6. týždeň semestra

DÚ 1: Ukážte, že neexistuje

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^3+y^2}$$

Riešenie:

Urobme najprv zúženie na priamku $x = 0$, tj. parametricky: $x = x(t) = 0, y = y(t) = t$. Aby $(x,y) \to (0,0)$ pozdĺž priamky, tak $t \to 0$ a vypočítajme limitu:

$$\lim_{t\to 0} \frac{0}{0+t^2} = 0.$$

Urobme ďalej zúženie na krivku $y = y(x) = \sqrt{x^4 - x^3}$, parametricky: $x = x(t) = t, y = y(t) = \sqrt{t^4 - t^3}$. Keďže $y(t) = \sqrt{t^4 - t^3} = \sqrt{t^3(t-1)} = \sqrt{-t^3(1-t)}$, funkcia $y(t)$ je dobre definovaná pre ľubovoľné $t < 0$ blízke 0. Aby $(x,y) \to (0,0)$ pozdĺž krivky, tak $t \to 0^-$ a vypočítajme limitu:

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{2t\left(\sqrt{-t^3(1-t)}\right)^2}{t^3 + \left(\sqrt{t^4 - t^3}\right)^2} = \lim_{t\to 0^-} \frac{-2t^4(1-t)}{t^3 + t^4 - t^3} = \lim_{t\to 0^-} \frac{2t^4(t-1)}{t^4} = \lim_{t\to 0^-} 2(t-1) = -2 \neq 0.$$

Aby limita mohla v bode $(0,0)$ existovať, tak pre všetky zúženia musí dávať rovnaké číslo, čo pre nami zvolené zúženia nie je pravda a preto limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^3+y^2}$ neexistuje.

DÚ 2: Vyšetrite spojitosť f v bode $(0,0)$, vypočítajte parciálne derivácie f v bode $(0,0)$ a vyšetrite diferencovateľnosť funkcie f v bode $(0,0)$, ak:

$$\boldsymbol{f(x,y) = \begin{cases} \left(\sqrt{x^2+y^2}\right) e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}; & \textbf{pre } (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & \textbf{pre } (x,y) = (0,0) \end{cases}}.$$

Riešenie:

Vyšetrime najprv spojitosť funkcie f v bode $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\sqrt{x^2+y^2}\right) e^{\frac{-1}{x^2+y^2}} = \left| \begin{array}{c} u = \dfrac{1}{x^2+y^2} \\ (x,y) \to (0,0) \\ u \to \infty \end{array} \right| = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{\sqrt{u}e^u} = \frac{"\,1\,"}{\infty} = 0$$

$$= f(0,0)$$

Teda funkcia f je spojitá v bode $(0,0)$.

Vypočítajme parciálne derivácie funkcie f v bode $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f\big((0,0)+t(1,0)\big)-f(0,0)}{t-0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2}e^{\frac{-1}{t^2}}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{te^{\frac{1}{t^2}}}$$
$$=\begin{cases}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t}{te^{\frac{1}{t^2}}}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{t^2}}}=\dfrac{"\,1\,"}{\infty}=0\\ \lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{-t}{te^{\frac{1}{t^2}}}=\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{-1}{e^{\frac{1}{t^2}}}=\dfrac{"\,-1\,"}{\infty}=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f\big((0,0)+t(0,1)\big)-f(0,0)}{t-0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2}e^{\frac{-1}{t^2}}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{te^{\frac{1}{t^2}}}$$
$$=\begin{cases}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t}{te^{\frac{1}{t^2}}}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{t^2}}}=\dfrac{"\,1\,"}{\infty}=0\\ \lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{-t}{te^{\frac{1}{t^2}}}=\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{-1}{e^{\frac{1}{t^2}}}=\dfrac{"\,-1\,"}{\infty}=0\end{cases}$$

Čiže máme $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Nakoniec overme, či je f diferencovateľná v bode $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left|f(x,y)-f(0,0)-\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\begin{pmatrix}x-0\\y-0\end{pmatrix}\right|}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left|f(x,y)-0-(0,0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right|}{\|(x,y)\|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left|\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}-0-0\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}=\left|\begin{matrix}u=\dfrac{-1}{x^2+y^2}\\(x,y)\to(0,0)\\u\to-\infty\end{matrix}\right|$$
$$=\lim_{u\to-\infty}e^{u}="e^{-\infty}"=0$$

Áno, f je diferencovateľná v bode $(0,0)$.