Príklad 1. Je daná funkcia

$$f(x,y) = 3\sqrt[3]{x^2y} - 2y.$$

a, [10] Vypočítajte rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie f v bode $\bar{a} = [4, \frac{1}{2}]$.
b, [4] Použitím definície vypočítajte parciálne derivácie $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ a $f'_y(1,0)$.
c, [6] Rozhodnite, či je funkcia f v bode $[0,0]$ diferencovateľná.
V každej časti napíšte celý postup riešenia.

Riešenie.

a,
Vypočítame hodnotu

$$f(4, \frac{1}{2}) = 5.$$

Ďalej vypočítame parciálne derivácie funkcie f

$$f'_x(x,y) = \frac{2xy}{(x^2y)^{\frac{2}{3}}},$$

$$f'_y(x,y) = \frac{x^2}{(x^2y)^{\frac{2}{3}}} - 2,$$

a tiež ich hodnoty v bode $\bar{a}$,

$$f'_x(4, \frac{1}{2}) = 1,$$

$$f'_y(4, \frac{1}{2}) = 2.$$

Rovnica dotykovej roviny je

$$z - 5 = 1(x-4) + 2(y - \frac{1}{2}).$$

b,

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x-0} = 0.$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{-2y-0}{y-0} = -2.$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(1,y) - f(1,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{3y^{\frac{1}{3}} - 2y}{y} = +\infty.$$

Preto $f'_y(1,0)$ neexistuje.

c,

Diferencovateľnosť funkcie overíme z definície.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3\sqrt[3]{x^2y} - 2y - 0 - 0(x-0) - (-2)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3\sqrt[3]{x^2y}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Pomocou zúženia, $\varphi(t) = (t,t)$ (alebo iného vhodného) dokážeme, že limita nie je nula. Dostaneme

$$\lim_{t\to 0+} \frac{3t}{\sqrt{2t^2}} = \lim_{t\to 0+} \frac{3}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Preto funkcia f nie je diferencovateľná v bode $(0,0)$.

Príklad 2. Je daná funkcia

$$f(x,y) = 4x^3 + 6x^2y + 3xy^2 - 27x.$$

a, [12] Nájdite jej lokálne extrémy.
b, [8] Nájdite viazané extrémy funkcie f vzhľadom na podmienku $3x - y = 0$.
Napíšte celý postup riešenia.

Riešenie.
a,
Hľadajme stacionárne body funkcie f.

$$f'_x(x,y) = 12x^2 + 12xy + 3y^2 - 27,$$

$$f'_y(x,y) = 6x^2 + 6xy.$$

Z rovníc

$$12x^2 + 12xy + 3y^2 - 27 = 0,$$

$$6x^2 + 6xy = 0,$$

dostaneme stacionárne body.
Z druhej rovnice máme buď$x = 0$ alebo $x + y = 0$.
Ak $x = 0$ dosadením do prvej rovnice $3y^2 - 27 = 0$, a teda $y_{1,2} = \pm 3$.

$$x = 0,\ y_{1,2} = \pm 3 \ \Rightarrow\ A = [0,3],$$

$$x = \frac{3}{2},\ y = 0 \ \Rightarrow\ B = [0,-3].$$

Ak $x + y = 0$, tak znovu $3y^2 - 27 = 0$, a

$$x = 3,\ y = -3 \ \Rightarrow\ C = [3,-3],$$

$$x = -3,\ y = 3 \ \Rightarrow\ D = [-3,3].$$

Matica druhých parciálnych derivácií je

$$\begin{pmatrix} 24x + 12y & 12x + 6y \\ 12x + 6y & 6x \end{pmatrix}$$

Dosadíme do matice M postupne každý stacionárny bod.
Matica

$$M(A) = \begin{pmatrix} 36 & 18 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$$

a teda

$$d_2 = \det M(A) = -364 < 0.$$

Podľa Sylvestrovho kritéria je bod A sedlový bod funkcie f.
Matica

$$M(B) = \begin{pmatrix} -36 & -18 \\ -18 & 0 \end{pmatrix}$$

a teda

$$d_2 = \det M(B) = -364 < 0.$$

Podľa Sylvestrovho kritéria je bod B sedlový bod funkcie f.

Matica

$$M(C) = \begin{pmatrix} 36 & 18 \\ 18 & 18 \end{pmatrix}$$

a teda

$$d_1 = 36 > 0$$

$$d_2 = \det M(C) = 364 > 0.$$

Podľa Sylvestrovho kritéria je bod C bod OLMIN funkcie f.

Matica

$$M(D) = \begin{pmatrix} -36 & -18 \\ -18 & -18 \end{pmatrix}$$

a teda

$$d_1 = -36 < 0$$

$$d_2 = \det M(D) = 364 > 0.$$

Podľa Sylvestrovho kritéria je bod D bodom OLMAX funkcie f.

b,

Hľadáme viazané extrémy na priamke 3x-y=0

Parametrizácia má tvar $g(t) = (t, 3t)$.

Po dosadení je

$$h(t) = f(t, 3t) = 4t^3 + 18t^3 + 27t^3 - 27t = 49t^3 - 27t.$$

Jej derivácia je

$$h'(t) = 3 \cdot 49t^2 - 27$$

a teda stacionárne body

$$t_{1,2} = \pm\frac{3}{7}$$

$$h''(t) = 6 \cdot 49t$$

$$h''(\frac{3}{7}) = 6 \cdot 49\frac{3}{7} > 0$$

a teda bod $[\frac{3}{7}, \frac{9}{7}]$ je bod viazaného OLMIN.

$$h''(-\frac{3}{7}) = -6 \cdot 49\frac{3}{7} < 0$$

a teda bod $[-\frac{3}{7}, -\frac{9}{7}]$ je bod viazaného OLMAX.

Príklad 3.

Množina M je daná nerovnosťami $1 \leq x^2 + y^2 \leq p^2, \quad \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x.$

a, [14] Použitím substitúcie vypočítajte (v závislosti od kladného parametra p)

$$\iint\limits_M \frac{y}{x}\, dxdy,$$

Nakreslite množinu M.

Popíšte M ako elementárnu oblasť v polárnych súradniciach.

Pri výpočte integrálu napíšte celý postup.

b, [6] Pre aké hodnoty p je výsledok menší ako 1?

Riešenie

Množina M je časťou medzikružia s polomermi 1 a p a stredom v počiatku. Leží pod priamkou $y = x$ a nad priamkou $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Jej popis v polárnych súradniciach je:

$$1 \leq r \leq p,$$
$$\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

Substitúcia

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

s Jakobiánom

$$J = r$$

vedie k

$$\iint\limits_M \frac{y}{x}\, dxdy = \int_1^p \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\, r\, d\varphi\, dr = \int_1^p r\,[-\ln|\cos\varphi|]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\, dr =$$

$$= \int_1^p r\left(\ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right) dr = \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^p \ln\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{p^2-1}{4}\ln\frac{3}{2}.$$

b,

Výsledok

$$\frac{p^2-1}{4}\ln\frac{3}{2} < 1$$

ak

$$p^2 < \frac{4}{\ln\frac{3}{2}} + 1,$$

a teda

$$p < \sqrt{\frac{4}{\ln \frac{3}{2}} + 1}.$$

Súčasne je $p \geq 1$, preto

$$p \in \left[1, \sqrt{\frac{4}{\ln \frac{3}{2}} + 1}\right).$$