intervaly.

2. Nech $D = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ je delenie intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom číslo $\|D\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, \dots, k\}$ nazývame norma delenia D .

3. Nech $(D_n)_{n=1}^\infty$ je postupnosť delení intervalu $\langle a, b \rangle$. Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n\| = 0$, potom hovoríme, že postupnosť $(D_n)_{n=1}^\infty$ je normálna postupnosť delení intervalu $\langle a, b \rangle$.

4. Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$ a $D = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ je ľubovoľné delenie intervalu $\langle a, b \rangle$. Nech body $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ sú ľubovoľne zvolené pre $i = 1, 2, \dots, k$. Potom číslo

$$S_D(f) = \sum_{i=1}^k f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

nazývame integrálny súčet funkcie f pre dané delenie D intervalu $\langle a, b \rangle$ a voľbu bodov $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$.

Definícia 1.2 Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$. Ak pre každú normálnu postupnosť delení $(D_n)_{n=1}^\infty$ intervalu $\langle a, b \rangle$ a každú voľbu bodov c_i v integrálnych súčtoch $S_{D_n}(f)$, postupnosť $(S_{D_n}(f))_{n=1}^\infty$ konverguje k tomu istému číslu J , tak hovoríme, že funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$. Číslo

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{D_n}(f)$$

nazývame určitý integrál funkcie f na intervale $\langle a, b \rangle$ a označujeme

$$J = \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx.$$

Veta 1.1 (Prvá postačujúca podmienka integrovateľnosti) *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$. Potom je na tomto intervale integrovateľná.*

Definícia 1.3 *Nech sú splnené nasledujúce podmienky:*

1. Funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$.
2. V intervale $\langle a, b \rangle$ existuje len konečný počet bodov, v ktorých táto funkcia nie je spojitá.
3. V každom bode z intervalu (a, b) existuje vlastná limita funkcie f sprava a aj zľava.
4. Existujú vlastné limity $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$.

Potom hovoríme, že funkcia f je po častiach spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$.

Veta 1.2 (Druhá postačujúca podmienka integrovateľnosti) *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je po častiach spojitá na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$. Potom je na tomto intervale integrovateľná.*

1.1.2 Vlastnosti určitého integrálu

Veta 1.3 *Nech funkcie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sú integrovateľné na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$ a $c \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta. Potom*

1. Funkcia $(f + g) : A \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

2. Funkcia $(cf) : A \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b (cf) = c \int_a^b f.$$

3. Funkcia $|f| : A \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Veta 1.4 *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$. Potom je integrovateľná aj na každom intervale $\langle c, d \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$.*

Veta 1.5 *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$ a aj na intervale $\langle b, c \rangle \subseteq A$. Potom je integrovateľná aj na intervale $\langle a, c \rangle$ a platí*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Veta 1.6 *Nech funkcie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sú integrovateľné na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$ a pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí $f(x) \leq g(x)$. Potom platí*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

1.1.3 Veta o strednej hodnote

Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$. Potom je na tomto intervale ohraničená. To znamená, že existujú $k, K \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí $k \leq f(x) \leq K$. Preto platí

$$\int_a^b k \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b K \, dx.$$

Z toho dostávame

$$k(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq K(b-a).$$

A ďalej

$$k \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq K.$$

Číslo

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

nazývame stredná hodnota funkcie f na intervale $\langle a, b \rangle$.

Veta 1.7 *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle \subseteq A$. Potom existuje $c \in \langle a, b \rangle$ také, že*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

To znamená, že spojitá funkcia dosahuje na intervale $\langle a, b \rangle$ svoju strednú hodnotu.

1.1.4 Hlavná veta integrálneho počtu

Definícia 1.4 *Nech funkcia $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$. Potom funkciu*

$$F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t) dt$$

nazývame funkcia hornej hranice integrálu funkcie f .

Veta 1.8 *Nech funkcia $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$. Potom funkcia*

$$F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

je spojitá.

Veta 1.9 *(Hlavná veta integrálneho počtu) Nech funkcia $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Potom funkcia*

$$F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

je diferencovateľná (na intervale $\langle a, b \rangle$) a navyše

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pre každé } x \in \langle a, b \rangle.$$

Definícia 1.5 *Nech je daná funkcia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, kde I je interval. Nech existuje funkcia $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ taká, že*

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pre každé } x \in I.$$

Potom funkciu $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ nazývame primitívna funkcia funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Veta 1.10 *Nech funkcia $F_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívnou funkciou funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Potom funkcia $F_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívnou funkciou funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ práve vtedy, ak existuje $c \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $x \in I$ je $F_2(x) = F_1(x) + c$. To znamená, že dve primitívne funkcie tej istej funkcie sa líšia iba o konštantu.*

Veta 1.11 (Newtonov - Leibnitzov vzorec) *Nech funkcia $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a $F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je jej ľubovoľná primitívna funkcia. Potom*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Poznámka 1.1 *Definíciu určitého integrálu zovšeobecňujeme nasledujúcim spôsobom:*

1. $\int_a^a f = 0$.
2. Ak $a > b$, definujeme $\int_a^b f = -\int_b^a f$.
3. Nech $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Môžeme definovať funkciu

$$G : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x) = \int_x^b f(t) dt.$$

Táto funkcia je diferencovateľná (na intervale $\langle a, b \rangle$) a platí

$$G'(x) = -f(x) \quad \text{pre každé } x \in \langle a, b \rangle.$$

4. Nech $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia, I je interval a bod $a \in I$. Definujme funkciu $G : I \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = \int_a^x f(t) dt$. Nie je problém ukázať, že táto funkcia je diferencovateľná a $G'(x) = f(x)$ pre každé $x \in I$.

Veta 1.12 *Nech $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia na intervale I . Potom k nej existuje primitívna funkcia.*

1.2 Neurčitý integrál

1.2.1 Definícia

Definícia 1.6 *Nech I je interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia. Potom jej ľubovoľnú primitívnu funkciu $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ nazývame neurčitý integrál funkcie f . Označujeme $F(x) = \int f(x) dx$.*

Poznámka 1.2 1. Je zrejmé, že označením $\int f(x) dx$ nie je výsledok jednoducho určený. Je to jedna z primitívnych funkcií funkcie f . Teda $\int \sin x dx = -\cos x$ rovnako dobre, ako $\int \sin x dx = -\cos x + 356$. Teda tieto výsledky sa môžu líšiť o konštantu. Preto, keď napíšeme

$$\int \sin x dx = \int \sin x dx,$$

nebude to znamenať, že

$$-\cos x = -\cos x + 356,$$

ale že existuje konštanta $c \in \mathbb{R}$ taká, že

$$-\cos x + c = -\cos x + 356.$$

2. Označenie $F(x) = \int f(x) dx$ nie je možné chápať ako rovnosť funkčných hodnôt. Rovnosť $\int \sin 3d3 = -\cos 3$ nedáva žiaden zmysel. Označenie $\int f(x) dx$ treba chápať ako úlohu o nájdení jednej z primitívnych funkcií funkcie f a rovnosť $F(x) = \int f(x) dx$ ako jeden z možných výsledkov uvedenej úlohy.

1.2.2 Metóda per partes

Veta 1.13 *Nech funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojitاً diferencovateľné na intervale I . Nech $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $(f'g) : I \rightarrow \mathbb{R}$. Potom $(fg - H) : I \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $(fg') : I \rightarrow \mathbb{R}$. V symbolike neurčitých integrálov to znamená, že*

$$\int (fg') = fg - \int (f'g).$$

Dôsledok 1.1 *Nech funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojitاً diferencovateľné na intervale I a body $a, b \in I$ sú ľubovoľne zvolené. Potom*

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

1.2.3 Substitučná metóda

Veta 1.14 *(Prvá veta o substitučnej metóde) Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ je spojitاً diferencovateľná a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitاً funkcia. Nech $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Potom $(F \circ \varphi) : J \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $((f \circ \varphi)\varphi') : J \rightarrow \mathbb{R}$.*

Dôsledok 1.2 *Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ je spojitاً diferencovateľná a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitاً funkcia. Nech $\alpha, \beta \in J$ sú ľubovoľné. Potom*

$$\int_{\alpha}^{\beta} ((f \circ \varphi)\varphi') = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$$

Veta 1.15 *(Druhá veta o substitučnej metóde) Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \rightarrow I$ je spojitاً diferencovateľná bijekcia a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitاً funkcia. Nech $G : J \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $((f \circ \varphi)\varphi') : J \rightarrow \mathbb{R}$. Potom $(G \circ \varphi^{-1}) : I \rightarrow \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.*

Dôsledok 1.3 *Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \rightarrow I$ je spojitاً diferencovateľná bijekcia a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitاً funkcia. Potom pre každé $a, b \in I$*

platí:

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} ((f \circ \varphi)\varphi') = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

1.2.4 Niektoré význačné substitúcie

I. Integrály typu

$$\int R\left(c, x, \sqrt[k_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[k_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[k_s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Vypočítame najmenší spoločný násobok $k = \text{lcm}\{k_1, k_2, \dots, k_s\}$.

2. Položíme

$$\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t = \varphi^{-1}(x).$$

3. Potom

$$x = \frac{b - dt^k}{ct^k - a} = \varphi(t).$$

4. Ďalej

$$dx = \varphi'(t) dt = \frac{ad - bc}{(ct^k - a)^2} kt^{k-1} dt.$$

5. Ešte máme

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k, \quad \text{preto} \quad \sqrt[k_i]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t^{\frac{k}{k_i}}.$$

6. Je zrejmé, že $\frac{k}{k_i}$ je celé číslo. Preto po dosadení do pôvodného integrálu dostávame integrál

$$\int R\left(c, \frac{b - dt^k}{ct^k - a}, t^{\frac{k}{k_1}}, t^{\frac{k}{k_2}}, \dots, t^{\frac{k}{k_s}}\right) \frac{ad - bc}{(ct^k - a)^2} kt^{k-1} dt,$$

čo je integrál z racionálnej funkcie.

II. Integrály typu

$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx,$$

kde $a > 0$ a funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{ax}.$$

2. Potom

$$ax^2 + bx + c = t^2 \pm 2\sqrt{ax}t + ax^2.$$

V tejto rovnosti vypadne druhá mocnina x . Preto môžeme vypočítať x .

3. Dostávame

$$x = \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{at}} = \varphi(t).$$

4. Potom

$$dx = \varphi'(t) dt = \frac{\pm 2\sqrt{at}^2 + 2tb \pm 2c\sqrt{a}}{(b \pm 2\sqrt{at})^2} dt.$$

5. Treba si ešte uvedomiť, že

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{ax} = \pm t \pm \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{at}}.$$

6. Preto daný integrál

$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$

je prevedený na integrál z racionálnej funkcie

$$\int R\left(c, \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{at}}, \pm t \pm \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{at}}\right) \left(\frac{\pm 2\sqrt{at}^2 + 2tb \pm 2c\sqrt{a}}{(b \pm 2\sqrt{at})^2}\right) dt.$$

III. Integrály typu

$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx,$$

kde $c > 0$ a funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt.$$

Pre jednoduchosť budeme uvažovať len o jednej zo štyroch možností

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} - xt.$$

2. Potom

$$ax^2 + bx + c = c - 2\sqrt{c}xt + x^2t^2.$$

V tejto rovnosti vypadne c , preto môžeme krátiť x -om. Vypočítame x .

3. Dostávame

$$x = \frac{2t\sqrt{c} + b}{t^2 - a} = \varphi(t).$$

4. Potom

$$dx = \varphi'(t) dt = \frac{-2(t^2\sqrt{c} + tb + \sqrt{ca})}{(t^2 - a)^2} dt.$$

5. Treba si ešte uvedomiť, že

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} - xt = \sqrt{c} - \left(\frac{2t\sqrt{c} + b}{t^2 - a}\right)t.$$

6. Preto daný integrál

$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$

je prevedený na integrál z racionálnej funkcie

$$\int R\left(c, \frac{2t\sqrt{c} + b}{t^2 - a}, \sqrt{c} - \left(\frac{2t\sqrt{c} + b}{t^2 - a}\right)t\right) \left(\frac{-2(t^2\sqrt{c} + tb + \sqrt{ca})}{(t^2 - a)^2}\right) dt.$$

IV. Integrály typu

$$\int R(c, \sin x, \cos x) dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t = \varphi^{-1}(x).$$

2. Dostávame

$$x = 2\operatorname{arctg} t = \varphi(t).$$

3. Potom

$$dx = \varphi'(t) dt = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

4. Ďalej

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

5. Preto daný integrál

$$\int R(c, \sin x, \cos x) dx$$

prevedieme na integrál z racionálnej funkcie

$$\int R\left(c, \frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt.$$

V. Integrály typu

$$\int R(c, \operatorname{tg} x, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x) dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme

$$\operatorname{tg} x = t = \varphi^{-1}(x).$$

2. Dostávame

$$x = \operatorname{arctg} t = \varphi(t).$$

3. Potom

$$dx = \varphi'(t) dt = \frac{1}{1+t^2} dt.$$

4. Ďalej

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

5. Preto daný integrál

$$\int R(c, \operatorname{tg} x, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x) dx$$

prevedieme na integrál z racionálnej funkcie

$$\int R\left(c, t, \frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{1}{1+t^2} dt.$$

1.2.5 Príklady

Časť I

1. Pomocou prvej vety o substitúcii počítajme (jednoduché) integrály:

- (a) $\int \frac{1}{3+4x^2} dx$ $\left[\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{3}} \right]$.
 (b) $\int \frac{x}{3+4x^2} dx$ $\left[\frac{1}{8} \ln(3+4x^2) \right]$.
 (c) $\int \frac{x}{(x^2+5)^4} dx$ $\left[-\frac{1}{6(x^2+5)^3} \right]$.
 (d) $\int e^x \operatorname{tg} e^x dx$ $[-\ln |\cos e^x|]$.
 (e) $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+5} dx$ $\left[\frac{3}{2} \ln(x^2+4x+5) - 4 \operatorname{arctg}(x+2) \right]$.
 (f) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5} dx$ $\left[\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} \right]$.
 (g) $\int \frac{5x-1}{x^2+2x+3} dx$ $\left[\frac{5}{2} \ln(x^2+2x+3) + \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{(x+1)}{\sqrt{2}} \right]$.

2. Počítajme integrály z racionálnych funkcií:

- (a) $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x} dx$.
 $[5x + 2 \ln |x| + 3 \ln |x-2| + 4 \ln |x+2|]$.
 (b) $\int \frac{-2x+19}{x^2+x-6} dx$ $\left[\ln \frac{|x-2|^3}{|x+3|^5} \right]$.
 (c) $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^3} dx$ $\left[2 \ln |x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - 2 \ln |x+1| \right]$.
 (d) $\int \frac{5x^2-7x+10}{x^3-x^2-4x-6} dx$.
 $\left[2 \ln |x-3| + \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+2) - 5 \operatorname{arctg}(x+1) \right]$.
 (e) $\int \frac{4x^2+x-13}{2x^3+12x^2+11x+5} dx$.
 $[2 \ln |x+5| - 3 \operatorname{arctg}(2x+1)]$.
 (f) $\int \frac{1}{x^3+1} dx$.
 $\left[\frac{1}{3} \ln |x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} (2x-1) \right]$.
 (g) $\int \frac{x^5+x^4-7x^3+8x-3}{x^3+x^2-6x} dx$.
 $\left[\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2} \ln |x(x-2)| \right]$.
 (h) $\int \frac{6x-13}{(4x^2+4x+17)} dx$.
 $\left[\frac{3}{4} \ln(4x^2+4x+17) - 2 \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{4} \right]$.

3. Počítajme metódou "Per partes":

- (a) $\int x \sin x dx$ $[\sin x - x \cos x]$.

- (b) $\int x e^{2x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{(2x-1)e^{2x}}{4} \right].$
 (c) $\int (x^3 - x + 1) e^{2x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{e^{2x}}{2} \left(x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \right) \right].$
 (d) $\int_0^\pi (2x^2 + 3) \cos 2x dx. \dots\dots\dots [\pi].$
 (e) $\int \ln x dx. \dots\dots\dots [x \ln x - x].$
 (f) $\int x \log_{10} 2x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x^2}{2} \left(\log_{10} 2x - \frac{1}{2 \ln 10} \right) \right].$
 (g) $\int e^x \sin x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) \right].$
 (h) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx. \dots\dots\dots [x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x|].$
 (i) $\int \operatorname{arccotg} x dx. \dots\dots\dots \left[x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right].$
 (j) $\int x \ln(x^2 + 3x - 10) dx.$

$$\left[\frac{x^2}{2} \ln(x^2 + 3x - 10) - \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} - 2 \ln |x - 2| - \frac{25}{2} \ln |x + 5| \right].$$

- (k) $\int \ln(x^2 - 4x + 6) dx.$

$$\left[(x - 2) \ln(x^2 - 4x + 6) - 2x + \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{(x-2)}{\sqrt{2}} \right].$$

- (l) $\int x \operatorname{arctg}(x + 3) dx.$

$$\left[\frac{(x^2-8)}{2} \operatorname{arctg}(x + 3) - \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \ln(x^2 + 6x + 10) \right].$$

4. Pomocou prvej vety o substitúcii počítajme integrály:

- (a) $\int \frac{2^x}{(2^x+3)^7} dx. \dots\dots\dots \left[-\frac{1}{6 \ln 2 (2^x+3)^6} \right].$
 (b) $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{\sqrt{3}} \right].$
 (c) $\int \frac{x}{\sqrt{3-4x^2}} dx. \dots\dots\dots \left[-\frac{1}{4} \sqrt{3-4x^2} \right].$
 (d) $\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{(e^x-2)e^x}{e^{2x}+2e^x+7} dx.$

$$\left[\frac{1}{2} (\ln 42 - \ln 15) - \frac{3}{\sqrt{6}} \left(\operatorname{arctg} \frac{6}{\sqrt{6}} - \operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{6}} \right) \right].$$

- (e) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 5 \sin x - 6} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{7} \ln \left| \frac{1 - \sin x}{6 + \sin x} \right| \right].$

- (f) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x + 1}{\cos^4 x + \cos^3 x} \sin x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} + 2 \ln \frac{3}{2} \right].$

- (g) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 5 \cos x + 6} dx. \dots\dots\dots \left[\ln \frac{4}{3} \right].$

- (h) $\int \frac{2}{x(\ln x - 2)(\ln^2 x - 2 \ln x + 2)} dx. \left[\ln \frac{|\ln x - 2|}{\sqrt{(\ln x - 1)^2 + 1}} - \operatorname{arctg} (\ln x - 1) \right].$

5. Pomocou druhej vety o substitúcii počítajme integrály:

- (a) $\int \frac{\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[6]{x^7+4}\sqrt[4]{x^5}} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{12}{\sqrt[12]{x}} - \frac{6}{\sqrt[6]{x}} + 24 \ln \left| \frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[12]{x+1}} \right| \right].$
- (b) $\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} dx. \dots\dots \left[\frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right), t = \sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} \right].$
- (c) $\int_1^{64} \frac{2\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})} dx. \dots\dots\dots \left[12 \ln \frac{3}{2} \right].$
- (d) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+3}} dx. \left[\frac{3t}{2} - \frac{\ln|1-2t|}{2} - \frac{33}{4(1-2t)}, t = -x + \sqrt{x^2+x+3} \right].$
- (e) $\int \sqrt{x^2+4x+3} dx.$
 $\left[-\frac{t^2}{8} - \frac{t}{2} + \frac{\ln|t+2|}{2} + \frac{1}{8(t+2)^2}, t = x - \sqrt{x^2+4x+3} \right].$
- (f) $\int \frac{1}{\sqrt{4-3x-x^2}} dx. \dots\dots\dots \left[-2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{4-3x-x^2}-2}{x} \right) \right].$
- (g) $\int_0^1 \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}} dx. \dots\dots\dots [-8, 345].$
- (h) $\int \frac{1}{\cos x} dx. \dots\dots\dots \left[\ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right| \right].$
- (i) $\int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{5} \left(3 \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) + 1 \right) \right].$
- (j) $\int \frac{1}{\sin x - \cos x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 + \sqrt{2}} \right| \right].$
- (k) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1} dx. \dots\dots\dots \left[\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) \right].$
- (l) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\pi}{4} \right].$
- (m) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx. \dots\dots\dots [1, 246].$
- (n) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x - 2 \sin x + 3} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\pi}{4} \right].$
- (o) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{5 + 2 \cos x} dx. \dots\dots\dots [0, 152].$
- (p) $\int \cos(\ln x) dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) \right].$

6. Vypočítajme $\int x^2 e^{\sqrt{x}} dx.$

$$\left[\left(2(\sqrt{x})^5 - 10x^2 + 40(\sqrt{x})^3 - 120x + 240\sqrt{x} - 240 \right) e^{\sqrt{x}} \right].$$

7. Vypočítajme plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

- (a) $y = x \ln x$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$, $y = 0$ $\left[-\frac{9}{16} + \frac{15}{8} \ln 2\right]$.
- (b) Parabolou $y = x^2 - 6x + 8$ a jej dotyčnicami v bodoch $A = [1, 3]$, $B = [4, 0]$ $\left[\frac{9}{4}\right]$.
8. Vypočítajme objem zrezaného kužeľa, ktorý vznikne rotáciou elementárnej oblasti okolo osi o_x . Polomery jeho podstáv sú $r = 1$, $R = 2$ a výška $v = 3$ $[7\pi]$.

Časť II

1. Pomocou prvej vety o substitúcii počítajme (jednoduché) integrály:

- (a) $\int \frac{1}{4+3x^2} dx$ $\left[\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}x}{2}\right]$.
- (b) $\int \frac{x}{4+3x^2} dx$ $\left[\frac{1}{6} \ln(4+3x^2)\right]$.
- (c) $\int \frac{x}{(x^2+1)^3} dx$ $\left[-\frac{1}{4(x^2+1)^2}\right]$.
- (d) $\int \frac{3x-3}{x^2+2x+2} dx$ $\left[\frac{3}{2} \ln(x^2+2x+2) - 6 \operatorname{arctg}(x+1)\right]$.
- (e) $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+7} dx$ $\left[\frac{3}{2} \ln(x^2+4x+7) - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{3}}\right]$.
- (f) $\int e^x \cotg e^x dx$ $[\ln |\sin e^x|]$.

2. Počítajme integrály z racionálnych funkcií:

- (a) $\int \frac{2}{9x^2-1} dx$ $\left[\frac{1}{3} \ln \left|\frac{3x-1}{3x+1}\right|\right]$.
- (b) $\int \frac{1-x}{x^2+x} dx$ $[\ln |x| - 2 \ln |x+1|]$.
- (c) $\int \frac{x^3-2x^2+9}{x^2-x-2} dx$ $\left[\frac{x^2}{2} - x + 3 \ln |x-2| - 2 \ln |x+1|\right]$.
- (d) $\int \frac{x}{x^3-3x+2} dx$ $\left[\frac{2}{9} \ln |x-1| - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{9} \ln |x+2|\right]$.
- (e) $\int \frac{x^2+x+12}{x^3+7x^2+11x+5} dx$ $\left[2 \ln |x+5| - \ln |x+1| - \frac{3}{x+1}\right]$.
- (f) $\int \frac{x+2}{x^3+x^2+5x-7} dx$.
 $\left[\frac{3}{10} \ln |x-1| - \frac{3}{20} \ln (x^2+2x+7) + \frac{\sqrt{6}}{15} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{6}(x+1)}{6}\right)\right]$.
- (g) $\int \frac{5x^3-5x^2-11x+5}{x^2-x-2} dx$ $\left[\frac{5x^2}{2} + \ln |x-2| - 2 \ln |x+1|\right]$.
- (h) $\int \frac{7-x}{x^3-x^2+3x+5} dx$.
 $\left[\ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-2x+5}} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{2}\right)\right]$.
- (i) $\int \frac{2x^3-2x^2+4x-4}{x^4+4} dx$.
 $\left[\frac{1}{2} \ln [(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)] - 2 \operatorname{arctg}(x+1)\right]$.

3. Počítajme metódou "Per partes":

- (a) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \right].$
- (b) $\int x^2 e^{3x} \, dx. \dots\dots\dots \left[\frac{e^{3x}}{27} (9x^2 - 6x + 2) \right].$
- (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(2x) \sin x \, dx. \dots\dots\dots \left[\frac{2}{5} e^{\pi} + \frac{1}{5} \right].$
- (d) $\int x \ln x^2 \, dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x^2}{2} (\ln x^2 - 1) \right].$
- (e) $\int \ln(x^2 + 1) \, dx. \dots\dots\dots [x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x].$
- (f) $\int_1^e \ln^2 x \, dx. \dots\dots\dots [(e - 2)].$
- (g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos(3x) \, dx. \dots\dots\dots \left[-\frac{3}{13} \left(e^{\pi} + \frac{2}{3} \right) \right].$
- (h) $\int x \ln(x^2 - 2x + 5) \, dx.$
 $\left[\frac{1}{2} (x^2 + 3) \ln(x^2 - 2x + 5) - \frac{x^2}{2} - x + 4 \operatorname{arctg} \frac{(x-1)}{2} \right].$
- (i) $\int \ln(x^2 + x - 2) \, dx.$
 $[x \ln(x^2 + x - 2) - 2x - \ln|x - 1| + 2 \ln|x + 2|].$
- (j) $\int x^2 \ln(x^2 + 4x + 4) \, dx.$
 $\left[\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 4x + 4) - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8 \ln|x + 2| \right) \right].$
- (k) $\int x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \, dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{6} \ln(x^2 + 1) \right].$
- (l) $\int e^{\sqrt{x}} \, dx. \dots\dots\dots [2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1)].$
- (m) $\int \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} \, dx. \left[x \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 2| + \operatorname{arctg}(x - 1) \right].$
- (n) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} \, dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\pi}{2} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} + 4 \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} - 4 \right].$

4. Pomocou prvej vety o substitúcii počítajme integrály:

- (a) $\int \frac{e^x + 10}{(e^{2x} - 2e^x + 5)} \, dx. \dots [2x - \ln|e^{2x} - 2e^x + 5| + \frac{3}{2} \operatorname{arctg}(\frac{e^x - 1}{2})].$
- (b) $\int \frac{e^x(e^x - 1)}{e^{2x} + 1} \, dx. \dots\dots\dots [\frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - \operatorname{arctg}(e^x)].$
- (c) $\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^{2x} + 2e^x - 3}{e^{2x} + e^x - 6} \, dx. \dots\dots\dots [\ln \sqrt{5}].$
- (d) $\int_0^{\ln 2} \frac{2e^x + 3}{e^{2x} + 2e^x + 2} e^x \, dx. \dots\dots\dots [\ln 2 + \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2].$
- (e) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \sin x + 3} \, dx.$
 $\left[\frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + \sin x + 3) - \frac{\sqrt{11}}{11} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{11}}{11} (2 \sin x + 1) \right) \right].$

$$\begin{aligned}
 & \text{(f)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(5-\cos x) \sin x}{\cos^2 x - \cos x - 2} dx. \quad \dots\dots\dots [-3 \ln 2]. \\
 & \text{(g)} \int \frac{\cos x}{\sin^3 x + \sin^2 x + \sin x} dx. \\
 & \quad \left[\ln |\sin x| - \frac{1}{2} \ln |\sin^2 x + \sin x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} + \sin x \right) \right) \right].
 \end{aligned}$$

5. Pomocou druhej vety o substitúcii počítajme integrály:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \int x \sqrt[3]{x+2} dx. \quad \dots\dots\dots \left[\frac{3}{7} \sqrt[3]{(x+2)^7} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+2)^4} \right]. \\
 & \text{(b)} \int \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})} dx. \quad \dots\dots\dots [6 \ln(1 + \sqrt[6]{x})]. \\
 & \text{(c)} \int \frac{x}{(1+\sqrt{x-1})} dx. \\
 & \quad \left[\frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} - x + 1 + 4\sqrt{x-1} - 4 \ln(1 + \sqrt{x-1}) \right]. \\
 & \text{(d)} \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} dx. \quad \dots\dots\dots [7 + \ln 4]. \\
 & \text{(e)} \int \frac{1 - \sqrt[6]{x+1}}{x+1 + \sqrt[3]{(x+1)^4}} dx. \\
 & \quad [\ln |x+1| - 3 \ln |\sqrt[3]{x+1} + 1| - 6 \operatorname{arctg}(\sqrt[6]{x+1})]. \\
 & \text{(f)} \int \frac{1}{x + \sqrt{2x-1}} dx. \quad \dots\dots\dots \left[2 \ln(x + \sqrt{2x-1}) + \frac{2}{1 + \sqrt{2x-1}} \right]. \\
 & \text{(g)} \int \frac{\sqrt{x-1}}{x + 2\sqrt{x-1}} dx. \quad \dots\dots \left[2\sqrt{x-1} - \ln(1 + \sqrt{x-1})^4 - \frac{2}{1 + \sqrt{x-1}} \right]. \\
 & \text{(h)} \int_1^{27} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3 + \sqrt[3]{x^2}} dx. \quad \dots\dots\dots \left[8 + \frac{3\sqrt{3}\pi}{2} \right]. \\
 & \text{(i)} \int \frac{1}{\sqrt{1+x-2x^2}} dx. \quad \dots\dots\dots \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\arcsin\left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right) \right) \right]. \\
 & \text{(j)} \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}} dx. \quad \dots\dots\dots \left[\ln \left| \frac{-x-1+\sqrt{x^2+x+1}}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}} \right| \right]. \\
 & \text{(k)} \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx. \quad \dots\dots\dots [2\pi]. \\
 & \text{(l)} \int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx. \quad \dots\dots\dots \left[-2 \operatorname{arctg} t, \quad t = \frac{\sqrt{3-2x-x^2}-\sqrt{3}}{x} \right]. \\
 & \text{(m)} \int_0^4 \frac{1}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}} dx. \quad \dots\dots\dots \left[\frac{4}{45} \right]. \\
 & \text{(n)} \int \frac{1}{\sin x} dx. \quad \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| \right]. \\
 & \text{(o)} \int \frac{1}{3 - \cos x} dx. \quad \dots\dots\dots \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \right]. \\
 & \text{(p)} \int \frac{1}{3 + \cos x + \sin x} dx. \quad \dots\dots\dots \left[\frac{2\sqrt{7}}{7} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}(2 \operatorname{tg}(\frac{x}{2}) + 1)}{7} \right) \right]. \\
 & \text{(q)} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x - 2 \sin x + 3} dx. \quad \dots\dots\dots \left[-\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \right) \right].
 \end{aligned}$$

- (r) $\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x} dx. \dots [2(\ln |t-1| - \ln |t| - \operatorname{arctg} t), t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}].$
- (s) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2} dx. \dots \left[\frac{2-\sqrt{3}}{2} \right].$
- (t) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x + 2}. \dots \left[\frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{3}{5}} \operatorname{tg} x \right) \right].$
6. Vypočítajme $\int_0^{\pi/2} \sin 5x \cos x dx. \dots \left[\frac{1}{6} \right].$
7. Vypočítajme plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:
- (a) $y = \frac{27}{x^2+9}, y = \frac{x^2}{6}. \dots \left[\frac{3}{2} (3\pi - 2) \right].$
- (b) $y = \ln x, y = \ln^2 x. \dots [3 - e].$
8. Kruh $x^2 + y^2 = 8$ je rozdelený parabolou $y = \frac{x^2}{2}$ na dve časti. Vypočítajme plošný obsah menšej z nich. $\dots \left[2\pi + \frac{4}{3} \right].$
9. Vypočítajme objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x .
Oblasť je určená čiarami $y = \frac{2x}{\pi}, y = \sin x, x \geq 0. \dots \left[\frac{\pi^2}{12} \right].$

Časť III

1. Pomocou priameho integrovania, využívajúc len vzorce integrálov elementárnych funkcií, vypočítajme:

- (a) $\int 3x^3 + 2x - 4 dx. \dots \left[\frac{3}{4}x^4 + x^2 - 4x \right].$
- (b) $\int \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{5} \right) dx. \dots \left[\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{10} \right].$
- (c) $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx. \dots \left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - 2x^{\frac{1}{2}} \right].$
- (d) $\int \frac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3} dx. \dots \left[\ln |x| - \frac{1}{4x^4} \right].$
- (e) $\int \frac{x(\sqrt[3]{x-x} \sqrt[3]{x})}{\sqrt[4]{x}} dx. \dots \left[-\frac{12}{37} \sqrt[12]{x^{37}} + \frac{12}{25} \sqrt[12]{x^{25}} \right].$
- (f) $\int \frac{x^3-1}{x-1} dx. \dots \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right].$
- (g) $\int e^x a^x dx. \dots \left[\frac{e^x a^x}{1+\ln a} \right].$
- (h) $\int \left(5 \cos x - 2x^5 + \frac{3}{1+x^2} \right) dx. \dots \left[5 \sin x - \frac{x^6}{3} + 3 \operatorname{arctg} x \right].$
- (i) $\int \left(10^{-x} + \frac{x^2+3}{x^2+1} \right) dx. \dots \left[-\frac{10^{-x}}{\ln 10} + x + 2 \operatorname{arctg} x \right].$
- (j) $\int (2 \sin x - 3 \cos x) dx. \dots [-2 \cos x - 3 \sin x].$
- (k) $\int \frac{1}{\sqrt{3-3x^2}} dx. \dots \left[\frac{\arcsin x}{\sqrt{3}} \right].$

- (l) $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx. \dots\dots\dots \left[3x - \frac{3^x}{2^{x-1}(\ln 3 - \ln 2)} \right].$
- (m) $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos(2x)} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{x}{2} \right].$
- (n) $\int \frac{\cos(2x)}{(\cos^2 x) \sin^2 x} dx. \dots\dots\dots [-\cotg x - \operatorname{tg} x].$
- (o) $\int \operatorname{tg}^2 x dx. \dots\dots\dots [\operatorname{tg} x - x].$
- (p) $\int \cotg^2 x dx. \dots\dots\dots [-\cotg x - x].$
- (q) $\int \frac{1}{\cos(2x) + \sin^2 x} dx. \dots\dots\dots [\operatorname{tg} x].$
- (r) $\int \frac{(1+2x^2)}{x^2(1+x^2)} dx. \dots\dots\dots \left[-\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x \right].$
- (s) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx. \dots\dots\dots [\ln |x| + 2\operatorname{arctg} x].$

2. Pomocou prvej vety o substitúcii počítajme (jednoduché) integrály:

- (a) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{-1}{2 \sin^2 x} \right].$
- (b) $\int \frac{x^2}{5+x^3} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{3} \ln |5+x^3| \right].$
- (c) $\int \frac{1}{3+9x^2} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}x) \right].$
- (d) $\int \frac{x}{3+9x^2} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{18} \ln(3+9x^2) \right].$
- (e) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5} dx. \dots\dots\dots \left[\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+1}{2} \right) \right].$
- (f) $\int \frac{x-1}{x^2-4x+7} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} \ln(x^2-4x+7) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{3}} \right].$
- (g) $\int \frac{\sin x}{\cos x - 1} dx. \dots\dots\dots [-\ln |\cos x - 1|].$
- (h) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt[4]{\sin x + \cos x}} dx. \dots\dots\dots \left[-\frac{4}{3} \sqrt[4]{(\sin x + \cos x)^3} \right].$

3. Počítajme integrály z racionálnych funkcií:

- (a) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \frac{x^2|x-2|^5}{|x+2|^3} \right].$
- (b) $\int \frac{x^2-x+2}{(x-3)(x-1)^2} dx. \dots\dots\dots \left[2 \ln |x-3| - \ln |x-1| + \frac{1}{x-1} \right].$
- (c) $\int \frac{3x^2-11x+7}{(x-3)(x^2-4x+4)} dx. \dots\dots\dots \left[2 \ln |x-2| + \ln |x-3| - \frac{3}{x-2} \right].$
- (d) $\int \frac{x^3+3x^2+1}{x^2+x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x^2}{2} + 2x + \ln |x| - 3 \ln |x+1| \right].$
- (e) $\int \frac{3x^2-x-14}{x^3+x^2-5x+3} dx. \dots\dots\dots \left[\ln |x+3| + 2 \ln |x-1| + \frac{3}{x-1} \right].$
- (f) $\int \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x^2+2x+3)} dx.$
- $\left[\ln |x+1| + \frac{1}{2} \ln |x^2+2x+3| - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right].$
- (g) $\int \frac{x^2}{(1-x^2)(1+x^2)} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{4} \ln |1+x| - \frac{1}{4} \ln |1-x| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \right].$

- (h) $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} \ln \frac{8}{5} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right].$
- (i) $\int_3^4 \frac{2x^2-3x+10}{x^3-7x^2+10x} dx. \dots\dots\dots \left[\ln \frac{1}{24} \right].$
- (j) $\int_1^2 \frac{x^3-3x^2-10x+6}{x^2-4x-5} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{5}{2} - \ln 3 \right].$
- (k) $\int_2^3 \frac{x^2+2}{x^3-3x^2+3x-1} dx. \dots\dots\dots \left[\ln 2 + \frac{17}{8} \right].$

4. Počítajme metódou "Per partes":

- (a) $\int x \ln x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \right].$
- (b) $\int x e^{-x} dx. \dots\dots\dots [-x e^{-x} - e^{-x}].$
- (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{(1+2e^{\pi})}{5} \right].$
- (d) $\int \operatorname{arctg} x dx. \dots\dots\dots \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right].$
- (e) $\int x^2 3^x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{3^x}{\ln 3} \left(x^2 - \frac{2x}{\ln 3} + \frac{2}{(\ln 3)^2} \right) \right].$
- (f) $\int x \operatorname{arccotg} x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arccotg} x + \frac{x}{2} \right].$
- (g) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx. \dots\dots\dots [\pi^2 - 4].$
- (h) $\int_0^1 x \operatorname{arccotg} x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{2} \right].$
- (i) $\int \arccos x dx. \dots\dots\dots \left[x \arccos x - \sqrt{1-x^2} \right].$
- (j) $\int_1^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx. \dots\dots\dots \left[\frac{5\pi}{12} - \frac{(\sqrt{3}-1)}{2} \right].$
- (k) $\int \ln(x^2 - 2x - 3) dx.$
 $\left[x \ln(x^2 - 2x - 3) - 2x + \ln|x+1| - 3 \ln|x-3| \right].$
- (l) $\int \ln(x^2 - 6x + 9) dx.$
 $\left[x \ln(x^2 - 6x + 9) - 2x - 6 \ln|x-3| \right].$
- (m) $\int \ln(x^2 + 2x + 3) dx.$
 $\left[(x+1) \ln(x^2 + 2x + 3) - 2x + \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{(x+1)}{\sqrt{2}} \right].$
- (n) $\int x^2 \operatorname{arctg} (x-1) dx.$
 $\left[\frac{1}{3} \left((x^3 + 2) \operatorname{arctg} (x-1) - \frac{x^2}{2} - 2x - \ln(x^2 - 2x + 2) \right) \right].$

5. Pomocou prvej vety o substitúcii počítajme integrály:

- (a) $\int \frac{x}{\sqrt{2-5x^2}} dx. \dots\dots\dots \left[-\frac{1}{5}\sqrt{2-5x^2}\right].$
 (b) $\int \frac{e^x}{4e^{2x}-8e^x+13} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}(e^x-1)\right)\right].$
 (c) $\int \frac{2e^{2x}-3e^x+10}{e^{2x}-7e^x+10} dx. \dots\dots\dots [x-2\ln|e^x-2|+3\ln|e^x-5|].$
 (d) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x+2\cos x+5} dx. \dots\dots\dots \left[-\ln(\cos^2 x+2\cos x+5)+\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x+1}{2}\right)\right].$
 (e) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x+\sin x-2} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{3}\ln|\sin x-1|+\frac{2}{3}\ln(\sin x+2)\right].$
 (f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x+\sin x-6} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{5}\ln\frac{3}{8}\right].$
 (g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x+\cos x-6} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{5}\ln\frac{16}{27}\right].$

6. Pomocou druhej vety o substitúcii počítajme integrály:

- (a) $\int \frac{e^x+10}{e^{2x}-2e^x+5} dx. \dots\dots\dots \left[2x-\ln(e^{2x}-2e^x+5)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x-1}{2}\right].$
 (b) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt{x^5}} dx. \dots\dots\dots \left[6\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}+\ln(\sqrt[6]{x}+1)\right)\right].$
 (c) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx. \dots\dots\dots \left[\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right|+2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right].$
 (d) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x} dx. \dots\dots\dots \left[2\sqrt{1+x}+\ln|\sqrt{1+x}-1|-\ln|1+\sqrt{1+x}|\right].$
 (e) $\int \frac{\sqrt{2x+3+x}}{\sqrt{2x+3-x}} dx. \dots\dots\dots \left[-\frac{t^2}{2}-4t-9\ln|t-3|+\ln|t+1|, t=\sqrt{2x+3}\right].$
 (f) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx. \dots\dots\dots [\ln 9].$
 (g) $\int \frac{1}{\sqrt{8-6x-9x^2}} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{3}\left(\arcsin\left(x+\frac{1}{3}\right)\right)\right].$
 (h) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}} dx. \dots\dots\dots \left[\ln\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right].$
 (i) $\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-x+1}} dx. \dots\dots\dots \left[2\ln|t|+\frac{1}{2}\ln|2t+1|+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1}, t=\sqrt{x^2-x+1}-x\right].$
 (j) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+\cos x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right].$
 (k) $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x} dx. \dots\dots\dots \left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\ln\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right].$
 (l) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{4-5\sin x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{1}{3}\ln 2\right].$
 (m) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2\right].$
 (n) $\int \frac{1}{7\cos^2 x+2\sin^2 x} dx. \dots\dots\dots \left[\frac{\sqrt{14}}{14}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\operatorname{tg} x\right)\right].$

7. Vypočítajte $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$ $[4 - \pi]$.
8. Vypočítajte $\int_0^{2\pi} \cos 3x \cos 4x dx$ $[0]$.
9. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:
- (a) $y = x - 1, y^2 = 2x + 1$ $[\frac{16}{3}]$.
- (b) $y = x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = 2$ $[\frac{8}{3}(2 - \sqrt{2})]$.
10. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x .
 Oblasť je určená čiarami $y = \sin x, y = \frac{2x}{\pi}$ $[\frac{\pi^2}{6}]$.



Kapitola 2

Fourierove rady

Definícia 2.1 *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je po častiach spojitá na intervale $\langle a, a + l \rangle \subseteq A$. Potom nekonečný funkcionálny rad*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n2\pi x}{l} \right) + b_n \sin \left(\frac{n2\pi x}{l} \right) \right)$$

taký, že

$$a_n = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \cos \left(\frac{n2\pi x}{l} \right) dx \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots,$$

a

$$b_n = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \sin \left(\frac{n2\pi x}{l} \right) dx \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots,$$

*sa nazýva **trigonometrický Fourierov rad funkcie** $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ pre interval $\langle a, a + l \rangle$.*

Definícia 2.2 *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je po častiach spojitá na intervale $\langle a, a + l \rangle \subseteq A$. Potom funkciu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takú, že*

1. $\bar{f}(a) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow a+} f(x) + \lim_{x \rightarrow (a+l)-} f(x) \right),$
2. $\bar{f}(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow x+} f(t) + \lim_{t \rightarrow x-} f(t) \right), \quad \text{pre každé } x \in (a, a + l),$
3. $\bar{f}(x) = \bar{f}(x + l) \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{R},$

*nazývame **normalizované periodické pokračovanie funkcie** $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ pre interval $\langle a, a + l \rangle$.*

Veta 2.1 *Nech funkcia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ spĺňa nasledujúce podmienky:*

1. Je po častiach spojitá na intervale $\langle a, a+l \rangle \subseteq A$.
2. Funkcia f je na intervale $\langle a, a+l \rangle$ po častiach spojitou diferencovateľná. To znamená, že jej derivácia f' je na intervale $\langle a, a+l \rangle$ po častiach spojitá.
3. Nech $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je normalizované periodické pokračovanie funkcie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ pre interval $\langle a, a+l \rangle$.

Potom pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\bar{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n2\pi x}{l} \right) + b_n \sin \left(\frac{n2\pi x}{l} \right) \right),$$

kde

$$a_n = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \cos \left(\frac{n2\pi x}{l} \right) dx \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots,$$

a

$$b_n = \frac{2}{l} \int_a^{a+l} f(x) \sin \left(\frac{n2\pi x}{l} \right) dx \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots$$

To znamená, že za uvedených podmienok je trigonometrický Fourierov rad funkcie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ pre interval $\langle a, a+l \rangle$ konvergentný a jeho súčtom je normalizované periodické pokračovanie funkcie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ pre interval $\langle a, a+l \rangle$.

2.0.6 Príklady

Časť I

1.
 - Nájdime Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ pre interval $\langle -\pi, \pi \rangle$.
 - Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - Pomocou hodnoty $\bar{f} \left(\frac{\pi}{2} \right)$ nájdime súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$.

$$\left[\begin{array}{ll} a_n &= 0, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx), \\ \frac{\pi}{4} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \end{array} \right].$$

2. • Nájďme Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ pre interval $\langle -1, 1 \rangle$.
- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Pomocou hodnoty $\bar{f}(\frac{1}{2})$ nájdime súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n & = & \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi x), \\ \frac{\pi}{4} & = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \end{array} \right].$$

3. • Nájďme Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ pre interval $\langle 0, 1 \rangle$.
- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Pomocou hodnoty $\bar{f}(\frac{1}{4})$ nájdime súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_0 & = & 1, \\ a_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ b_n & = & \frac{-1}{n\pi}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n\pi} \sin(n2\pi x), \\ \frac{\pi}{4} & = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \end{array} \right].$$

4. • Funkciu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ rozviňme na intervale $(0, 1)$ do kosínusového radu.
- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}_P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Pomocou hodnoty $\bar{f}_P(0)$ nájdime súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_0 & = & 1, \\ a_n & = & \frac{2((-1)^n - 1)}{(n\pi)^2}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}P(x) & = & \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x), \\ \frac{\pi^2}{8} & = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \end{array} \right].$$

5. • Funkciu

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & \text{pre } x \in (-\infty, \frac{\pi}{2}), \\ \frac{\pi}{2}, & \text{pre } x \in (\frac{\pi}{2}, \infty) \end{cases}$$

rozviňme na intervale $(0, \pi)$ do kosínusového radu.

- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}_P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_0 & = & \frac{3\pi}{4}, \\ a_n & = & \frac{2}{n^2\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right), \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}_P(x) & = & \frac{3\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right) \cos(nx) \end{array} \right].$$

6. • Funkciu

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & \text{pre } x \in (-\infty, \frac{\pi}{2}), \\ \frac{\pi}{2}, & \text{pre } x \in (\frac{\pi}{2}, \infty) \end{cases}$$

rozviňme na intervale $(0, \pi)$ do sínusového radu.

- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n & = & \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^2\pi} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right), \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}_N(x) & = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^2\pi} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right) \sin(nx) \end{array} \right].$$

Časť II

1. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ pre interval $\langle 1, 3 \rangle$.

- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Pomocou priameho výpočtu overme, že $\bar{f}(1) = \bar{f}(3) = 5$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_0 & = & 10, \\ a_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ b_n & = & \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi x), \\ \bar{f}(1) & = & 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi) = 5, \\ \bar{f}(3) & = & 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(3n\pi) = 5 \end{array} \right].$$

2. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi-2x}{4}$ pre interval $\langle 0, \pi \rangle$.
- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - Pomocou hodnoty $\bar{f}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ nájdime súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n & = & \frac{1}{2n}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \sin(n2x), \\ \frac{\pi}{4} & = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \end{array} \right].$$

3. • Funkciu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi-2x}{4}$ rozviňme na intervale $(0, \pi)$ do kosínusového radu.
- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}_P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - Pomocou hodnoty $\bar{f}_P(0)$ nájdime súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_0 & = & 0, \\ a_n & = & \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}_P(x) & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} \cos(nx), \\ \frac{\pi^2}{8} & = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \end{array} \right].$$

4. • Funkciu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi-2x}{4}$ rozviňme na intervale $(0, \pi)$ do sínusového radu.

- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}_N: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n & = & \frac{1+(-1)^n}{2n}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}_N(x) & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n} \sin(nx), \end{array} \right].$$

5. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ pre interval $\langle -1, 1 \rangle$.

- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Pomocou hodnoty $\bar{f}(1)$ nájdime súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_0 & = & 1, \\ a_n & = & \frac{2((-1)^n-1)}{(n\pi)^2}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n-1)}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x), \\ \frac{\pi^2}{8} & = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \end{array} \right].$$

6. • Pre interval $\langle 0, \pi \rangle$ nájdime Fourierov rad funkcie

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & \text{pre } x \in \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right), \\ \pi - x, & \text{pre } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \infty\right) \end{cases}.$$

- Náčrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Pomocou hodnoty $\bar{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ nájdime súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_0 & = & \frac{\pi}{2} \\ a_n & = & \frac{(-1)^{n-1}}{n^2\pi}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2\pi} \cos(2nx), \\ \frac{\pi^2}{8} & = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \end{array} \right].$$

7. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - |x|$ pre interval $\langle -1, 1 \rangle$.
- Náčrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - Pomocou hodnoty $\bar{f}(0)$ nájdime súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_0 & = & 1, \\ a_n & = & \frac{2(1-(-1)^n)}{(n\pi)^2}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x), \\ \frac{\pi^2}{4} & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} \end{array} \right].$$

8. • Pre interval $\langle -2, 2 \rangle$ nájdime Fourierov rad funkcie

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -1, & \text{pre } x \in (-\infty, 0), \\ 1, & \text{pre } x \in (0, \infty) \end{cases}.$$

- Náčrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Presvedčme sa, že $\bar{f}(0) = 0$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n & = & \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \\ \bar{f}(0) & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} \sin(0) = 0 \end{array} \right].$$

9. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$ pre interval $\langle -\pi, \pi \rangle$.
- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Pomocou hodnoty $\bar{f}(0)$ nájdime súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_0 & = & \frac{\pi}{2}, \\ a_n & = & \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ b_n & = & \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \right), \\ \frac{-\pi^2}{4} & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \end{array} \right].$$

10. • Pre interval $\langle 1, 3 \rangle$ nájdime Fourierov rad funkcie

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pre } x \in (-\infty, 2), \\ 3 - x, & \text{pre } x \in (2, \infty) \end{cases}.$$

- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Ak vieme, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, tak ukážme, že $\bar{f}(1) = \bar{f}(3) = \frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_0 & = & \frac{3}{2}, \\ a_n & = & \frac{1-(-1)^n}{(\pi n)^2}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ b_n & = & \frac{(-1)^n}{\pi n}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{(\pi n)^2} \cos(n\pi x) + \frac{(-1)^n}{\pi n} \sin(n\pi x) \right), \\ \bar{f}(1) & = & \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{(\pi n)^2} \cos(n\pi) + \frac{(-1)^n}{\pi n} \sin(n\pi) \right) = \\ & = & \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{(\pi n)^2} (-1)^n = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\ \bar{f}(3) & = & \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n}{(\pi n)^2} \cos(3n\pi) + \frac{(-1)^n}{\pi n} \sin(3n\pi) \right) = \\ & = & \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{(\pi n)^2} (-1)^n = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{array} \right].$$

11. • Na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$ rozvineme do Fourierovho radu funkciu

$$\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{pre } x > 0, \\ 0, & \text{pre } x = 0, \\ -1, & \text{pre } x < 0 \end{cases}$$

- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Pomocou hodnoty $\bar{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ nájdime súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n & = & \frac{2((-1)^{n+1}+1)}{n\pi}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^{n+1}+1)}{n\pi} \sin nx, \\ \frac{\pi}{4} & = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \end{array} \right].$$

12. • Na intervale $\langle -1, 1 \rangle$ rozvineme do Fourierovho radu funkciu

$$f : \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pre } -1 \leq x \leq 0, \\ 2-x, & \text{pre } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Aký vzťah dostaneme pre $x = 1$?

$$\left[\begin{array}{l} a_0 = \frac{3}{2}, \\ a_n = \frac{((-1)^{n+1}+1)}{(n\pi)^2}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ b_n = \frac{((-1)^{n+1}+2)}{n\pi}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{((-1)^{n+1}+1)}{(n\pi)^2} \cos n\pi x + \frac{((-1)^{n+1}+2)}{n\pi} \sin n\pi x \right), \\ \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \end{array} \right].$$

13. • Funkciu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x$ rozviňme na intervale $(0, 1)$ do sínusového radu.
- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - Pomocou hodnoty $\bar{f}_N\left(\frac{1}{2}\right)$ nájdime súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)}$.

$$\left[\begin{array}{l} a_n = 0, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n = \frac{2((-1)^{n+1}+2)}{n\pi}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^{n+1}+2)}{n\pi} \sin(\pi n x), \\ \frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} \end{array} \right].$$

14. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ pre interval $\langle -\pi, \pi \rangle$.
- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - Pomocou hodnoty $\bar{f}(\pi)$ nájdime súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

$$\left[\begin{array}{l} a_0 = \frac{2\pi^2}{3}, \\ a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ b_n = 0, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx), \\ \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \end{array} \right].$$

15. • Nájďme Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ pre interval $\langle -2, 2 \rangle$.
- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Pomocou hodnoty $\bar{f}(0)$ nájdime súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_0 & = & \frac{8}{3}, \\ a_n & = & \frac{16(-1)^n}{(n\pi)^2}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^n}{(n\pi)^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \\ \frac{\pi^2}{12} & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \end{array} \right].$$

16. • Nájďme Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ pre interval $\langle -2, 0 \rangle$.
- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Pomocou hodnoty $\bar{f}(0)$ nájdime súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_0 & = & \frac{8}{3}, \\ a_n & = & \frac{4}{(n\pi)^2}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ b_n & = & \frac{4}{(n\pi)}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x) + \frac{4}{(n\pi)} \sin(n\pi x) \right), \\ \frac{\pi^2}{6} & = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \end{array} \right].$$

17. • Funkciu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ rozviňme na intervale $(0, 2)$ do sínusového radu.
- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Ak vieme, že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$, tak pomocou hodnoty $\bar{f}_N(1)$ nájdime súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n & = & \frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{16((-1)^n - 1)}{(n\pi)^3}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}_N(x) & = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{16((-1)^n - 1)}{(n\pi)^3} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \\ \frac{\pi^3}{32} & = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} \end{array} \right].$$

Náročnejšie príklady

1. • Pre interval $\langle -1, 1 \rangle$ nájdime Fourierov rad funkcie

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\cos \pi x}{|\cos \pi x|}, & \text{pre } x \neq \frac{2k-1}{2}, \\ 0, & \text{pre } x = \frac{2k-1}{2}. \end{cases}$$

- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Pomocou hodnoty $\bar{f}(0)$ nájdime súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_0 & = & 0, \\ a_n & = & \frac{4}{\pi n} \left(\sin \frac{\pi n}{2} \right), \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)} \cos(2k-1)\pi x, \\ \frac{\pi}{4} & = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \end{array} \right].$$

2. • Na intervale $\langle 0, 2 \rangle$ rozvineme do Fourierovho radu funkciu

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), & \text{pre } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 0, & \text{pre } x \in (1, 2) \end{cases}$$

- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Pomocou hodnoty $\bar{f}(1)$ nájdime súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_n & = & \frac{2}{\pi(1-4n^2)}, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n & = & \frac{(-1)^n 4n}{\pi(1-4n^2)}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi(1-4n^2)} (2 \cos n\pi x + (-1)^n 4n \sin n\pi x), \\ \frac{\pi-2}{4} & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} \end{array} \right].$$

3. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin(\sin x)$ pre interval $\langle -\pi, \pi \rangle$.
 • Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 • Aký vzťah dostaneme pre $x = \frac{\pi}{2}$?

$$\left[\begin{array}{lcl} a_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n & = & \frac{4}{\pi n^2} \sin \frac{\pi n}{2}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi n^2} \sin \frac{\pi n}{2} \right) \sin nx = \\ & = & \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} \right) \sin(2k-1)x, \\ \frac{\pi^2}{8} & = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \end{array} \right].$$

4. • Na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$ rozvineme do Fourierovho radu periodickú funkciu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s periódou 2π , ktorá je definovaná takto:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{pre } x \in \langle -\pi, \frac{-\pi}{2} \rangle \cup \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle, \\ 0, & \text{pre } \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 • Aký vzťah dostaneme pre $x = 0$?

$$\left[\begin{array}{lcl} a_0 & = & 2, \\ a_n & = & \frac{-4}{\pi n} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right), \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi n} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \cos nx, \\ \frac{-\pi}{4} & = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \end{array} \right].$$

5. • Nájďte Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |\cos x|$ pre interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.
- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Aký vzťah dostaneme pomocou hodnoty $\bar{f}(0)$?

$$\left[\begin{array}{lcl} a_n & = & \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)} \cos 2nx, \\ \frac{\pi-2}{4} & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \end{array} \right].$$

6. • Na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$ rozvineme do Fourierovho radu periodickú funkciu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s periódou 2π , pričom

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{pre } x \in \langle 0, \pi \rangle, \\ 0, & \text{pre } x \in \langle \pi, 2\pi \rangle \end{cases}$$

- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Pomocou hodnoty $\bar{f}(0)$ nájdime súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} a_n & = & \frac{(1+(-1)^n)}{\pi(1-n^2)}, \quad \text{pre } n = 0, 2, 3, \dots, \\ a_1 & = & 0, \\ b_1 & = & \frac{1}{2}, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 2, 3, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+(-1)^n)}{\pi(1-n^2)} \cos nx, \\ \frac{1}{2} & = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \end{array} \right].$$

7. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ pre interval $\langle -2, 2 \rangle$.
- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Aký vzťah dostaneme pomocou hodnoty $\bar{f}(2)$?

$$\left[\begin{array}{l} a_n = \frac{2(-1)^n(e^2 - e^{-2})}{4 + n^2\pi^2}, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n = \frac{(-1)^{n+1}n\pi(e^2 - e^{-2})}{4 + n^2\pi^2}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) = \frac{(e^2 - e^{-2})}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n(e^2 - e^{-2})}{4 + n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{(-1)^{n+1}n\pi(e^2 - e^{-2})}{4 + n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \right), \\ \bar{f}(2) = \frac{(e^2 + e^{-2})}{2} = \frac{(e^2 - e^{-2})}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n(e^2 - e^{-2})}{4 + n^2\pi^2} \cos n\pi, \\ 0.1343286 = \frac{e^2 + 3e^{-2}}{8(e^2 - e^{-2})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 + n^2\pi^2} \end{array} \right].$$

8. • Funkciu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^{-x}$ rozviňme na intervale $(0, 1)$ do kosínusového radu.
- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}_P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Aký vzťah dostaneme pomocou hodnoty $\bar{f}_P(0)$?

$$\left[\begin{array}{l} a_n = \frac{4(1 - (-1)^n e^{-1})}{1 + n^2\pi^2}, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n = 0, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}_P(x) = 2(1 - e^{-1}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1 - (-1)^n e^{-1})}{1 + n^2\pi^2} \cos n\pi x, \\ \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e - (-1)^n}{1 + n^2\pi^2} \end{array} \right].$$

9. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ pre interval $\langle -\pi, \pi \rangle$.
- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\left[\begin{array}{l} a_n = 0, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n = \frac{2n(-1)^{n+1} \sinh \pi}{\pi(n^2 + 1)}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^{n+1} \sinh \pi}{\pi(n^2 + 1)} \sin nx \end{array} \right].$$

10. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(\sqrt{2}x)$ pre interval $\langle -\pi, \pi \rangle$.
- Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Aký vzťah dostaneme pomocou hodnoty $\bar{f}(0)$?

$$\left[\begin{array}{lcl} a_n & = & \frac{\sin(\sqrt{2}\pi)(-1)^n 2\sqrt{2}}{\pi(2-n^2)}, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \frac{\sin(\sqrt{2}\pi)}{\sqrt{2}\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{2}\pi)(-1)^n 2\sqrt{2}}{\pi(2-n^2)} \cos nx \\ \frac{\sqrt{2}\pi - \sin(\sqrt{2}\pi)}{4 \sin(\sqrt{2}\pi)} & = & -1,4023 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2-n^2} \end{array} \right].$$

11. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\sqrt{2}x)$ pre interval $\langle -\pi, \pi \rangle$.
 • Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 • Aký vzťah dostaneme pomocou hodnoty $\bar{f}(\frac{\pi}{2})$?

$$\left[\begin{array}{lcl} a_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n & = & \frac{2n(-1)^n \sin(\sqrt{2}\pi)}{\pi(2-n^2)}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^n \sin(\sqrt{2}\pi)}{\pi(2-n^2)} \sin nx \\ \frac{\pi}{4 \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}}} & = & -1,297 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)}{2-(2k-1)^2} \end{array} \right].$$

12. • Nájdime Fourierov rad funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos x$ pre interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.
 • Načrtnime graf jeho súčtu $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 • Aký vzťah dostaneme pomocou hodnoty $\bar{f}(\frac{\pi}{4})$?

$$\left[\begin{array}{lcl} a_n & = & 0, \quad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n & = & \frac{16n(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)^2}, \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots, \\ \bar{f}(x) & = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16n(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)^2} \sin 2nx, \\ \frac{\pi^2}{64\sqrt{2}} & = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)(-1)^{k+1}}{(16k^2-16k+3)^2} \end{array} \right].$$



Kapitola 3

Diferenciálny počet FVP

3.1 Množiny

Znakom $\mathbb{R}^m$ budeme označovať množinu

$$\mathbb{R}^m = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ pre } i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Prvky množiny $\mathbb{R}^m$ nazývame body, alebo vektory.

Na množine $\mathbb{R}^m$ definujeme dve operácie

1. Súčet vektorov

Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ sú dva vektory z $\mathbb{R}^m$.

Potom ich **súčtom** nazývame vektor $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ taký, že

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_m) + (y_1, y_2, \dots, y_m) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m).$$

2. Súčin skaláru a vektora

Nech (skalár) $c \in \mathbb{R}$ a (vektor) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Potom **súčinom skaláru c a vektora $\mathbf{x}$** nazývame vektor

$$c\mathbf{x} = c(x_1, x_2, \dots, x_m) = (cx_1, cx_2, \dots, cx_m).$$

Poznamenávame, že množina $\mathbb{R}^m$ spolu s uvedenými operáciami tvorí lineárny priestor.

Na množine $\mathbb{R}^m$ ďalej definujeme:

1. Skalárny súčin vektorov

Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ sú dva vektory z $\mathbb{R}^m$.

Potom ich **skalárnym súčinom** nazývame číslo (skalár)

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m.$$

2. Normu (absolútnu hodnotu) vektora

Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Potom **normou vektora $\mathbf{x}$** nazývame číslo

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}.$$

3. Vzdialenosť bodov

Nech $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ sú dva body z $\mathbb{R}^m$. Potom ich **vzdialenosťou** nazývame číslo

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2}.$$

Definícia 3.1 Nech $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ a $\varepsilon > 0$. **Epsilonovým okolím bodu $\mathbf{a}$** nazývame množinu $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \varepsilon\}$. **Prstencovým epsilonovým okolím bodu $\mathbf{a}$** nazývame množinu $\mathcal{O}_\varepsilon^o(\mathbf{a}) = \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{a}\}$.

V prípade $\mathbb{R}^1$ definujeme aj epsilonové okolia $\pm\infty$. Množinu $\mathcal{O}_\varepsilon(\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$ nazývame ε -ovým okolím bodu ∞ . Prstencové ε -ové okolie $\mathcal{O}_\varepsilon^o(\infty)$ definujeme predpisom $\mathcal{O}_\varepsilon^o(\infty) = \mathcal{O}_\varepsilon(\infty)$. Podobne definujeme epsilonové a prstencové epsilonové okolie mínus nekonečna vzťahom $\mathcal{O}_\varepsilon^o(-\infty) = \mathcal{O}_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$.

Definícia 3.2 Nech $A \subseteq \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. Budeme hovoriť, že bod $\mathbf{a}$ je **hromadným bodom množiny A** , ak v každom $\mathcal{O}_\varepsilon^o(\mathbf{a})$ leží bod množiny A .

Definícia 3.3 Nech $A \subseteq \mathbb{R}^m$. **Komplementom množiny A** nazývame množinu $CA = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x} \notin A\}$.

Definícia 3.4 Budeme hovoriť, že **množina $A \subseteq \mathbb{R}^m$ je otvorená**, ak pre každé $\mathbf{a} \in A$ existuje $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset A$.

Ak množina $A \subseteq \mathbb{R}^m$ obsahuje všetky svoje hromadné body, tak sa nazýva **uzavretá množina**.

Veta 3.1 Množina $A \subseteq \mathbb{R}^m$ je otvorená práve vtedy, keď jej komplement CA je uzavretá množina.

Definícia 3.5 Budeme hovoriť, že **množina $A \subseteq \mathbb{R}^m$ je ohraničená**, ak existuje $\varrho > 0$ také, že $A \subset \mathcal{O}_\varrho(\mathbf{0})$.

3.2 Limita a spojitost funkcie

Definícia 3.6 Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{a}$ je hromadným bodom množiny A .

Ak pre každé $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{b})$ existuje $\mathcal{O}_\delta^o(\mathbf{a})$ také, že $f(\mathcal{O}_\delta^o(\mathbf{a}) \cap A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{b})$, hovoríme, že **funkcia $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ má v bode $\mathbf{a}$ limitu $\mathbf{b}$** . Píšeme $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Definícia 3.7 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{a} \in A$ je hromadným bodom množiny A . Ak $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$, budeme hovoriť, že **funkcia** $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ **je spojitá v bode $\mathbf{a}$** .*

*Ak funkcia f je spojitá v každom bode $\mathbf{a} \in C \subset A$, tak budeme hovoriť, že funkcia f je **spojitá na množine C** .*

*Ak funkcia f je spojitá v každom bode $\mathbf{a} \in A$, tak budeme hovoriť, že **funkcia f je spojitá**.*

Veta 3.2 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $g : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nech $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^n$ a $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^n$. Nech $c \in \mathbb{R}$. Potom*

1. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (cf)(\mathbf{x}) = c\mathbf{b}_1$,
2. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f + g)(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$,
3. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} |f|(\mathbf{x}) = |\mathbf{b}_1|$.

Dôsledok 3.1 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $g : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ sú spojité funkcie a $c \in \mathbb{R}$. Potom*

1. $(cf) : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá funkcia.
2. $(f + g) : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá funkcia.
3. $|f| : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia.

Veta 3.3 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = b_2 \in \mathbb{R}$. Potom*

1. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (fg)(\mathbf{x}) = b_1 b_2$,
2. ak $b_2 \neq 0$ a $g(\mathbf{x}) \neq 0$ pre každé $\mathbf{x} \in A$, tak

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \left(\frac{f}{g} \right) (\mathbf{x}) = \frac{b_1}{b_2},$$

Dôsledok 3.2 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité funkcie Potom*

1. $(fg) : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia.
2. Ak $g(\mathbf{x}) \neq 0$ pre každé $\mathbf{x} \in A$, tak $\left(\frac{f}{g} \right) : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia.

Definícia 3.8 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $C \subset A$. Potom funkciu $((f|C)) : \mathbb{R}^m \supset C \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(f|C)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ pre každé $\mathbf{x} \in C$, nazývame zúženie funkcie f na množine C .*

Veta 3.4 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ je hromadným bodom množiny $C \subset A$. Nech $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Potom aj $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f|_C)(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.*

Dôsledok 3.3 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ je hromadným bodom množiny $C_1 \subset A$ a aj množiny $C_2 \subset A$. Nech $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f|_{C_1})(\mathbf{x}) \neq \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f|_{C_2})(\mathbf{x})$. Potom $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ neexistuje. (Ak by existovala, tak by museli existovať limity všetkých zúžení a tieto limity by museli byť navzájom si rovné.)*

Veta 3.5 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ je hromadným bodom množiny $C_1 \subset A$ a aj $C_2 \subset A$. Nech $C_1 \cup C_2 = A$. Ak $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f|_{C_1})(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f|_{C_2})(\mathbf{x})$, potom aj $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.*

Veta 3.6 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$ a $g : \mathbb{R}^n \supset B \rightarrow \mathbb{R}^k$. Nech $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ a $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{b}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$. Nech je splnená aspoň jedna z nasledujúcich podmienok:*

- *Pre každé $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{a}\}$ je $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{b}$.*
- *Funkcia g je spojitá v bode $\mathbf{b}$.*

Potom $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (g \circ f)(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{c}$.

Veta 3.7 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$ je spojitá v bode $\mathbf{a}$ a funkcia $g : \mathbb{R}^n \supset B \rightarrow \mathbb{R}^k$ je spojitá v bode $f(\mathbf{a})$. Potom funkcia $(g \circ f) : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^k$ je spojitá v bode $\mathbf{a}$.*

Dôsledok 3.4 *Zložená funkcia zo spojitých funkcií je spojitá.*

Veta 3.8 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ a $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ je hromadným bodom množiny A . Potom $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ práve vtedy, keď $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = b_i$ pre $i = 1, \dots, n$.*

Veta 3.9 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ a $\mathbf{a} \in A$ je hromadným bodom množiny A . Potom funkcia f je spojitá v bode $\mathbf{a}$ práve vtedy, keď sú v tomto bode spojité funkcie $f_i : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ pre $i = 1, 2, \dots, n$.*

Dôsledok 3.5 *Funkcia je spojitá práve vtedy, keď sú spojité jej zložky.*

V prípade, že uvažujeme o jednozložkových funkciách typu $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, môžeme uvažovať o nevlastných limitách a aj o nerovnostiach medzi limitami.

Definícia 3.9 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia a $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \in \{\infty, -\infty\}$. Potom hovoríme, že **funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ nevlastnú limitu**.*

Veta 3.10 *Nech $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty$. Potom $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (-f(\mathbf{x})) = -\infty$.*

Veta 3.11 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty$ a existuje $k \in \mathbb{R}$ také, že $g(\mathbf{x}) \geq k$ pre každé $\mathbf{x} \in A$. Potom $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f + g)(\mathbf{x}) = \infty$.*

Veta 3.12 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \infty$ a existuje $k \in \mathbb{R}$ také, že $k > 0$ a $g(\mathbf{x}) \geq k$ pre každé $\mathbf{x} \in A$. Potom $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (f \cdot g)(\mathbf{x}) = \infty$.*

Veta 3.13 *Nech $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} |f|(\mathbf{x}) = \infty$. Potom $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{1}{f}(\mathbf{x}) = 0$.*

Veta 3.14 *Nech $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = 0$ a pre každé $\mathbf{x} \in A$ je $f(\mathbf{x}) > 0$. Potom $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{1}{f}(\mathbf{x}) = \infty$.*

Veta 3.15 *Nech $f : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ a $h : \mathbb{R}^m \supset A \rightarrow \mathbb{R}$. Potom*

1. *Ak pre každé $\mathbf{x} \in A$ je $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$, tak v prípade existencie vlastných limit $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ a $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x})$, platí: $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \leq \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x})$.*
2. *Ak pre každé $\mathbf{x} \in A$ je $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ a $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} h(\mathbf{x})$, tak existuje aj $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x})$ a platí: $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} h(\mathbf{x})$.*

3.2.1 Príklady

1. Nájdite a načrtnite definičný obor nasledujúcich funkcií:

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 25}$.

$$[D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 25\}].$$

(b) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$.

$$[D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 16\}].$$

(c) $f(x, y) = \ln(-x - y)$.

$$[D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < -y\}].$$

(d) $f(x, y, z) = \ln(1 - x^2 - y^2 + z^2)$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Jednodielny rotačný hyperboloid,} \\ D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 < 1\} \end{array} \right].$$

(e) $f(x, y, z) = \arccos(2x - 1) + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt{y} + \ln(4 - z^2)$.

$$[D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad -2 < z < 2\}].$$

(f) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 + 2x - 4y}$.

$$[D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y + 2)^2 \leq 9\}].$$

2. Vypočítajte nasledujúce limity

- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} \frac{x}{x+y} \dots\dots\dots [\frac{2}{5}]$.
- (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y} \dots\dots\dots [\text{neexistuje}]$.
- (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} \frac{x}{x+y} \dots\dots\dots [\text{neexistuje}]$.
- (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y-3}{x+y-5} \dots\dots\dots [\frac{3}{5}]$.
- (e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} \frac{y-3}{x+y-5} \dots\dots\dots [\text{neexistuje}]$.
- (f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} \frac{(2x+y)^2-9}{4xy+2y^2+6y} \dots\dots\dots [-3]$.
- (g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} \dots\dots\dots [\frac{3}{8}]$.
- (h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} \frac{\sin x+2}{xy+2x-y} \dots\dots\dots [\frac{\sin 2+2}{7}]$.
- (i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{xy} \dots\dots\dots [0]$.
- (j) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x+yz-xz+1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}-1} \dots\dots\dots [\infty]$.
- (k) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3+5y^3}{x^2+y^2} \dots\dots\dots [0]$.
- (l) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y} \dots\dots\dots [\text{neexistuje}]$.
- (m) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{xy+2x-y}, (\text{polož } y = 2x \text{ a } y = 0) \dots\dots\dots [\text{neexistuje}]$.
- (n) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, (\text{polož } y = \sqrt{x} \text{ a } x = 0) \dots\dots\dots [\text{neexistuje}]$.
- (o) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x-y}, (\text{polož } y = \sin x, \text{ alebo } y = x-x^2) [\text{neexistuje}]$.
- (p) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^3+y}, (\text{polož } x = \sqrt[3]{y^3-y}) \dots\dots\dots [\text{neexistuje}]$.
- (q) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, (\text{polož } y = x^2) \dots\dots\dots [\text{neexistuje}]$.
- (r) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2-\sqrt{4-xy}}{xy} \dots\dots\dots [\frac{1}{4}]$.
- (s) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \dots\dots\dots [\sqrt{2}]$.
- (t) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \dots\dots\dots [\text{neexistuje}]$.
- (u) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} \dots\dots\dots [12]$.
- (v) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{3y^2-3xy-6y}{1-\sqrt{x-y+3}} \dots\dots\dots [12]$.
- (w) $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} \frac{4-\sqrt{x+3y+1}}{15-x-3y} \dots\dots\dots [\frac{1}{8}]$.
- (x) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}} \dots\dots\dots [e]$.
- (y) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} \dots\dots\dots [1]$.

3. Vypočítajte nasledujúce limity

- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{xy} \dots\dots\dots [1]$.

- (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,0)} \frac{\sin xy}{xy} \dots\dots\dots [1] .$
 (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{\sin xy}{xy} \dots\dots\dots [1] .$
 (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{y} \dots\dots\dots [0] .$
 (e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,0)} \frac{\sin xy}{y} \dots\dots\dots [3] .$
 (f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{\sin xy}{y} \dots\dots\dots [0] .$
 (g) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,1)} \frac{\sin(x+y-z-1)}{x+y-z-1} \dots\dots\dots [1] .$
 (h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{tg} xy}{y} \dots\dots\dots [0] .$
 (i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,0)} \frac{\operatorname{tg} xy}{y} \dots\dots\dots [3] .$

4. Nech

(a)

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0, 0)$[Je spojitá v $(0, 0)$].

(b)

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0, 0)$[Nie je spojitá v $(0, 0)$].

(c)

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1, & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0, 0)$[Je spojitá v $(0, 0)$].

(d)

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}, & \text{pre } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0, & \text{pre } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0, 0, 0)$[Je spojitá v $(0, 0, 0)$].

(e)

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^3 + y^3 + z^3}, & \text{pre } x^3 + y^3 + z^3 \neq 0, \\ 0, & \text{pre } x^3 + y^3 + z^3 = 0. \end{cases}$$

Vyšetrite spojitosť v bode $(0, 0, 0)$[Nie je spojitá v $(0, 0, 0)$].

(f)

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 2, & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitost v bode $(0, 0)$[Je spojitá v $(0, 0)$].

(g)

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2}, & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1, & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitost v bode $(0, 0)$ [Nie je spojitá v $(0, 0)$].

(h)

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}, & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitost v bode $(0, 0)$[Je spojitá v $(0, 0)$].

(i)

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}, & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite spojitost v bode $(0, 0)$ [Nie je spojitá v $(0, 0)$].

(j)

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(6xy)}{y}, & \text{pre } y \neq 0, \\ k, & \text{pre } (x, y) = (x, 0). \end{cases}$$

- Určte číslo k tak, aby táto funkcia bola spojitá v bode $(3, 0)$.

$$[k = 18].$$

- Je takto dodefinovaná funkcia spojitá aj v bode $(4, 0)$?

$$[\text{Nie je spojitá v } (4, 0)].$$

5. V nasledujúcich príkladoch je daná funkcia $f(x, y)$ a bod $\mathbf{a}$. Dodefinujte funkciu $f(x, y)$ v bode $\mathbf{a}$ tak, aby v tomto bode bola spojitá.

(a) $f(x, y) = \frac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}, \quad \mathbf{a} = (0, 0)$ $[f(0, 0) = -6]$.

(b) $f(x, y) = \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}, \quad \mathbf{a} = (2, 2)$ $[f(0, 0) = \frac{3}{8}]$.

(c) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + x - y}, \quad \mathbf{a} = (0, 0)$.

[Funkcia sa nedá dodefinovať tak, aby bola v bode $(0, 0)$ spojitá].



3.3 Diferencovateľnosť funkcie

3.3.1 Lineárne zobrazenia

Definícia 3.10 1. Funkciu $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazývame **lineárna funkcia**, ak pre každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ a $c \in \mathbb{R}$ platí

- $L(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = L(\mathbf{x}) + L(\mathbf{y})$,
- $L(c\mathbf{x}) = cL(\mathbf{x})$.

2. Pre každé lineárne zobrazenie $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ existujú $l_1, l_2, \dots, l_m \in \mathbb{R}$ také, že

$$L(\mathbf{x}) = L(x_1, x_2, \dots, x_m) = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_m x_m.$$

Maticu

$$[L] = [l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_m]$$

nazývame **matica lineárneho zobrazenia** L .

3. $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ je lineárne zobrazenie práve vtedy, keď jeho zložky

$$L_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad L_i(\mathbf{x}) = L_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = l_{i1}x_1 + l_{i2}x_2 + \dots + l_{im}x_m$$

sú lineárne zobrazenia pre $i = 1, 2, \dots, n$. Potom maticu

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1m} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nm} \end{bmatrix}$$

nazývame **matica lineárneho zobrazenia** L .

4. Je zrejmé, že pri tomto označení platí $L(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ práve vtedy, keď $[L]\mathbf{x}^T = \mathbf{y}^T$, kde $\mathbf{x}^T$ označuje transponovanú maticu riadkovej matice $\mathbf{x}$.

3.3.2 Definícia diferencovateľnosti

Definícia 3.11 Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$, A je otvorená množina a $\mathbf{a} \in A$. Nech existuje také lineárne zobrazenie $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, že

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{x} - \mathbf{a})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = 0.$$

Vtedy hovoríme, že **funkcia** f je **diferencovateľná v bode** $\mathbf{a}$. Lineárne zobrazenie $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazývame (prvý) **diferenciál funkcie** f v bode $\mathbf{a}$. Označujeme $L = \mathcal{D}f(\mathbf{a})$.

Ak funkcia f je diferencovateľná v každom bode $\mathbf{a} \in M \subseteq A$, potom hovoríme, že **funkcia f je diferencovateľná na množine M** . Ak funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná na množine A , tak hovoríme, že f je **diferencovateľná funkcia**.

Poznámka 3.1 Je zrejmé, že funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$ (A je otvorená množina) práve vtedy, keď

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - L(\mathbf{x} - \mathbf{a})}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n.$$

Veta 3.16 Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$. (A je otvorená množina.) Potom existuje taká funkcia $p : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$, že

1. $p(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
2. Funkcia $p : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá v bode $\mathbf{a}$. To znamená, že $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
3. Pre každé $\mathbf{x} \in A$ platí

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + p(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{a}|.$$

Veta 3.17 (Nútna podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$. (A je otvorená množina.) Potom je v tomto bode spojitá.

Veta 3.18 Nech funkcie $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $g : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$ sú diferencovateľné v bode $\mathbf{a} \in A$ (A je otvorená množina.) a $c \in \mathbb{R}$. Potom

- Funkcia $(cf) : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.
- Funkcia $(f + g) : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.

Veta 3.19 Nech A je otvorená množina. Funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$ práve vtedy, keď v bode $\mathbf{a}$ sú diferencovateľné jej zložky $f_i : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ pre $i = 1, 2, \dots, n$. Navyše v prípade diferencovateľnosti platí

$$\mathcal{D}f(\mathbf{a}) = (\mathcal{D}f_1(\mathbf{a}), \mathcal{D}f_2(\mathbf{a}), \dots, \mathcal{D}f_n(\mathbf{a})).$$

3.3.3 Parciálne derivácie

Definícia 3.12 1. Nech A je otvorená množina a $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in A$. Potom definujeme

$$A_i = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_m) \in A\} \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, m.$$

2. Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$. Budeme uvažovať o funkciách

$$\varphi_i : \mathbb{R} \supseteq A_i \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_i(t) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_m)$$

pre $i = 1, 2, \dots, m$.

3. Nech existuje (vlastná) derivácia

$$\begin{aligned} \varphi_i'(a_i) &= \lim_{t \rightarrow a_i} \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(a_i)}{t - a_i} \\ &= \lim_{t \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_m) - f(\mathbf{a})}{t - a_i} \\ &= \frac{\delta f(\mathbf{a})}{\delta x_i} \\ &= f_{\cdot i}(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

Toto číslo nazývame **parciálna derivácia funkcie f podľa i -tej premennej v bode $\mathbf{a}$** .

4. Nech $B_i \subseteq A$ je množina všetkých $\mathbf{a} \in A$ pre ktoré existuje $f_{\cdot i}(\mathbf{a})$. Potom funkciu

$$f_{\cdot i} : \mathbb{R}^m \supseteq B_i \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto f_{\cdot i}(\mathbf{x})$$

nazývame parciálna derivácia funkcie f podľa i -tej premennej.

3.3.4 Príklady

Vypočítajme parciálne derivácie nasledujúcich funkcií:

1. $f(x, y) = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{y} \right)$, $f_{\cdot 1}(x, y) = ?$, $f_{\cdot 2}(x, y) = ?$

$$\left[f_{\cdot 1}(x, y) = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}}, \quad f_{\cdot 2}(x, y) = \frac{-2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}} \right].$$

2. $f(x, y, z) = x^3 y^2 z + 2x - 3y + z + 5$, $f_{\cdot 1}(x, y, z) = ?$

$$[f_{\cdot 1}(x, y, z) = 3x^2 y^2 z + 2].$$

3. $f(x, y, z) = \frac{x-y}{\sqrt{z}}$, $f_{\cdot 2}(1, -3, 4) = ?$

$$[f_{\cdot 2}(1, -3, 4) = \frac{-1}{2}].$$

4. $f(x, y) = \ln(\sin xy)$, $f_{\cdot 2}(1, \frac{\pi}{2}) = ?$

$$[f_{\cdot 2}(1, \frac{\pi}{2}) = 0].$$

5. $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}$, $f_{\cdot 1}(1, 1) = ?$, $f_{\cdot 2}(2, 1) = ?$

$$[f_{\cdot 1}(1, 1) = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \quad f_{\cdot 2}(2, 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}].$$

6. $f(x, y) = e^{\sin \frac{x}{y}}$, $f_1(x, y) = ?$, $f_2(x, y) = ?$

$$\left[f_1(x, y) = e^{\sin \frac{x}{y}} \left(\cos \frac{x}{y} \right) \frac{1}{y}, \quad f_2(x, y) = e^{\sin \frac{x}{y}} \left(\cos \frac{x}{y} \right) \frac{-x}{y^2} \right].$$

7. $f(x, y) = x^{xy}$, $f_1(x, y) = ?$, $f_2(x, y) = ?$

$$[f_1(x, y) = x^{xy}(\ln x + 1)y, \quad f_2(x, y) = x^{xy}x \ln x].$$

8. $f(x, y) = (\ln x)^{\cos y}$, $f_1(x, y) = ?$, $f_2(x, y) = ?$

$$[f_1(x, y) = \cos y (\ln x)^{\cos y - 1} \cdot \frac{1}{x}, \quad f_2(x, y) = (\ln x)^{\cos y} (-\sin y) \ln(\ln x)].$$

9. $f(x, y, z) = ze^{x^3 \ln(\cos(x-y^2))}$,
 $f_1(x, y, z) = ?$, $f_2(x, y, z) = ?$, $f_3(x, y, z) = ?$

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x, y, z) = ze^{x^3 \ln(\cos(x-y^2))} \left(3x^2 \ln(\cos(x-y^2)) - \frac{x^3 \sin(x-y^2)}{\cos(x-y^2)} \right), \\ f_2(x, y, z) = ze^{x^3 \ln(\cos(x-y^2))} \frac{2x^3 y \sin(x-y^2)}{\cos(x-y^2)}, \\ f_3(x, y, z) = e^{x^3 \ln(\cos(x-y^2))} \end{array} \right].$$

10. $f(x, y, z) = x^{\frac{1}{x}} z$, $f_1(x, y, z) = ?$, $f_2(x, y, z) = ?$, $f_3(x, y, z) = ?$

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x, y, z) = x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right) z, \\ f_2(x, y, z) = 0, \\ f_3(x, y, z) = x^{\frac{1}{x}} \end{array} \right].$$

11. Nech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} + x - y, & \text{pre}(x, y) \neq (0, 0), \\ 1, & \text{pre}(x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vypočítajte $f_1(0, 0)$, $f_2(0, 0)$.

$$[f_1(0, 0) = 1, \quad f_2(0, 0) = -1].$$

12. Nech $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Vypočítajte $f_1(0, 0)$, $f_2(0, 0)$.

$$[f_1(0, 0) = 0, \quad f_2(0, 0) = 0].$$

13. Nech

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{2x-3y+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, & \text{pre}(x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0, & \text{pre}(x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Vypočítajte $f_1(0, 0, 0)$, $f_2(0, 0, 0)$, $f_3(0, 0, 0)$.

$$[f_1(0, 0, 0) = \infty, \quad f_2(0, 0, 0) = -\infty, \quad f_3(0, 0, 0) = \text{neexistuje}].$$

14. Nech $f(x, y) = (x^2 + y) \sin(x + y)$. Pomocou definície vypočítajme $f_{.1}(0, \pi)$, $f_{.2}(0, \pi)$.

$$[f_{.1}(0, \pi) = -\pi, f_{.2}(0, \pi) = -\pi].$$

15. Nech $f(x, y) = 4x^3 - 2y^2 + 3xy^2 + 5y$. Pomocou definície vypočítajme $f_{.1}(1, 2)$, $f_{.2}(1, 2)$.

$$[f_{.1}(1, 2) = 24, f_{.2}(1, 2) = 9].$$

16. Nech

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Pomocou definície vypočítajme $f_{.1}(0, 0)$, $f_{.2}(0, 0)$.

$$[f_{.1}(0, 0) = 0, f_{.2}(0, 0) = 0].$$



Veta 3.20 (Nutná podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Nech A je otvorená množina a funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$. Potom existujú parciálne derivácie $f_{.i}(\mathbf{a})$ pre $i = 1, 2, \dots, m$ a navyše

$$L(\mathbf{x}) = \mathcal{D}f(\mathbf{a})(\mathbf{x}) = \mathcal{D}f(\mathbf{a})(x_1, x_2, \dots, x_m) = f_{.1}(\mathbf{a})x_1 + f_{.2}(\mathbf{a})x_2 + \dots + f_{.m}(\mathbf{a})x_m.$$

Veta 3.21 (Postačujúca podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Uvažujme o funkcii $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$, kde A je otvorená množina a $\mathbf{a} \in A$. Nech existujú parciálne derivácie $f_{.i} : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ pre $i = 1, 2, \dots, m$ a navyše tieto parciálne derivácie sú spojité v bode $\mathbf{a}$. Potom je funkcia f diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.

Dôsledok 3.6 Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, A je otvorená množina a $\mathbf{a} \in A$. Nech parciálne derivácie $(f_j)_{.i} : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité v bode $\mathbf{a}$ pre $j = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, m$. Potom je funkcia f diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.

3.3.5 Príklady

1. Nech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}, & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1, & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite:

- existenciu $f_{.i}(0, 0)$, pre $i = 1, 2$,

- diferencovateľnosť funkcie v bode $(0, 0)$.

$[f_{\cdot i}(0, 0)]$ neexistujú. Nie je spojitá, a teda ani diferencovateľná, v $(0, 0)$.

2. Nech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- existenciu $f_{\cdot i}(0, 0)$, pre $i = 1, 2$,
- diferencovateľnosť funkcie v bode $(0, 0)$.

$[f_{\cdot 1}(0, 0) = 0 = f_{\cdot 2}(0, 0)]$, nie je spojitá, nie je diferencovateľná v $(0, 0)$.

3. Nech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite:

- existenciu $f_{\cdot i}(0, 0)$, pre $i = 1, 2$,
- diferencovateľnosť funkcie v bode $(0, 0)$.

$[f_{\cdot 1}(0, 0) = 0 = f_{\cdot 2}(0, 0)]$, nie je spojitá, nie je diferencovateľná v $(0, 0)$.

4. Nech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite:

- existenciu $f_{\cdot i}(0, 0)$, pre $i = 1, 2$,
- diferencovateľnosť funkcie v bode $(0, 0)$.

$[f_{\cdot 1}(0, 0) = 1 = f_{\cdot 2}(0, 0)]$, je spojitá, nie je diferencovateľná v $(0, 0)$.

5. Nech

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite:

- existenciu $f_{\cdot i}(0, 0)$, pre $i = 1, 2$,
- diferencovateľnosť funkcie v bode $(0, 0)$.

$[f_{\cdot 1}(0, 0) = 0 = f_{\cdot 2}(0, 0)]$, je spojitá, je diferencovateľná v $(0, 0)$,
parciálne derivácie nie sú spojité v $(0, 0)$.

6. Nech $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Vyšetrite:

- existenciu $f_{\cdot i}(0, 0)$, pre $i = 1, 2$,
- diferencovateľnosť funkcie v bode $(0, 0)$.

$[f_{\cdot 1}(0, 0) = 1 = f_{\cdot 2}(0, 0)]$, je spojitá, nie je diferencovateľná v $(0, 0)$.

7. Nech $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vyšetrite:

- existenciu $f_{\cdot i}(0, 0)$, pre $i = 1, 2$,
- diferencovateľnosť funkcie v bode $(0, 0)$.

$[f_{\cdot 1}(0, 0), f_{\cdot 2}(0, 0)]$ neexistujú, nie je diferencovateľná v $(0, 0)$.

8. Nech $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Vyšetrite:

- existenciu $f_{\cdot i}(0, 0, 0)$, pre $i = 1, 2, 3$,
- diferencovateľnosť funkcie v bode $(0, 0, 0)$.

$[f_{\cdot 1}(0, 0, 0), f_{\cdot 2}(0, 0, 0), f_{\cdot 3}(0, 0, 0)]$ neexistujú, nie je diferencovateľná v $(0, 0, 0)$.

9. Nech

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{2x-3y+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, & \text{pre } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0, & \text{pre } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Vyšetrite: diferencovateľnosť funkcie v bode $(0, 0)$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{nie je spojitá v } (0, 0, 0), \\ f_{\cdot 1}(0, 0, 0) = \infty, f_{\cdot 2}(0, 0, 0) = -\infty, f_{\cdot 3}(0, 0, 0) = \text{neexistuje}, \\ \text{Nie je diferencovateľná v } (0, 0, 0). \end{array} \right].$$



3.3.6 Geometrický význam parciálnych derivácií

Z podmienky

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + p(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{a}|$$

odvodzujeme dva dôsledky:

1. $f(\mathbf{x}) \doteq f(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x} - \mathbf{a})$.
2. V prípade funkcie dvoch premenných dostávame:

$$z = f(a, b) + f_{\cdot 1}(a, b)(x - a) + f_{\cdot 2}(a, b)(y - b)$$

je rovnica dotykovej roviny grafu funkcie f v bode $T = (a, b, f(a, b))$.

3.3.7 Príklady

1. Vypočítajte približnú hodnotu $(1,94)^2 e^{0,12} \dots [4,24]$.
2. Vypočítajte približnú hodnotu $4,004(2,002)^2(3,003)^3 \dots [434,592]$.
3. Napíšte rovnicu dotykovej roviny a normály ku grafu funkcie $f(x,y) = x^4 + 2y$ v bode $T = (1,1,?)$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{dotyková rovina: } z = 3 + 4(x-1) + 2(y-1), \\ \text{normála: } x = 1 + 4t, y = 1 + 2t, z = 3 - t \end{array} \right].$$
4. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - xy + x$ v bode $T = (1,?,2) \dots [z = 2 + 5(x-1) + y]$.
5. Napíšte rovnicu dotykovej roviny a normály ku grafu funkcie $f(x,y) = xy$ v bode $T = (?,2,2)$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{dotyková rovina: } z = 2 + 2(x-1) + (y-2), \\ \text{normála: } x = 1 + 2t, y = 2 + t, z = 2 - t \end{array} \right].$$
6. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku ploche $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ v bode $T = (1,-1,1) \dots [z = 1 - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y+1)]$.
7. Ukážte, že plochy $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ a $4 + x + 2y = \ln z$ sa dotýkajú (majú spoločnú dotykovú rovinu) v bode $T = (2,-3,1)$.
 $[z = 1 + (x-2) + 2(y+3)]$.

3.3.8 Diferencovateľnosť zloženej funkcie

Veta 3.22 (*Veta o diferencovateľnosti zloženej funkcie*) Nech $A \subseteq \mathbb{R}^m$ a $B \subseteq \mathbb{R}^n$ sú otvorené množiny. Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$ a funkcia $g : \mathbb{R}^n \supseteq B \rightarrow \mathbb{R}^k$ je diferencovateľná v bode $f(\mathbf{a}) \in B$. Potom zložená funkcia $(g \circ f) : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}^k$ je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$ a platí

$$\mathcal{D}(g \circ f)(\mathbf{a}) = \mathcal{D}g(f(\mathbf{a})) \circ \mathcal{D}f(\mathbf{a}).$$

Pre matice zložených lineárnych zobrazení platí:

$$[\mathcal{D}(g \circ f)(\mathbf{a})] = [\mathcal{D}g(f(\mathbf{a}))][\mathcal{D}f(\mathbf{a})].$$

Nech

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n, \quad f &= (f_1, f_2, \dots, f_n), \quad \mathbf{a} \in A \\ g : \mathbb{R}^n \supseteq B \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(\mathbf{a}) &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

Potom

$$[\mathcal{D}g(\mathbf{b})] = [g_{,1}(\mathbf{b}), g_{,2}(\mathbf{b}), \dots, g_{,n}(\mathbf{b})].$$

Ďalej

$$[\mathcal{D}f(\mathbf{a})] = \begin{bmatrix} f_{1.1}(\mathbf{a}) & f_{1.2}(\mathbf{a}) & \dots & f_{1.m}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{n.1}(\mathbf{a}) & f_{n.2}(\mathbf{a}) & \dots & f_{n.m}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

Potom z podmienky

$$[\mathcal{D}(g \circ f)(\mathbf{a})] = [\mathcal{D}g(\mathbf{b})][\mathcal{D}f(\mathbf{a})]$$

dostávame

$$(g \circ f)_{.k}(\mathbf{a}) = (g_{.1}(\mathbf{b})f_{1.k}(\mathbf{a}) + g_{.2}(\mathbf{b})f_{2.k}(\mathbf{a}) + \dots + g_{.n}(\mathbf{b})f_{n.k}(\mathbf{a}))_{\mathbf{b}=f(\mathbf{a})}.$$

Tento výsledok sa zapisuje symbolicky v tvare tzv. reťazového pravidla:

$$\frac{\delta(g \circ f)}{\delta x_k} = \frac{\delta g}{\delta y_1} \frac{\delta y_1}{\delta x_k} + \frac{\delta g}{\delta y_2} \frac{\delta y_2}{\delta x_k} + \dots + \frac{\delta g}{\delta y_n} \frac{\delta y_n}{\delta x_k}.$$

3.3.9 Príklady

1. Nech $f : (0, \infty) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-\infty, \infty) \times (0, 1)$, $f(x, y) = (\ln x, \cos y)$ a $g : (-\infty, \infty) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g(u, v) = (uv, \frac{u}{v}, 1)$. Nájdite maticu $[\mathcal{D}h(\mathbf{a})]$ diferenciála zloženej funkcie $h = g \circ f : (0, \infty) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ v ľubovoľnom bode $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in (0, \infty) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$$\left[\begin{array}{l} f(\mathbf{a}) = (\ln a_1, \cos a_2) = (b_1, b_2) = \mathbf{b}, \\ g(\mathbf{b}) = g(b_1, b_2) = \left((\ln a_1) \cos a_2, \frac{\ln a_1}{\cos a_2}, 1 \right), \\ [\mathcal{D}f(\mathbf{a})] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 \\ 0 & -\sin a_2 \end{bmatrix}, \\ [\mathcal{D}g(\mathbf{b})] = \begin{bmatrix} b_2 & b_1 \\ \frac{1}{b_2} & \frac{-b_1}{b_2^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ [\mathcal{D}g(f(\mathbf{a}))] = \begin{bmatrix} \cos a_2 & \ln a_1 \\ \frac{1}{\cos a_2} & \frac{-\ln a_1}{(\cos a_2)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ [\mathcal{D}h(\mathbf{a})] = [\mathcal{D}g(f(\mathbf{a}))][\mathcal{D}f(\mathbf{a})] = \\ = \begin{bmatrix} \cos a_2 & \ln a_1 \\ \frac{1}{\cos a_2} & \frac{-\ln a_1}{(\cos a_2)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 \\ 0 & \cos a_2 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \frac{\cos a_2}{a_1} & -(\ln a_1) \sin a_2 \\ \frac{1}{a_1 \cos a_2} & \frac{(\ln a_1) \sin a_2}{(\cos a_2)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right].$$

3.3.10 Zmiešané parciálne derivácie

Z parciálnych derivácií (prvého rádu) je možné opäť získavať parciálne derivácie. Sú to parciálne derivácie druhého rádu. Ich derivovaním získavame parciálne derivácie tretieho rádu, atď. Napríklad, ak uvažujeme o parciálnej derivácii podľa druhej premennej, je možné počítať jej parciálnu deriváciu podľa štvrtej premennej nasledujúcim spôsobom:

$$(f \cdot 2) \cdot 4 = f \cdot 24 = \frac{\delta}{\delta x_4} \left(\frac{\delta f}{\delta x_2} \right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x_4 \delta x_2}.$$

Podobne

$$(f \cdot 2) \cdot 2 = f \cdot 22 = \frac{\delta}{\delta x_2} \left(\frac{\delta f}{\delta x_2} \right) = \frac{\delta^2 f}{\delta x_2^2}.$$

Pre derivácie tretieho rádu dostávame

$$(f \cdot 24) \cdot 3 = (f \cdot 243) = \frac{\delta}{\delta x_3} \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x_4 \delta x_2} \right) = \frac{\delta^3 f}{\delta x_3 \delta x_4 \delta x_2}.$$

Všimnime si, že pri rôznych zápisoch derivácie dostávame opačné poradie derivovania.

Veta 3.23 *Nech $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je otvorená množina a je daná funkcia $f : \mathbb{R}^2 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech existujú $f \cdot 1 : \mathbb{R}^2 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$, $f \cdot 2 : \mathbb{R}^2 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ a $f \cdot 12 : \mathbb{R}^2 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech funkcia $f \cdot 12 : \mathbb{R}^2 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v bode $\mathbf{a} \in A$. Potom existuje $f \cdot 21(\mathbf{a})$ a platí*

$$f \cdot 12(\mathbf{a}) = f \cdot 21(\mathbf{a}).$$

Veta 3.24 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ má na otvorenej množine A spojité všetky parciálne derivácie až do r -tého rádu vrátane. Potom tie parciálne derivácie k -tého rádu ($2 \leq k \leq r$), v ktorých sa podľa rovnakých premenných rovnako veľa razy derivuje (bez ohľadu na poradie), sú rovnaké.*

Definícia 3.13 *Ak funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ má na otvorenej množine A spojité všetky parciálne derivácie až do r -tého rádu vrátane, tak hovoríme, že je r -razy spojitاً diferencovateľná.*

3.3.11 Príklady

1. Vypočítajme všetky parciálne derivácie druhého rádu funkcie

$$f(x, y) = yx^{\frac{x}{y}}.$$

$$\begin{bmatrix} f \cdot 11(x, y) = x^{\frac{x}{y}} \left(\frac{(\ln x + 1)^2}{y} + \frac{1}{x} \right), \\ f \cdot 12(x, y) = f \cdot 21(x, y) = x^{\frac{x}{y}} \left(\frac{-x(\ln x + 1) \ln x}{y^2} \right), \\ f \cdot 22(x, y) = x^{\frac{x}{y}} \frac{(x \ln x)^2}{y^3} \end{bmatrix}.$$

2. Vypočítajte všetky parciálne derivácie druhého rádu funkcie

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2).$$

$$\left[\begin{array}{l} f_{\cdot 11}(x, y, z) = \frac{2(x^2+y^2+z^2)-4x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\ f_{\cdot 12}(x, y, z) = f_{\cdot 21}(x, y, z) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\ f_{\cdot 13}(x, y, z) = f_{\cdot 31}(x, y, z) = \frac{-4xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\ f_{\cdot 22}(x, y, z) = \frac{2(x^2+y^2+z^2)-4y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\ f_{\cdot 23}(x, y, z) = f_{\cdot 32}(x, y, z) = \frac{-4yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \\ f_{\cdot 33}(x, y, z) = \frac{2(x^2+y^2+z^2)-4z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \end{array} \right].$$

3. Vypočítajte všetky parciálne derivácie druhého rádu funkcie

$$f(x, y, z) = 2^{xyz}.$$

$$\left[\begin{array}{l} f_{\cdot 11}(x, y, z) = 2^{xyz} (yz \ln 2)^2, \\ f_{\cdot 12}(x, y, z) = f_{\cdot 21}(x, y, z) = z(\ln 2)2^{xyz} (xyz \ln 2 + 1), \\ f_{\cdot 13}(x, y, z) = f_{\cdot 31}(x, y, z) = y(\ln 2)2^{xyz} (xyz \ln 2 + 1), \\ f_{\cdot 22}(x, y, z) = 2^{xyz} (xz \ln 2)^2, \\ f_{\cdot 23}(x, y, z) = f_{\cdot 32}(x, y, z) = x(\ln 2)2^{xyz} (xyz \ln 2 + 1), \\ f_{\cdot 33}(x, y, z) = 2^{xyz} (xy \ln 2)^2 \end{array} \right].$$

4. Nech

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vypočítajte $f_{\cdot 12}(0, 0)$ a $f_{\cdot 21}(0, 0)$ [$f_{\cdot 12}(0, 0) = -1$, $f_{\cdot 21}(0, 0) = 1$].

5. Nech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vypočítajte $f_{\cdot 12}(0, 0)$ a $f_{\cdot 21}(0, 0)$ [$f_{\cdot 12}(0, 0) = 0$, $f_{\cdot 21}(0, 0) = 1$].

6. Nech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3}{x^2+y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vypočítajte $f_{\cdot 1}(x, y)$ a $f_{\cdot 12}(x, y)$ pre každé $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left[\begin{array}{l} f_{.1}(x, y) = \frac{2x^4 + 6x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{pre } (x, y) \neq 0, \quad f_{.1}(0, 0) = 2, \\ f_{.12}(x, y) = \frac{4x^2y(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \quad \text{pre } (x, y) \neq 0, \quad f_{.12}(0, 0) = \text{neexistuje} \end{array} \right].$$

7. Nech

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{pre } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pre } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Vypočítajme $f_{.12}(0, 0)$ a $f_{.21}(0, 0)$.

$$[f_{.12}(0, 0) = 0, \quad f_{.21}(0, 0) = 0].$$

3.3.12 Derivácia vo smere, gradient

Nech je daná funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ a A je otvorená množina. Nech funkcia f je diferencovateľná v bode $\mathbf{a} \in A$. Uvažujme o jednotkovom vektore $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_m) \in \mathbb{R}^m$. Pretože A je otvorená množina, musí existovať $\tau > 0$ také, že pre každé $t \in (-\tau, \tau)$ platí $\mathbf{a} + \mathbf{e}t \in A$.

Potom je zrejmé, že funkcia

$$h : \mathbb{R} \supseteq (-\tau, \tau) \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^m, \quad h(t) = \mathbf{a} + \mathbf{e}t = (a_1 + e_1t, a_2 + e_2t, \dots, a_m + e_mt)$$

je diferencovateľná v bode 0. Tak isto v bode 0 je diferencovateľná aj funkcia

$$r = (f \circ h) : \mathbb{R} \supseteq (-\tau, \tau) \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}, \quad r(t) = f(h(t)) = f(\mathbf{a} + \mathbf{e}t).$$

Preto existuje

$$r'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t) - r(0)}{t - 0}.$$

Túto deriváciu môžeme vypočítať pomocou reťazového pravidla nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} r'(0) &= f_{.1}(h(0))h'_1(0) + f_{.2}(h(0))h'_2(0) + \dots + f_{.m}(h(0))h'_m(0) \\ &= f_{.1}(\mathbf{a})e_1 + f_{.2}(\mathbf{a})e_2 + \dots + f_{.m}(\mathbf{a})e_m \\ &= (f_{.1}(\mathbf{a}), f_{.2}(\mathbf{a}), \dots, f_{.m}(\mathbf{a})) \cdot (e_1, e_2, \dots, e_m) \\ &= (f_{.1}(\mathbf{a}), f_{.2}(\mathbf{a}), \dots, f_{.m}(\mathbf{a})) \cdot \mathbf{e} \\ &= f_{\cdot \mathbf{e}}(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

Číslo $r'(0) = f_{\cdot \mathbf{e}}(\mathbf{a})$ nazývame **derivácia funkcie f v bode $\mathbf{a}$ vo smere (jednotkového) vektora $\mathbf{e}$** .

Vektor $(f_{.1}(\mathbf{a}), f_{.2}(\mathbf{a}), \dots, f_{.m}(\mathbf{a}))$ nazývame **gradient funkcie f v bode $\mathbf{a}$** . Označujeme

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) = (f_{.1}(\mathbf{a}), f_{.2}(\mathbf{a}), \dots, f_{.m}(\mathbf{a})).$$

Pri tomto označení dostávame

$$f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}.$$

Z vlastnosti skalárneho súčinu vyplýva, že

$$|f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a})| = |\text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}| \leq |\text{grad } f(\mathbf{a})| |\mathbf{e}| = |\text{grad } f(\mathbf{a})|.$$

Z toho už vyplýva: Ak zvolíme jednotkový vektor v tvare

$$\mathbf{e} = \frac{\text{grad } f(\mathbf{a})}{|\text{grad } f(\mathbf{a})|},$$

potom dostaneme

$$f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a}) = \frac{\text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \text{grad } f(\mathbf{a})}{|\text{grad } f(\mathbf{a})|} = |\text{grad } f(\mathbf{a})|.$$

Z toho vyplýva, že gradient udáva smer, v ktorom sa funkcia najrýchlejšie mení.

3.3.13 Príklady

1. Nech $f(x, y) = e^{xy^2}$, $\mathbf{e} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)$. Vypočítajte $f_{\mathbf{e}}(2, 1)$.

$$\left[f_{\mathbf{e}}(2, 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 8e^4) \right].$$

2. Nech $f(x, y) = e^y \cos(x + y)$, $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3})$. Vypočítajte $f_{\mathbf{e}}(\frac{\pi}{2}, 0)$.

$$\left[f_{\mathbf{e}}(\frac{\pi}{2}, 0) = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) \right].$$

3. Nech $f(x, y) = 3x^2 - 6xy + y^2$ a $\mathbf{a} = (\frac{-1}{3}, \frac{-1}{2})$.

- (a) Vypočítajte $f_{\mathbf{e}}(\mathbf{a})$ vo smere ľubovoľného jednotkového vektora $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ $\left[f_{\mathbf{e}}(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{2}) = e_1 + e_2 \right]$.

- (b) Zistíme, v ktorom smere je derivácia

- nulová $\left[\mathbf{e}_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \mathbf{e}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right],$
- najväčšia $\left[\mathbf{e}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right],$
- najmenšia $\left[\mathbf{e}_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right].$

4. Nájdime jednotkový vektor, v ktorého smere sa funkcia $f(x, y, z) = y^2 \sin(xyz)$ v bode $\mathbf{a} = (1, 1, \pi)$ mení najrýchlejšie. Určite rýchlosť (veľkosť) tejto zmeny. ... $\left[\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{1+2\pi^2}}(-\pi, -\pi, -1), f_{\mathbf{e}} = \sqrt{1+2\pi^2} \right].$

5. Nech $f(x, y) = x^2 - 2xy + x - y^2 + 3y$. Nájdime bod, v ktorom je derivácia tejto funkcie v každom smere nulová. $\left[(\frac{1}{2}, 1) \right].$

6. Nech

$$f(x, y) = \frac{2}{(3x^2 + 4y^2)^2}.$$

Nájďme gradient a diferenciál tejto funkcie v bode $\mathbf{a} = (-1, 1)$.

$$\begin{bmatrix} \text{grad } f(-1, 1) = \left(\frac{24}{343}, \frac{-32}{343} \right), \\ \mathcal{D}f(\mathbf{a})(x_1, x_2) = \frac{24}{343}x_1 - \frac{32}{343}x_2 \end{bmatrix}.$$

3.3.14 Lokálne extrém

Definícia 3.14 Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ a $\mathbf{a} \in A$.

Nech existuje také prstencové okolie $\mathcal{O}_\delta(\mathbf{a})$, že:

1. Pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_\delta(\mathbf{a}) \cap A$ je $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ **rýdze lokálne maximum**.
2. Pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_\delta(\mathbf{a}) \cap A$ je $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ **rýdze lokálne minimum**.

Nech existuje také okolie $\mathcal{O}_\delta(\mathbf{a})$, že:

1. Pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_\delta(\mathbf{a}) \cap A$ je $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ **lokálne maximum**.
2. Pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_\delta(\mathbf{a}) \cap A$ je $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ **lokálne minimum**.

Všetky uvedené pojmy nazývame spoločným termínom *lokálne extrém*.

Ak pre každé $\mathbf{x} \in A$ je $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$, tak hovoríme, že funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ **totálne (globálne) maximum**.

Ak pre každé $\mathbf{x} \in A$ je $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$, tak hovoríme, že funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ **totálne (globálne) minimum**.

Je zrejmé, že v bodoch, v ktorých funkcia nadobúda totálne extrém, nadobúda aj lokálne extrém.

Veta 3.25 (Nutná podmienka pre existenciu lokálneho extrému) Nech $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$. Nech

1. A je otvorená množina a $\mathbf{a} \in A$.
2. Funkcia f je diferencovateľná v bode $\mathbf{a}$.
3. Funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ lokálny extrém.

Potom $\text{grad } f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Poznámka 3.2 Ak funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ je dva razy spojitاً diferencovateľná, tak nezáleží na poradí derivovania v parciálnych deriváciach druhého rádu.

$$\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x}) = \mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f_{.ij}(\mathbf{a}) x_i x_j.$$
$$P(\mathbf{x}) = P(x_1, x_2, \dots, x_m)$$
$$= \mathcal{D}^2 f(\mathbf{a})(x_1, x_2, \dots, x_m)$$
$$= f_{\cdot 11}(\mathbf{a})x_1x_1 + f_{\cdot 12}(\mathbf{a})x_1x_2 + \dots + f_{\cdot 1m}(\mathbf{a})x_1x_m +$$
$$+ f_{\cdot 21}(\mathbf{a})x_2x_1 + f_{\cdot 22}(\mathbf{a})x_2x_2 + \dots + f_{\cdot 2m}(\mathbf{a})x_2x_m +$$
$$\dots\dots\dots$$
$$+ f_{\cdot m1}(\mathbf{a})x_mx_1 + f_{\cdot m2}(\mathbf{a})x_mx_2 + \dots + f_{\cdot mm}(\mathbf{a})x_mx_m$$
$$f_{\cdot ij}(\mathbf{a}) = f_{\cdot ji}(\mathbf{a}).$$
$$f(\mathbf{a} + \mathbf{x}) = \frac{\mathcal{D}^0 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})}{0!} + \frac{\mathcal{D}^1 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})}{1!} + \frac{\mathcal{D}^2 f(\mathbf{a} + t\mathbf{x})(\mathbf{x})}{2!}.$$
[illegible]
$$P(\mathbf{x}) = P(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \quad pre \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

je homogénny polynóm druhého stupňa m -premenných (symetrická kvadratická forma). Ak

Veta 3.28 (Sylvestrovo kritérium) *Nech je symetrický homogénny polynóm druhého stupňa $P(\mathbf{x}) = P(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}x_i x_j$.*

1. *Polynóm $P(\mathbf{x})$ je kladne definitný práve vtedy, keď $\Delta_k > 0$ pre $k = 1, 2, \dots, m$.*
2. *Polynóm $P(\mathbf{x})$ je záporne definitný práve vtedy, keď $(-1)^k \Delta_k > 0$ pre $k = 1, 2, \dots, m$.*

Zo Sylvestrovho kritéria a Vety 3.27 vyplýva

Dôsledok 3.7 *Ak $\Delta_m \neq 0$ a polynóm $P(\mathbf{x})$ nie je definitný (kladne, alebo záporne), tak je indefinitný.*

Veta 3.29 (Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému) *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ je dva razy spojitá diferencovateľná na otvorenej množine A . Nech pre $\mathbf{a} \in A$ platí $\text{grad} f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Potom*

1. *ak $D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})$ je kladne definitný, tak funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ rýdže lokálne minimum.*
2. *ak $D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})$ je záporne definitný, tak funkcia f má v bode $\mathbf{a}$ rýdže lokálne maximum.*
3. *ak $D^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x})$ je indefinitný, tak funkcia f nemá v bode $\mathbf{a}$ extrém.*

Definícia 3.17 *Nech $A \subseteq \mathbb{R}^m$ je ohraničená a uzavretá množina. Potom hovoríme, že A je **kompaktná množina**.*

Veta 3.30 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na kompaktnej množine A . Potom na tejto množine nadobúda (totálne) maximum a aj minimum. To znamená, že existujú $\mathbf{c}, \mathbf{C} \in A$ také, že pre každé $\mathbf{x} \in A$ platí:*

$$f(\mathbf{c}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{C}).$$

3.3.15 Príklady

1. Vyšetrite stacionárne body a lokálne extrémy nasledujúcich funkcií:

- (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy + 2$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = (0, 0), \text{ nemá extrém,} \\ \mathbf{b} = (-1, -1), \text{ rýdže lokálne maximum } f(\mathbf{b}) = 3 \end{array} \right].$$
- (b) $f(x, y) = x^2 + y^3$.

$$[\mathbf{a} = (0, 0), \text{ nemá extrém}].$$
- (c) $f(x, y) = x^2 + y^4$.

$$[\mathbf{a} = (0, 0), \text{ rýdže lokálne minimum } f(0, 0) = 0].$$

- (d) $f(x, y) = x^2(1 + y^2)$.
 $[\mathbf{a} = (0, y), \text{ lokálne minimum } f(0, y) = 0]$.
- (e) $f(x, y) = x^3 + 3y^2 - 6xy - 6x + 6y$.
 $\left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = (0, -1), \text{ nemá extrém,} \\ \mathbf{b} = (2, 1), \text{ rýdže lokálne minimum } f(2, 1) = -7 \end{array} \right]$.
- (f) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$.
 $[\mathbf{a} = (1, 0), \text{ rýdže lokálne minimum } f(1, 0) = -1]$.
- (g) $f(x, y) = \frac{xy}{2} + (47 - x - y) \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4} \right)$.
 $[\mathbf{a} = (21, 20), \text{ rýdže lokálne maximum } f(21, 20) = 282]$.
- (h) $f(x, y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.
 $\left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = (1, 4), \mathbf{b} = (1, -4), \mathbf{c} = \left(\frac{-5}{3}, 0 \right), \text{ nemá extrém,} \\ \mathbf{d} = (0, 0), \text{ rýdže lokálne minimum } f(0, 0) = 0 \end{array} \right]$.
- (i) $f(x, y) = xy(2 - x - y)$.
 $\left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = (0, 0), \mathbf{b} = (0, 2), \mathbf{c} = (2, 0), \text{ nemá extrém,} \\ \mathbf{d} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right), \text{ rýdže lokálne maximum } f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} \end{array} \right]$.
- (j) $f(x, y) = 5xy + \frac{25}{x} + \frac{8}{y}, \quad x > 0, y > 0$.
 $[\mathbf{a} = \left(\frac{5}{2}, \frac{4}{5} \right), \text{ rýdže lokálne minimum } f\left(\frac{5}{2}, \frac{4}{5}\right) = 30]$.
- (k) $f(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.
 $\left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = (0, 0), \text{ rýdže lokálne minimum } f(0, 0) = 0, \\ \mathbf{b} = \left(\frac{-1}{4}, \frac{-1}{2} \right), \text{ nemá extrém} \end{array} \right]$.
- (l) $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.
 $[\mathbf{a} = \left(\frac{1}{2}, -1 \right), \text{ rýdže lokálne minimum } f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = \frac{-e}{2}]$.
- (m) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$.
 $\left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = (0, 0), \text{ rýdže lokálne minimum } f(0, 0) = 0, \\ \mathbf{b} = (0, 1), \text{ rýdže lokálne maximum } f(0, 1) = \frac{2}{e}, \\ \mathbf{c} = (0, -1), \text{ rýdže lokálne maximum } f(0, -1) = \frac{2}{e}, \\ \mathbf{d} = (1, 0), \text{ nemá extrém,} \\ \mathbf{e} = (-1, 0), \text{ nemá extrém} \end{array} \right]$.
- (n) $f(x, y) = x^2y^2(3 - 4x + 6y)$.
 $\left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = \left(\frac{3}{10}, \frac{-1}{5} \right), \text{ rýdže lokálne minimum } f\left(\frac{3}{10}, \frac{-1}{5}\right) = \frac{27}{12400}, \\ \mathbf{b}_x = (x, 0), \text{ pre } x > \frac{3}{4} \text{ lokálne maximum } f(x, 0) = 0, \\ \mathbf{c}_y = (0, y), \text{ pre } y < \frac{1}{2} \text{ lokálne maximum } f(0, y) = 0, \\ \mathbf{d}_x = (x, 0), \text{ pre } x < \frac{3}{4} \text{ lokálne minimum } f(x, 0) = 0, \\ \mathbf{e}_y = (0, y), \text{ pre } y > \frac{1}{2} \text{ lokálne minimum } f(0, y) = 0, \\ \mathbf{f} = \left(\frac{3}{4}, 0 \right), \mathbf{g} = \left(0, \frac{1}{2} \right) \text{ nemá extrém} \end{array} \right]$.
- (o) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.
 $\left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = (0, 0, -1), \text{ nemá extrém,} \\ \mathbf{b} = (24, -144, -1), \text{ rýdže lokálne minimum } f(24, -144, -1) = -6913 \end{array} \right]$.
- (p) $f(x, y, z) = 35 - 6x + 2z + x^2 - 2xy + 2y^2 + 2yz + 3z^2$.
 $[\mathbf{a} = (8, 5, -2), \text{ rýdže lokálne minimum } f(8, 5, -2) = 9]$.

- (q) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - 2x + 3y - 4z + 6$.
 $[\mathbf{a} = (\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}, 2), \text{ rýdže lokálne minimum, } f(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}, 2) = \frac{-1}{3}]$.
- (r) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.
 $[\mathbf{a} = (0, 0, 0), \text{ nemá extrém}]$.
- (s) $f(x, y, z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + 1$.
 $[\mathbf{a} = (0, 0, 0), \text{ rýdže lokálne minimum, } f(0, 0, 0) = 1]$.
- (t) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.
 $[\mathbf{a} = (-1, -2, 3), \text{ rýdže lokálne minimum } f(-1, -2, 3) = -14]$.
- (u) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.
 $[\mathbf{a} = (2, 1, 7), \text{ nemá extrém}]$.
- (v) $f(x, y, z) = y^2 + 2z^2 + 2x - xy - xz$.
 $[\mathbf{a} = (\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}), \text{ nemá extrém}]$.
- (w) $f(x, y, z) = 3x^2 + 3x + 2y^2 + 2yz + 2y + 2z^2 - 2z$.
 $[\mathbf{a} = (\frac{-1}{2}, -1, 1), \text{ rýdže lokálne minimum } f(\frac{-1}{2}, -1, 1) = \frac{-11}{4}]$.
- (x) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x$.
 $[\mathbf{a} = (\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, -1), \text{ rýdže lokálne minimum } f(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, -1) = \frac{-4}{3}]$.

2. Nájdime (totálne, globálne) extrémny funkcií:

- (a) $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ na množine $A = \{(x, y) \mid \text{je ohraničená priamkami } x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0\}$.
 $[-19 \leq f(x, y) \leq -1]$.
- (b) $f(x, y) = x^2y(2-x-y)$ na trojuholníku $A = \{(x, y) \mid \text{je ohraničený priamkami } x = 0, y = 0, x + y = 6\}$.
 $[-128 \leq f(x, y) \leq \frac{1}{4}]$.
- (c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ na obdĺžniku $A = \{(x, y) \mid \text{je ohraničený priamkami } x = 0, x = 2, y = -1, y = 2\}$.
 $[-1 \leq f(x, y) \leq 13]$.
- (d) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16$ na množine $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 49\}$.
 $[-20 \leq f(x, y) \leq 149]$.
- (e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ na kruhu $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$.
 $[0 \leq f(x, y) \leq 5]$.

3. Nájdite lokálne extrémny funkcie:

$$f(x, y) = x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{a} = (-1, -1), \text{ rýdže lokálne maximum } f(-1, -1) = 0, \\ \mathbf{b} = (\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}), \text{ nemá extrém} \end{array} \right].$$

Kapitola 4

Integrálny počet FVP

4.1 Úvodné pojmy

Definícia 4.1 *Množinu*

$$\begin{aligned} I &= \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_m, b_m \rangle \\ &= \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid a_i \leq x_i \leq b_i \text{ pre } i = 1, 2, \dots, m \} \end{aligned}$$

nazývame uzavretý interval. Číslo

$$\mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_m - a_m)$$

nazývame miera intervalu I .

Definícia 4.2 *Nech $A \subset \mathbb{R}^m$. Ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje taká konečná množina intervalov $I_1, I_2, \dots, I_k$, že*

- $A \subseteq \bigcup_{j=1}^k I_j$,
- $\mu(I_1) + \mu(I_2) + \dots + \mu(I_k) < \varepsilon$,

tak hovoríme, že A je množina miery nula.

Definícia 4.3 *Nech $A \subset \mathbb{R}^m$. Bod $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ nazývame hraničným bodom množiny A , ak v každom jeho okolí $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{a})$ existujú body $\mathbf{a}_j$ z množiny A a $\mathbf{a}_j$ body, ktoré do množiny A nepatria. Množinu všetkých hraničných bodov množiny A nazývame hranica množiny a označujeme znakom $\text{hr}(A)$.*

Definícia 4.4 *Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je ohraničená množina. Ak hranica $\text{hr}(A)$ tejto množiny je množina miery nula, tak hovoríme, že množina A je meraateľná množina.*

Definícia 4.5 *Nech $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ sú také dve spojité funkcie, že $f(x) \leq g(x)$ pre každé $x \in \langle a, b \rangle$. Potom množinu*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

nazývame elementárna oblasť typu $[x, y]$.

Analogicky definujeme elementárnu oblasť typu $[y, x]$.

Definícia 4.6 *Nech $B \subset \mathbb{R}^2$ je elementárna oblasť typu $[x, y]$. Nech $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \rightarrow \mathbb{R}$ a $\psi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \rightarrow \mathbb{R}$ sú také dve spojité funkcie, že $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$ pre každé $(x, y) \in B$. Potom množinu*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

nazývame elementárna oblasť typu $[x, y, z]$.

Množina $A \subset \mathbb{R}^3$ je elementárnou oblasťou typu $[x, y, z]$ práve vtedy, keď

- *existujú spojité funkcie $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ také, že $f(x) \leq g(x)$ pre každé $x \in \langle a, b \rangle$,*
- *$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$,*
- *existujú spojité funkcie $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \rightarrow \mathbb{R}$ a $\psi : \mathbb{R}^2 \supseteq B \rightarrow \mathbb{R}$ také, že $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$ pre každé $(x, y) \in B$,*
- *$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x), \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$.*

Podobným spôsobom definujeme v $\mathbb{R}^3$ elementárne oblasti aj iných typov.

Elementárne oblasti je možné definovať aj v priestore $\mathbb{R}^m$ pre $m > 3$.

Veta 4.1 *Všetky elementárne oblasti sú merateľné množiny.*

4.2 Definícia integrálu na intervale

Definícia 4.7 1. *Nech*

$$\begin{aligned} I &= \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \dots \times \langle a_m, b_m \rangle \\ &= \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid a_i \leq x_i \leq b_i \text{ pre } i = 1, 2, \dots, m\} \end{aligned}$$

je uzavretý interval. Nech D_i je delenie intervalu $\langle a_i, b_i \rangle$ pre $i = 1, 2, \dots, m$. Potom m -ticu $D = (D_1, D_2, \dots, D_m)$ nazývame delenie intervalu I . Číslo $\|D\| = \max\{\|D_i\| \mid i = 1, 2, \dots, m\}$ nazývame norma delenia D . Každým delením m -rozmerného intervalu I je určený konečný počet m -rozmerných deliacich intervalov $I_1, I_2, \dots, I_k$, na ktoré je rozdelený interval I . To znamená, že $I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$ a deliace intervaly môžu mať spoločné len hraničné body.

2. Nech $(D^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť delení intervalu I . Ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^{(n)}\| = 0$, potom hovoríme, že postupnosť $(D^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ je normálna postupnosť delení intervalu I .
3. Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $I \subseteq M$ a D s deliacimi intervalmi $I_1, I_2, \dots, I_k$ je ľubovoľné delenie intervalu I . Nech body $\mathbf{c}_i \in I_i$ sú ľubovoľne zvolené pre $i = 1, 2, \dots, k$. Potom číslo

$$S_D(f) = \sum_{i=1}^k f(\mathbf{c}_i) \mu(I_i)$$

nazývame integrálny súčet funkcie f pre dané delenie D intervalu I a voľbu bodov $\mathbf{c}_i \in I_i$.

Definícia 4.8 Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $I \subseteq M$. Ak pre každú normálnu postupnosť delení $(D^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ intervalu I a každú voľbu bodov $\mathbf{c}_i$ v integrálnych súčtoch $S_{D^{(n)}}(f)$, postupnosť $(S_{D^{(n)}}(f))_{n=1}^{\infty}$ konverguje k tomu istému číslu J , tak hovoríme, že funkcia f je integrovateľná na intervale I . Číslo

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{D^{(n)}}(f)$$

nazývame integrál funkcie f na intervale I a označujeme

$$J = \int_I f = \int_I f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \iint_I f(x, y) dx dy = \iiint_I f(x, y, z) dx dy dz.$$

Veta 4.2 (Prvá postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $I \subseteq M$. Potom je na tomto intervale integrovateľná.

Veta 4.3 (Druhá postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $I \subseteq M$. Nech množina bodov z intervalu I , v ktorých f nie je spojitá, je množina miery nula. Potom je funkcia f na intervale I integrovateľná.

4.3 Definícia integrálu na množine

Definícia 4.9 Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na ohraničenej množine $A \subseteq M$. Nech $I \supseteq A$ je ľubovoľný interval. Nech

$$f_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, f_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{pre } \mathbf{x} \in A, \\ 0 & \text{pre } \mathbf{x} \notin A. \end{cases}$$

Ak funkcia $f_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale I , tak hovoríme, že funkcia f je integrovateľná na množine A a píšeme

$$\int_A f = \int_I f_A = \iint_A f(x, y) dx dy = \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz.$$

Veta 4.4 (Postačujúca podmienka integrovateľnosti na množine) Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na merateľnej množine $A \subseteq M$. Nech množina tých bodov z množiny A , v ktorých f nie je spojitá, je množina miery nula. Potom je funkcia f na množine A integrovateľná.

4.4 Vlastnosti integrálu

Veta 4.5 Nech funkcie $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ sú integrovateľné na množine $A \subseteq M$ a $c \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta. Potom

1. Funkcia $(f+g) : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na množine A a platí

$$\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g.$$

2. Funkcia $(cf) : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na množine A a platí

$$\int_A (cf) = c \int_A f.$$

3. Funkcia $|f| : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na množine A a platí

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|.$$

Veta 4.6 Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je množina miery nula a funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je ohraničená na množine A . Potom $\int_A f = 0$.

Veta 4.7 Nech funkcia $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na množinách $A, B \subseteq M$, pričom $A \cap B$ je množina miery nula. Potom

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Definícia 4.10 Nech $A \subset \mathbb{R}^m$ je merateľná množina. Potom mieru $\mu(A)$ množiny A definujeme pomocou predpisu:

$$\mu(A) = \int_A 1.$$

4.5 Fubiniho vety

Veta 4.8 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^2 \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na elementárnej oblasti*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

typu $[x, y]$. Nech pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ existuje integrál

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy.$$

Potom

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Podobná veta platí pre elementárnu oblasť typu $[y, x]$.

Veta 4.9 *Nech funkcia $f : \mathbb{R}^3 \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovateľná na elementárnej oblasti*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

typu $[x, y, z]$. Nech pre každé $(x, y) \in B$ existuje integrál

$$\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Potom

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_B \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Dôsledok 4.1 *Nech A je elementárna oblasť typu $[x, y, z]$ a na elementárnej oblasti $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ sú splnené podmienky Fubiniho vety pre funkciu dvoch premenných. Potom*

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy dx.$$

Podobné vety platia pre zvyšné typy elementárnych oblastí v $\mathbb{R}^3$.

4.5.1 Príklady

Pomocou Fubiniho viet vypočítajte nasledujúce integrály a načrtnite obrázok príslušných množín, na ktorých integrujeme:

1. $\iint_I \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy$, ak $I = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ $\left[\ln \frac{\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{2}} = 0,2229 \right]$.
2. $\iint_I \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy$, ak $I = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.
 $\left[\sqrt{\frac{2}{3}} \arctg \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\pi}{4} \right]$.
3. $\iint_I x^2 y \cos(xy^2) dx dy$, ak $I = \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$ $\left[-\frac{\pi}{16} \right]$.
4. $\iint_I y e^{x+y} dx dy$, ak $I = \langle 0, 4 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ $[e^4 - 1]$.
5. $\iint_I \ln(1+x)^{2y} dx dy$, ak $I = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ $[2 \ln 2 - 1]$.
6. $\iint_I \frac{1}{(1-xy)^2} dx dy$, ak $I = \langle 2, 3 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$ $\left[\ln \frac{6}{5} \right]$.
7. $\iint_A \cos(x+y) dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, x \leq y \leq \pi\}$ $[2]$.
8. $\iint_A (3x^2 + 2y) dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, x \geq 0\}$. .. $\left[\frac{39}{70} \right]$.
9. $\iint_A xy dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid x - 4 \leq y, y^2 \leq 2x\}$ $[90]$.
10. $\iint_A y e^x dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq y + 2\}$ $\left[\frac{1}{2}(e^4 + 5e) \right]$.
11. $\iint_A (x+y) dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, y \leq x \leq 2y\}$ $\left[\frac{7}{3} \right]$.
12. $\iint_A \frac{x^2}{y^2} dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid 0 < \frac{1}{x} \leq y \leq x, x \leq 2\}$ $\left[\frac{9}{4} \right]$.
13. $\iint_A |x| dx dy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y = x^2, 4x^2 + y^2 = 12$, a platí, že $y \geq 0$ $\left[4\sqrt{3} - \frac{10}{3} \right]$.
14. $\iint_A (x^2 + y) dx dy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y = \frac{x}{2}, y = 2x, xy = 2$ a platí, že $x \geq 0$ $\left[\frac{17}{6} \right]$.
15. $\iint_A (x^2 + y) dx dy$, ak množina A je trojuholník KLM , pričom $K = (1, 2), L = (5, 2), M = (4, 4)$ $[58]$.

16. $\iint_A \sqrt{xy - y^2} dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 3, \frac{x}{10} \leq y \leq x\}$.
[162].
17. Vypočítajte plošný obsah množiny A , ktorá je ohraničená krivkami $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, $y^2 = x + 1$ a obsahuje bod $(0, 0)$ $\left[8 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]$.
18. $\iint_A (x^2 y) dx dy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y = x$, $y = x^2$.
[$\frac{1}{35}$].
19. $\iint_A (x^2 y) dx dy$, ak množina A je ohraničená krivkami $y = x - 4$, $y^2 = 2x$ [$\frac{2412}{5}$].
20. $\iint_A (x + y) dx dy$, ak množina A je ohraničená krivkami $x = 0$, $y = \frac{3}{2}x$, $y = 4 - (x - 1)^2$, pričom $x \geq 0$ [$\frac{13}{3}$].
21. $\iiint_A (1 - x) dx dy dz$, ak $A = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, z \leq 1 - x - y\}$ [$\frac{1}{8}$].
22. $\iiint_A y \cos(x + z) dx dy dz$, ak množina A je ohraničená plochami $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$ [$\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$].
23. $\iiint_A xyz dx dy dz$, ak množina A je ohraničená plochami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, pričom $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ [$\frac{1}{48}$].
24. $\iiint_A \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dx dy dz$, ak množina A je ohraničená plochami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ [$\frac{1}{2} (\ln 2 - \frac{5}{8})$].
25. $\iiint_A x^2 y z^3 dx dy dz$, ak $A = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy\}$ [$\frac{1}{312}$].
26. $\iiint_A \frac{xy^3 z}{(1+z^2)^2} dx dy dz$, ak $A = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 5, x \geq 0, y \geq 0\}$ [$\frac{425}{78} + \frac{1}{16} \ln 26 = 5,652349$].
27. Vypočítajte plošný obsah množiny A , ak je ohraničená krivkami: $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$ a $x^2 + y^2 = 4$. Nakreslite obrázok množiny A [$\pi - \frac{4}{3}$].
28. Vypočítajte objem telesa A ohraničeného rovinami $x + y + z = 4$, $x = 3$, $y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Nakreslite obrázok množiny A .
[$\frac{55}{6}$].

4.6 Transformácie integrálu

Veta 4.10 (Transformácia pomocou polárnych súradníc) Nech $Z = \langle 0, \infty \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle$. Nech

$$g : \mathbb{R}^2 \supset Z \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(\varrho, \varphi) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi), \quad J_g(\varrho, \varphi) = \varrho.$$

Nech $A, B \subset \mathbb{R}^2$ sú také kompaktné a merateľné množiny, že

1. $B \subseteq Z$,
2. $g(B) = A$.

Nech $f : \mathbb{R}^2 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \iint_B f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) |J_g(\varrho, \varphi)| \, d\varrho d\varphi.$$

Veta 4.11 (Transformácia pomocou cylindrických súradníc) Nech $Z = \langle 0, \infty \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle \times (-\infty, \infty)$. Nech

$$g : \mathbb{R}^3 \supset Z \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(\varrho, \varphi, u) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, u), \quad J_g(\varrho, \varphi, u) = \varrho.$$

Nech $A, B \subset \mathbb{R}^3$ sú také kompaktné a merateľné množiny, že

1. $B \subseteq Z$,
2. $g(B) = A$.

Nech $f : \mathbb{R}^3 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_B f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, u) |J_g(\varrho, \varphi, u)| \, d\varrho d\varphi du.$$

Veta 4.12 (Transformácia pomocou sférických súradníc) Nech $Z = \langle 0, \infty \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle \times \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Nech

$$g : \mathbb{R}^3 \supset Z \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(\varrho, \varphi, \vartheta) = (\varrho \cos \varphi \cos \vartheta, \varrho \sin \varphi \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta), \quad J_g(\varrho, \varphi, \vartheta) = \varrho^2 \cos \vartheta.$$

Nech $A, B \subset \mathbb{R}^3$ sú také kompaktné a merateľné množiny, že

1. $B \subseteq Z$,
2. $g(B) = A$.

Nech $f : \mathbb{R}^3 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_B f(\varrho \cos \varphi \cos \vartheta, \varrho \sin \varphi \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta) |J_g(\varrho, \varphi, \vartheta)| \, d\varrho d\varphi d\vartheta.$$

Veta 4.13 (Transformácia pomocou afinných súradníc) *Nech*

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(u, v, w) = (a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w, a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w, a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w).$$

Nech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad J_g(u, v, w) = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Nech

1. $J_g(u, v, w) \neq 0$,
2. $A, B \subset \mathbb{R}^3$ sú také kompaktné a merateľné množiny, že $g(B) = A$.

Nech $f: \mathbb{R}^3 \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom

$$\begin{aligned} \iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz &= \\ &= \iiint_B f(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w, a_{21}u + a_{22}v + \\ &\quad + a_{23}w, a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w) |J_g(u, v, w)| \, du dv dw. \end{aligned}$$

4.6.1 Príklady

1. Vypočítajte $\iint_A \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ $\left[\frac{\pi}{6}\right]$.
2. Vypočítajte $\iint_A \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ $\left[\frac{16\pi}{3}\right]$.
3. Vypočítajte $\iint_A 2(x^2 + y^2) \, dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq |x|\}$ $\left[\frac{15\pi}{4}\right]$.
4. Vypočítajte $\iint_A \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$ $\left[\frac{32}{9}\right]$.
5. Vypočítajte $\iint_A \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} \, dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ $\left[\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}\right]$.
6. Vypočítajte $\iint_A \ln(1 + x^2 + y^2) \, dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$ $\left[(10 \ln 10 - 9) \frac{\pi}{4}\right]$.

7. Vypočítajte $\iint_A \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq e\}$.
 $\left[\frac{\pi}{2}\right]$.
8. Vypočítajte $\iint_A \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$ $[-6\pi^2]$.
9. Vypočítajte $\iint_A \arctg \frac{y}{x} dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\sqrt{3}\}$ $\left[\frac{\pi^2}{6}\right]$.
10. Vypočítajte $\iint_A \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$.
 $[4\pi]$.
11. Vypočítajte $\iint_A xy^2 dx dy$, ak $A = \{(x, y) \mid 2y \leq x^2 + y^2 \leq 4y\}$. $[0]$.
12. Vypočítajte $\iiint_A y dx dy dz$, ak množina A je ohraničená plochami $x^2 + z^2 = y^2$, $y = 2$ $[4\pi]$.
13. Vypočítajte $\iiint_A (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, ak množina A je ohraničená plochou $3(x^2 + y^2) + z^2 = 3$ $\left[\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\right]$.
14. Vypočítajte $\iiint_A (x^2 + y^2) dx dy dz$, ak množina A je ohraničená plochami $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$ $\left[\frac{16\pi}{3}\right]$.
15. Vypočítajte $\iiint_A \frac{xy}{\sqrt{z}} dx dy dz$, ak množina A je ohraničená plochami $x^2 + y^2 = 4z^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ a leží v prvom oktante. ... $\left[\frac{4}{9}\right]$.
16. Vypočítajte $\iiint_A (x^2 + y^2) dx dy dz$, ak $A = \{(x, y, z) \mid 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0\}$ $\left[\frac{844\pi}{15}\right]$.
17. Vypočítajte $\iiint_A z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, ak $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq 4, 0 \leq y\}$ $\left[\frac{128}{9}\right]$.
18. Vypočítajte $\iiint_A x^2 y dx dy dz$, ak množina A je ohraničená plochami $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $x + z = 3$ $[0]$.
19. Vypočítajte $\iiint_A xy \sqrt{z} dx dy dz$, ak množina A je ohraničená plochami $x^2 + y^2 = 4z^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, pričom $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
 $\left[\frac{4}{11}\right]$.

20. Vypočítajte $\iiint_A z \, dx dy dz$, ak množina A je ohraničená plochami $z = 2$, $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ $[\pi]$.
21. Vypočítajte $\iiint_A \frac{xy^3z}{(1+z^2)^2} dx dy dz$, ak $A = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 5, x \geq 0, y \geq 0\}$ $\left[\frac{425}{78} + \frac{1}{16} \ln 26 = 5,652349\right]$.
22. $\iiint_A z dx dy dz$, ak množina $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, x \geq 0, y \geq 0\}$ $\left[\frac{\pi}{8}\right]$.
23. Vypočítajte $\iiint_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, ak $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$ $\left[\frac{\pi}{10}\right]$.
24. Vypočítajte $\iiint_A z^2 dx dy dz$, ak $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z\}$ $\left[\frac{59}{15}\pi\right]$.
25. Vypočítajte $\iiint_A (x + y + z) dx dy dz$, ak $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 12, x^2 + y^2 \leq 4z\}$ $\left[\frac{80}{3}\pi\right]$.
26. Vypočítajte $\iiint_A (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, ak $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq z\}$ $\left[\frac{32\pi(2-\sqrt{2})}{5}\right]$.
27. Vypočítajte $\iiint_A \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25}} dx dy dz$, ak $A = \{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} \leq 1\}$ $\left[\frac{15\pi^2}{2}\right]$.
28. Vypočítajte $\iiint_A x^2 y z dx dy dz$, ak $A = \{(x, y, z) \mid 4x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0\}$ $\left[\frac{-1}{840}\right]$.
29. Vypočítajte plošný obsah množiny A , keď $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq y \leq x\}$ $\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right]$.
30. Vypočítajte objem:
- Kužela $A = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$. (Použite transformáciu polárnymi súradnicami.) $\left[\frac{8}{3}\pi\right]$.
 - Telesa $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - (x^2 + y^2)\}$ $[4\pi]$
 - Telesa A , ktoré je ohraničené rovinami $2x - y + z - 3 = 0$, $2x - y + z = 0$, $x + y + z - 5 = 0$, $x + y + z = 0$, $x + 2y + 2z - 4 = 0$, $x + 2y + 2z = 0$ $[30]$.

- (d) Elipsoidu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ $[32\pi]$.
- (e) Telesa $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 - 6z \leq 0, x^2 + y^2 < \frac{z^2}{3}\}$.
 $\left[\frac{63\pi}{4}\right]$.
- (f) Telesa $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq y^2\}$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$.
- (g) Telesa $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.
 $\left[\frac{16(3\pi-4)}{9}\right]$.
- (h) Telesa A ohraničeného paraboloidom $z = 6 - x^2 - y^2$ a kužeľovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\left[\frac{32\pi}{3}\right]$.
- (i) Telesa A ohraničeného paraboloidom $2z = x^2 + y^2$ a kužeľovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\left[\frac{4\pi}{3}\right]$.
- (j) Telesa A ohraničeného rovinou $z = 0$, valcovou plochou $x^2 + y^2 = 2x$ a paraboloidom $x^2 + y^2 = z - 2$ $\left[\frac{7\pi}{2}\right]$.
- (k) Telesa A ohraničeného rovinou $z = 0$, valcovou plochou $x^2 + y^2 = 4x$ a guľovou plochou $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, pričom $z \geq 0$.
 $\left[\frac{4^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)\right]$.
- (l) Telesa A ohraničeného paraboloidom $x^2 + y^2 = 4z$ a guľovou plochou $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ $\left[\frac{8}{3}\pi(-5 + 3\sqrt{3})\right]$.
- (m) Telesa A ohraničeného guľovou plochou $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ a guľovou plochou $x^2 + y^2 + z^2 = 8z$ $\left[\frac{80\pi}{3}\right]$.