11. týždeň semestra

DÚ: Vypočítajte:

$$\iint_M x \ dxdy,$$

ak $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq \frac{2}{\pi}x \leq y \leq \sin x\right\}$.

Riešenie:

Pretože na M má platiť $0 \leq \frac{2}{\pi}x \leq y \leq \sin x$, tak hľadaná oblasť bude ležať v prvom kvadrante roviny $\mathcal{O}_{xy}$. Určme M ako elementárnu oblasť typu $[x,y]$. Hranice pre premennú y sú jasné priamo zo zadania: $\frac{2}{\pi}x \leq y \leq \sin x$. Ostáva určiť hranice pre x. Nájdime priesečníky kriviek $y = \frac{2}{\pi}x$ a $y = \sin x$ v prvom kvadrante. Rovnici $\frac{2}{\pi}x = \sin x$ v prvom kvadrante vyhovujú $x = 0$ a $x = \frac{\pi}{2}$. Keďže $\frac{2}{\pi}x < \sin x$ pre každé $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tak dostávame: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Oblasť M môžeme úplne popísať ako:

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{2}{\pi}x \leq y \leq \sin x.$$

Vypočítajme integrál:

$$\begin{aligned}
\iint_M x \ dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{2}{\pi}x}^{\sin x} x \ dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x[y]_{\frac{2}{\pi}x}^{\sin x} \ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x - \frac{2}{\pi}x^2 \ dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \ dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}x^2 \ dx = \begin{vmatrix} f(x) = x & g'(x) = \sin x \\ f'(x) = 1 & g(x) = -\cos x \end{vmatrix} \\
&= [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ dx - \left[\frac{2}{3\pi}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -0 + 0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi^2}{12} + 0 \\
&= 1 - 0 - \frac{\pi^2}{12} = \frac{12 - \pi^2}{12}
\end{aligned}$$