Vypočítajte nasledujúce určité integrály:

1. $\int_{-1}^{1} \operatorname{arctg} x dx$ $\left[0\right]$

2. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx$ $\left[2\right]$

3. $\int_{-43}^{43} \sin^3(\operatorname{arctg}\sqrt[5]{\sin x^7}) dx$ $\left[0\right]$

4. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$ $\left[2 - \frac{2}{e}\right]$

5. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

6. $\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^x(e^x-2)}{e^{2x}+2e^x+7} dx$ $\left[\ln\sqrt{\frac{42}{15}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{6}) - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)\right]$

7. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x - 2\sin x + 3} dx$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

8. $\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$ $\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} + 4\sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} - 4\right]$

9. $\int_{0}^{3} \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$ $\left[\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right]$

10. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{(e^x+1)(x^2+1)} dx$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

11. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x + \sqrt{\sin^2 x + e^{\cos x}}) dx$ $\left[1\right]$

Vypočítajte obsah plochy ohraničenej krivkami:

1. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}, y = -x^2, x = 1$ $\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right]$

2. $y = x\ln x, y = 0, x = \frac{1}{2}, x = 2$ $\left[\frac{15}{8}\ln 2 - \frac{9}{16}\right]$

3. $y = \ln x, y = \ln^2 x$ $\left[3 - e\right]$

4. $y = x - 1, y^2 = 2x + 1$ $\left[\frac{16}{3}\right]$

5. $y = x^2, y = \frac{x^2}{2}, y = 2$ $\left[\frac{8}{3}(2 - \sqrt{2})\right]$

6. $y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 8$ $\left[2\pi + \frac{4}{3}\right]$

7. $y = \frac{27}{x^2+9}, y = \frac{x^2}{6}$ $\left[\frac{9}{2}\pi - 3\right]$

8. parabolou $y = x^2 - 6x + 8$ a jej dotyčnicami v bodoch $A = [1, 3]$, $B = [4, 0]$ $\left[\frac{9}{4}\right]$

V nasledujúcich úlohách vypočítajte objemy telies:

1. Vypočítajte objem zrezaného kužeľa, ktorý vznikne rotáciou elementárnej oblasti okolo osi $\mathcal{O}_x$, pričom polomery jeho podstáv sú $r = 1$, $R = 2$ a výška $v = 3$. $\left[7\pi\right]$

2. Vypočítajte objem zrezaného kužeľa, ktorý vznikne rotáciou elementárnej oblasti okolo osi $\mathcal{O}_x$, pričom polomery jeho podstáv sú r, R a výška je v. $\left[\frac{\pi v}{3}(R^2 + rR + r^2)\right]$

3. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti D okolo osi $\mathcal{O}_x$, kde D je určená krivkami $y = \frac{2}{\pi}x$, $y = \sin x$, pričom predpokladáme $x \geq 0$. $\left[\frac{\pi^2}{12}\right]$

4. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti D okolo osi $\mathcal{O}_x$, kde D je určená krivkami $y = \frac{9}{2\pi^2}x^2$, $y = \cos x$. $\left[\frac{\pi}{20}\left(6\pi + 5\sqrt{3}\right)\right]$

5. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti D okolo osi $\mathcal{O}_y$, kde D je určená krivkami $y = x$, $y = x + \sin^2 x$, $x = 0$, $x = \pi$. $\left[\frac{\pi^3}{2}\right]$

6. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti D okolo priamky $y = \frac{\pi}{2}$, kde D je určená krivkami $y = \arcsin x$, $y = -\frac{\pi}{2}$, $x = 1$. $\left[\pi(\pi^2 + 4)\right]$

Vypočítajte dĺžku krivky $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x \in \langle a, b\rangle, y = f(x)\}$, ak:

1. $a = 0$, $b = 4$ a $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ $\left[\frac{8}{27}(10^{\frac{3}{2}} - 1)\right]$

2. $a = 0$, $b = 1$ a $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{2x} - 1} - \mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{e}^{2x} - 1}$ $\left[\mathrm{e} - 1\right]$

3. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $y \in \langle 1, \mathrm{e}\rangle$ $\left[\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}\right]$