Príklad 1. Je daná funkcia

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^3}{x^2+y^2} & \text{pre } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pre } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a, [6] Vyšetrite jej spojitosť v bode $(0,0)$.
b, [8] Vypočítajte parciálne derivácie $f'_x(1,0)$ a $f'_x(0,0)$.
c, [6] Rozhodnite, či je funkcia f v bode $(0,0)$ diferencovateľná.
V každej časti napíšte celý postup riešenia.

Riešenie.
a,
Počítame limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-y^3}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}-\lim_{(x,y)\to(0,0)}y\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

Funkcie

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}\quad\text{a}\quad\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

sú ohraničené. Platí:

$$0\le\frac{x^2}{x^2+y^2}\le 1,\qquad 0\le\frac{y^2}{x^2+y^2}\le 1.$$

Funkcie x^2 a y majú nulové limity

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2=0\qquad\lim_{(x,y)\to(0,0)}y=0.$$

Preto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-y^3}{x^2+y^2}=0+0=0=f(0,0),$$

a funkcia f je v bode $[0,0]$ spojitá.

b,

$$f'_x(x,y)=\frac{4x^3(x^2+y^2)-(x^4-y^3)2x}{(x^2+y^2)^2}\qquad\text{pre } (x,y)\neq(0,0).$$

Preto

$$f'_x(1,0)=\frac{4\cdot(1+0)-(1-0)\cdot 2}{(1+0)^2}=2.$$

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^4}{x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to0}x=0.$$

c,
Analogicky, ako v časti b, vypočítame ešte $f'_y(0,0)$.

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{-y^3}{y^2} - 0}{y-0} = \lim_{x\to 0} -1 = -1.$$

Diferencovateľnosť funkcie overíme z definície.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^4-y^3}{x^2+y^2} - 0 - 0(x-0) - (-1)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Pomocou zúženia, $\varphi(t) = (t,t)$ (alebo iného vhodného) dokážeme, že limita nie je nula.

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^4-t^3}{(2t^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{t}{\sqrt{2t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4-t^3}{2^{\frac{3}{2}}t^3} + \frac{t}{\sqrt{2}t} = -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \neq 0.$$

Preto funkcia f nie je diferencovateľná v bode $(0,0)$.

Príklad 2. Je daná funkcia
$$f(x,y) = xy(3-2x+y).$$

a, [10] Nájdite jej lokálne extrémy.
b, [10] Nájdite jej absolútne extrémy na trojuholníku KLM s vrcholmi
$K=[0,0]$, $L=[0,-3]$, $M=[3,-3]$.
Napíšte celý postup riešenia.

Riešenie.
a,
Hľadajme stacionárne body funkcie f.

$$f'_x(x,y) = 3y - 4xy + y^2 = y(3-4x+y),$$
$$f'_y(x,y) = 3x - 2x^2 + 2xy = x(3-2x+2y).$$

Z rovníc
$$y(3-4x+y) = 0,$$
$$x(3-2x+2y) = 0.$$
dostaneme nasledujúce riešenia a stacionárne body

$$x=0,\ y=0 \ \Rightarrow\ A=[0,0],$$
$$x=\frac{3}{2},\ y=0 \ \Rightarrow\ B=[\frac{3}{2},0],$$
$$x=0,\ y=-3 \ \Rightarrow\ C=[0,-3],$$
$$x=\frac{1}{2},\ y=-1 \ \Rightarrow\ D=[\frac{1}{2},-1].$$

Matica druhých parciálnych derivácií je
$$\begin{pmatrix} -4y & 3-4x+2y \\ 3-4x+2y & 2x \end{pmatrix}$$

Dosadíme do matice M postupne každý stacionárny bod.
Matica
$$M(A) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$
a teda
$$d_1 = 0$$
$$d_2 = \det M(A) = -9 < 0.$$
Podľa Sylvestrovho kritéria je bod A sedlový bod funkcie f.
Matica
$$M(B) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$
a teda
$$d_1 = 0$$
$$d_2 = \det M(B) = -9 < 0.$$

Podľa Sylvestrovho kritéria je bod B sedlový bod funkcie f.

Matica

$$M(C) = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

a teda

$$d_1 = 12$$

$$d_2 = \det M(C) = -9 < 0.$$

Podľa Sylvestrovho kritéria je bod C sedlový bod funkcie f.

Matica

$$M(D) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a teda

$$d_1 = 4 > 0$$

$$d_2 = \det M(D) = 3 > 0.$$

Podľa Sylvestrovho kritéria je bod D bodom OLMIN funkcie f.

b,

Z lokálnych extrémov z časti a, sú body $A = K$ a $C = L$ vrcholmi trojuholníka KLM.

Bod D leží vo vnútri trojuholníka. Bod B leží vonku, preto ho ďalej neuvažujeme.

Hľadáme viazané extrémy na jednotlivých úsečkách.

Úsečka KL.

Na nej $x = 0$.

Dosadením dostaneme $g(y) = f(0, y) = 0$. Hodnota funkcie f je nula na celej úsečke.

Úsečka LM.

Na nej $y = -3$. Dosadením dostaneme $h(x) = f(x, -3) = 6x^2$. Jej derivácia je $h'(x) = 12x$. Z rovnice $12x = 0$ dostaneme $x = 0$, čo spolu s $y = -3$ vedie k bodu $[0, -3] = C$.

Úsečka KM.

Na nej $y = -x$. Dosadením dostaneme $k(x) = f(x, -x) = -3x^2 + 3x^3$. Jej derivácia je $k'(x) = -6x + 9x^2$. Z rovnice $-6x + 9x^2 = 0$ dostaneme korene $x_1 = 0$, a $x_2 = \frac{2}{3}$.

Prvý vedie k bodu $[0, 0] = A$. Druhý vedie k bodu $[\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]$.

Vypočítame hodnoty funkcie f v jednotlivých bodoch.(a vieme, že na celej úsečke KL je hodnota 0.)

$$f(0,0) = 0, \qquad f(0,-3) = 0, \qquad f(3,-3) = 54,$$

$$f(\frac{1}{2}, -1) = -\frac{1}{2}, \qquad f(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = -\frac{4}{9} > -\frac{1}{2}.$$

Funkcia má na danom trojuholníku absolútne minimum $-\frac{1}{2}$
(v bode $D = [\frac{1}{2}, -1]$) a absolútne maximum 54 (v bode $M = [3, -3]$).

Príklad 3. [20] Použitím substitúcie vypočítajte

$$\iint_M \frac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy,$$

ak množina M je daná nerovnosťami $x^2+y^2 \leq 2$, $x \leq y$, $x \geq 0$.
Nakreslite množinu M.
Popíšte M ako elementárnu oblasť v polárnych súradniciach.
Pri výpočte integrálu napíšte celý postup.

Riešenie.

Množina M je časťou kruhu s polomerom $\sqrt{2}$ a stredom v počiatku. Leží nad priamkou $y = x$, napravo od y-ovej osi.

Jej popis v polárnych súradniciach je:

$$0 \leq r \leq \sqrt{2},$$
$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Substitúcia

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

s Jakobiánom

$$J = r$$

vedie k

$$\iint_M \frac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\cos\varphi}{1+r}\, r\, d\varphi\, dr =$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{1+r} \left[\sin\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\, dr = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{1+r}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) dr.$$

Delením polynómov dostaneme:

$$\frac{r^2}{1+r} = r - 1 + \frac{1}{1+r}.$$

Ďalej integrujeme:

$$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{1+r}\, dr = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^{\sqrt{2}} r - 1 + \frac{1}{1+r}\, dr =$$
$$= \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[\frac{r^2}{2} - r + \ln|1+r|\right]_0^{\sqrt{2}} = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1-\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right).$$