8. týždeň semestra

DÚ: Vyšetrite stacionárne body a lokálne extrémy funkcie $\boldsymbol{f(x,y) = x^3 + y^2 + 6xy}$.

Riešenie:

Vypočítajme parciálne derivácie funkcie f a nájdime stacionárne body:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 6y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 6x$$

Sústava

$$3x^2 + 6y = 0$$

$$2y + 6x = 0$$

má dve riešenia: $x_1 = 0, y_1 = 0$ a $x_2 = 6, y_2 = -18$. Našli sme teda dva stacionárne body: $A = (0,0)$ a $B = (6,-18)$.

Vypočítajme druhé parciálne derivácie funkcie f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2.$$

Vyšetrime Hessovu maticu v stacionárnych bodoch.

V bode A máme: $H_A = \begin{pmatrix} 6.0 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ a $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -36$. Z toho, že $\Delta_2 < 0$, vyplýva, že v bode A funkcia nemá extrém (A je sedlový bod).

V bode B máme: $H_B = \begin{pmatrix} 6.6 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ a $\Delta_1 = 36 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 36 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 72 - 36 = 36 > 0$. Keďže $\Delta_1 > 0$ aj $\Delta_2 > 0$, tak matica H_B je kladne definitná a funkcia f má v bode B ostré lokálne minimum s hodnotou $f(B) = f(6,-18) = 6^3 + 18^2 - 6^2(18) = 6^2(6) + 6^2 3^2 - 6^2(18) = 6^2(6 + 9 - 18) = 36(-3) = -108$.