2. týždeň semestra

DÚ 1: Vypočítajte priamym integrovaním (**bez** použitia **substitúcie** alebo **per partes**):

$$\int \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2 x}{(1+\cos x)\left(\cos^2 x - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)} dx$$

Riešenie:
Pretože pre každé $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2 x - \left(\cos^2 x - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2 x - \cos^2 x = 1 - 1 = 0$$

tak pre každé $x \in \mathbb{R}$ máme:

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Teda funkcia $\frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2 x}{\cos^2 x-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 1$ tam, kde je definovaná.
Keďže $\cos x = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1,$ tak $1 + \cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$
a dostávame:

$$\int \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2 x}{(1+\cos x)\left(\cos^2 x - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)} dx = \int \frac{1}{1+\cos x} dx = \int \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + C,$$

kde posledná rovnosť vyplýva z toho, že $\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$

DÚ 2: Vypočítajte priamym integrovaním (**bez** použitia **substitúcie** alebo **per partes**):

$$\int \frac{2\pi^2}{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x} dx$$

Riešenie:

Označme $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x$. Pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Teda f je konštantná na $\mathbb{R}$. Hodnotu konštanty zistíme z funkčnej hodnoty v niektorom bode z $\mathbb{R}$, napr.:

$$f(0) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arccotg} 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Z toho pre každé $x \in \mathbb{R}$ máme:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$$

a platí:

$$\int \frac{2\pi^2}{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x} dx = \int \frac{2\pi^2}{\frac{\pi}{2}} dx = \int \frac{4\pi^2}{\pi} dx = \int 4\pi\, dx = 4\pi x + C$$