Vypočítajte približnú hodnotu $(1,94)^2\mathrm{e}^{0,12}$ lineárnou aproximáciou funkcie dvoch premenných:

$\left[f(x,y)=x^2\mathrm{e}^y \Rightarrow f(x,y) \doteq f(2,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)(x-2)+\frac{\partial f}{\partial y}(2,0)(y-0) \Rightarrow f(1,94;0,12) \doteq 4,24\right]$

Vypočítajte približnú hodnotu $(1,94)^2\mathrm{e}^{0,12}$ lineárnou aproximáciou funkcie jednej premennej:

$\Big[x(t)=2-t; y(t)=2t \Rightarrow g(t) \triangleq f(x(t),y(t))=(2-t)^2\mathrm{e}^{2t}; g(t) \doteq g(0)+g'(0)(t-0)$

$\Rightarrow f(1,94;0,12)=g(0,06) \doteq 4,24\Big]$

Napíšte rovnicu dotykovej roviny τ a rovnice dotykových priamok t_{xz}, resp. t_{yz}, ku grafu funkcie f ležiacich v rovine rovnobežnej so súradnicovou rovinou $\mathcal{O}_{xz}$, resp. $\mathcal{O}_{yz}$, v bode T, ak:

1. $f(x,y)=x^4+2y$; $T=(1,1,?)$

   $\left[T=(1,1,3);\ \tau: z=4x+2y-3;\ t_{xz}: z=4x-1, y=1;\ t_{yz}: z=2y+1, x=1\right]$

2. $f(x,y)=xy$; $T=(?,2,2)$

   $\left[T=(1,2,2);\ \tau: z=2x+y-2;\ t_{xz}: z=2x, y=2;\ t_{yz}: z=y, x=1\right]$

3. $f(x,y)=x^4+2x^2y-xy+x$; $T=(1,?,2)$

   $\left[T=(1,0,2);\ \tau: z=5x+y-3;\ t_{xz}: z=5x-3, y=0;\ t_{yz}: z=y+2, x=1\right]$

Napíšte rovnicu dotykovej roviny k ploche $x^2+2y^2+3z^2=6$ v bode $T=(1,-1,1)$.
[rovnica dotykovej roviny: $x=2y-3z+6$]

Ukážte, že plochy $x^2-xy-8x+z+5=0$ a $4+x+2y=\ln z$ sa dotýkajú (tj. majú spoločnú dotykovú rovinu) v bode $T=(2,-3,1)$.
[rovnica dotykovej roviny: $z=x+2y+5$]

Vypočítajte deriváciu funkcie f v smere jednotkového vektora $\vec{e}$ v bode a, ak:

1. $f(x,y)=\mathrm{e}^{xy^2}$; $\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$; $a=(2,1)$

   $\left[\frac{df}{d\vec{e}}(a)=\frac{5}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^2\right]$

2. $f(x,y)=\mathrm{e}^y\cos(x+y)$; $\vec{e}=\frac{1}{2}(1,\sqrt{3})$; $a=(\frac{\pi}{2},0)$

   $\left[\frac{df}{d\vec{e}}(a)=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\right]$

Nech $f(x,y)=3x^2-6xy+y^2$ a $a=(-\frac{1}{3},-\frac{1}{2})$.

1. Vypočítajte $\frac{df}{d\vec{e}}(a)$ v smere ľubovoľného jednotkového vektora $\vec{e}=(e_1,e_2)$.

   $\left[\frac{df}{d\vec{e}}(a)=e_1+e_2\right]$

2. Zistite, v ktorom smere je $\frac{df}{d\vec{e}}(a)$ nulová.
   $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\right]$

3. Zistite, v ktorom smere je $\frac{df}{d\vec{e}}(a)$ najväčšia.
   $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\right]$

4. Zistite, v ktorom smere je $\frac{df}{d\vec{e}}(a)$ najmenšia.
   $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)\right]$

Nech $f(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 + x + 3y$. Nájdite bod a, v ktorom je derivácia tejto funkcie v každom smere nulová.
$\left[a = (\frac{1}{2}, 1)\right]$

Nech $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ a $a = (2,1)$.

1. Napíšte deriváciu funkcie v smere určenom priamkou $x - 2 = y - 1$ v bode a.
   $\left[\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\ \frac{df}{d\vec{e}}(a) = \frac{-3}{5\sqrt{10}}\right]$

2. Napíšte rovnicu dotyčnice v bode a v určenom smere.

$$\left[\begin{array}{lll} \text{parametrická rovnica dotyčnice:} & & \\ x = 2 + \frac{t}{\sqrt{2}} & \text{resp.} & x = 2 + s \\ y = 1 + \frac{t}{\sqrt{2}} & & y = 1 + s \\ z = f(a) + \frac{df}{d\vec{e}}(a)t = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{-3}{5\sqrt{10}}t; t \in \mathbb{R} & & z = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{3}{5\sqrt{5}}s; s \in \mathbb{R} \end{array}\right]$$

Napíšte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, ktorá je rovnobežná s priamkou $x = y = z$ a určte množinu $M \subset \mathbb{R}^3$ bodov $A = (a, f(a))$, kde $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, v ktorých sa dotýka grafu funkcie.

$$\left[\begin{array}{ll} \text{parametrická rovnica dotyčnice:} & \text{hľadaná množina:} \\ x = a_1 + \frac{t}{\sqrt{2}} & M = \{A \in \mathbb{R}^3; A = (a, f(a))\},\ \text{kde} \\ y = a_2 + \frac{t}{\sqrt{2}} & \text{body } a = (a_1, a_2) \text{ ležia na krivke:} \\ z = f(a) + \frac{df}{d\vec{e}}(a)t = f(a_1, a_2) + \frac{t}{\sqrt{2}}; t \in \mathbb{R} & \frac{-a_1 - a_2}{\sqrt{({a_1}^2 + {a_2}^2)^3}} = 1 \end{array}\right]$$