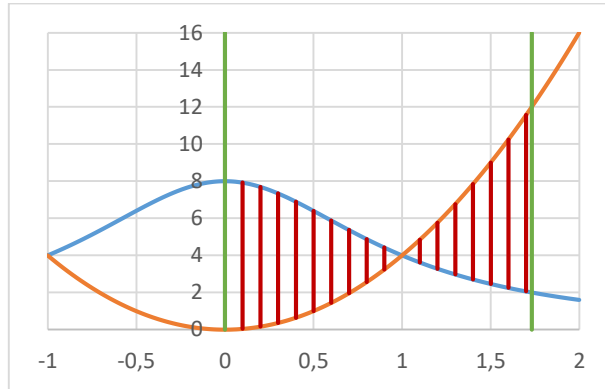


4. týždeň semestra

DŮ: Vypočítajte obsah plochy ohraničenej krivkami $y = \frac{8}{1+x^2}$, $y = 4x^2$, $x = 0$ a $x = \sqrt{3}$. Výsledok vyjadrite presne, nezaokrúhľujte, hodnoty funkcie $\arctg$ vyčíslite.

Riešenie:



Na obrázku je plocha, ktorej obsah treba vypočítať vyznačená zvislými bordovými čiarami. Z obrázka vidíme, že krivky $y = \frac{8}{1+x^2}$ (modrou) a $y = 4x^2$ (oranžovou) sa pretínajú v bodoch $(-1, 4)$ a $(1, 4)$, čo ukážeme aj analyticky:

Označme $f(x) = \frac{8}{1+x^2}$ a $g(x) = 4x^2$, potom z rovnice $f(x) = \frac{8}{1+x^2} = 4x^2 = g(x)$ dostaneme:

$$4x^4 + 4x^2 - 8 = 0.$$

Označme $z = x^2$, potom rovnicu môžeme prepísať ako:

$$4z^2 + 4z - 8 = 0.$$

Táto rovnica má dve riešenia $z_1 = -2$ a $z_2 = 1$. Pretože $z = x^2$, uvažujeme iba riešenie z_2 . Rovnici $z_2 = 1 = x^2$ vyhovuje $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$. Platí $f(-1) = f(1) = 4 = g(1) = g(-1)$. Z hľadiska zadania úlohy nás zaujíma iba riešenie x_2 , keďže plocha, ktorej obsah treba vypočítať, leží medzi priamkami $x = 0$ a $x = \sqrt{3}$.

Pretože $f(0) = 8 > 0 = g(0)$, funkcia f je na intervale $\langle 0, \sqrt{3} \rangle$ klesajúca ($f'(x) < 0$ pre každé $x \in (0, \sqrt{3})$), funkcia g je na intervale $\langle 0, \sqrt{3} \rangle$ rastúca ($g'(x) > 0$ pre každé $x \in (0, \sqrt{3})$) a $f(1) = g(1)$, tak pre $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platí: $f(x) \geq g(x)$, kým pre $x \in \langle 1, \sqrt{3} \rangle$ platí: $f(x) \leq g(x)$.

Obsah plochy S teda vypočítame pomocou nasledujúceho integrálu:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 f(x) - g(x) dx + \int_1^{\sqrt{3}} g(x) - f(x) dx = \int_0^1 \frac{8}{1+x^2} - 4x^2 dx + \int_1^{\sqrt{3}} 4x^2 - \frac{8}{1+x^2} dx \\ &= 8[\arctg x]_0^1 - \frac{4}{3}[x^3]_0^1 + \frac{4}{3}[x^3]_1^{\sqrt{3}} - 8[\arctg x]_1^{\sqrt{3}} \\ &= 8\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - \frac{4}{3}(1 - 0) + \frac{4}{3}(3\sqrt{3} - 1) - 8\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{3}\pi + 4\sqrt{3} - \frac{8}{3} \end{aligned}$$